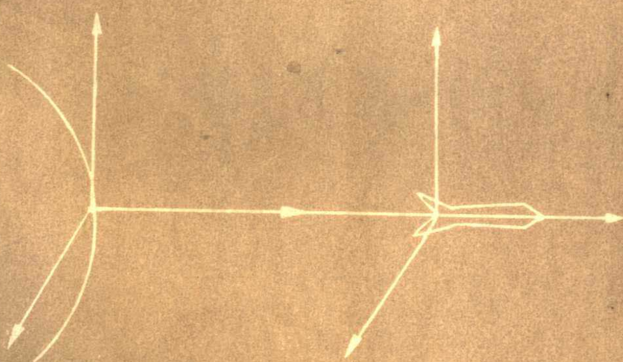
狭义相对论与火箭飞行

竺 苗 龙



陕西科学技术出版社

狭义相对论与火箭飞行

竺 苗 龙

陕西科学技术出版社

狭义相对论与火箭飞行

竺　苗　龙

陕西科学技术出版社出版

（西安北大街131号）

陕西省新华书店发行　　国营五二三厂印刷

开本 850×1168　1/32　印张 2.5　字数 50,000

1980年1月第1版　1980年1月第1次印刷

印数 1——1,900

统一书号：13202·8　定价：0.27元

序

这是一本狭义相对论及其在火箭飞行方面应用的读物。书中不用张量计算，却能详细地介绍了狭义相对论基础知识和基本概念，而且是在介绍了经典力学的相对性概念以后，才引进爱因斯坦相对论的，这就克服了初学者在概念上难以接受的困难。同时，书中还讨论了相对论力学，介绍了相对论在火箭飞行技术上的应用。因此，本书既可作为初学相对论的大学生的入门书，又可作为有关科技人员的参考书。

潘　　湘

一九七九年五月于西北大学

前　　言

本书前三章介绍爱因斯坦的狭义相对论的基本内容：狭义相对论的实验基础；爱因斯坦关于狭义相对论的两个基本假设；著名的洛仑兹变换；狭义相对论的时空观；有名的质能关系式——$E=mc^2$；光子理论以及狭义相对论的一种有效的几何解释——闵可夫斯基的四维几何学等。

本书的第四章除§4·1外，是作者本人和广宇同志一起应用狭义相对论这一理论对火箭飞行的一些有关问题进行研究所得到的结果。

本书承蒙西北大学理论物理教研室主任潘湘教授审阅，谨表示衷心感谢。

作者本人学识浅薄，水平很低，不当或错误之处恐怕还有许多，恳望老前辈及同志们批评指正。

作　者

一九七九年于陕西

目　　录

第一章　狭义相对论的有关知识及其实验基础

§1·1　伽利略变换

如图1所示，设坐标系 $o'x'y'z'$ 沿着坐标系 $oxyz$ 的x轴正向作匀速直线运动，那么对于空间内任一点M论，它在 $oxyz$ 系中的坐标与它在 $o'x'y'z'$ 系中的坐标之间有如下关系：

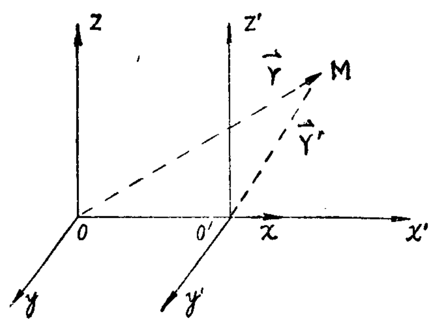


图 1

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \tag{1·1·1}$$

或者写成矢量的形式：

$$\begin{cases} \overrightarrow{r'} = \overrightarrow{r} - \overrightarrow{vt} \\ t' = t \end{cases} \tag{1·1·1'}$$

变换（1·1·1）或其矢量的形式（1·1·1′）就是经典力学中著名的伽利略变换。

从变换（1·1·1）我们容易求得它的逆变换：

$$\begin{cases} x = x' + vt' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \tag{1·1·2}$$

或者写成矢量形式：

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r'} + \vec{v}t \\ t = t' \end{cases} \tag{1·1·2'}$$

从伽利略变换可见：一个质点的坐标在不同的参照系内其坐标是不同的。但是可以证明：两点间的距离是伽利略变换下的不变量。因为

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - vt \\ y_1' = y_1 \\ z_1' = z_1 \\ t' = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2' = x_2 - vt \\ y_2' = y_2 \\ z_2' = z_2 \\ t' = t \end{cases}$$

所以有：

$$x_2 - x_1 = x_2' - x_1'$$

$$y_2 - y_1 = y_2' - y_1'$$

$$z_2 - z_1 = z_2' - z_1'$$

故得

$$\begin{aligned} l_{12} &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \\ &= \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2} \\ &= l'_{12} \end{aligned} \tag{1·1·3}$$

即距离（也有称为相对距离）为伽利略变换下之不变量。

另外若引进：

$$\tau_{12}=t_2-t_1$$

$$\tau'_{12}=t'_2-t'_1$$

则显然有 $$\tau_{12}=\tau'_{12} \qquad (1\cdot1\cdot4)$$

即一事件的时间间隔在伽利略变换下也为不变量。

将（1•1•1）的前三个式子对时间 t 求导数，可得：

$$\begin{cases}\dfrac{dx'}{dt}=\dfrac{dx}{dt}-v\\ \dfrac{dy'}{dt}=\dfrac{dy}{dt}\\ \dfrac{dz'}{dt}=\dfrac{dz}{dt}\end{cases} \qquad (1\cdot1\cdot5)$$

引入物体相对于参照系 k 即 $oxyz$ 系的速度 $\vec{u}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$、相对于参照系 k' 即 $o'x'y'z'$ 系的速度$\vec{u'}=\dfrac{d\vec{r'}}{dt}$，可得：

$$\begin{cases}u'_x=u_x-v\\ u'_y=u_y\\ u'_z=u_z\end{cases} \qquad (1\cdot1\cdot6)$$

即有

$$\vec{u'}=\vec{u}-\vec{v} \qquad (1\cdot1\cdot6')$$

式（1•1•6）或（1•1•6′）就是经典力学中的速度相加定理。从（1•1•6）或（1•1•6′）可见：同一质点在某一给定的时间 t 其速度在不同的伽利略参照系内是不同的。

但是因为

$$\vec{u'_1}=\vec{u_1}-\vec{v}$$

$$\vec{u'_2}=\vec{u_2}-\vec{v}$$

所以两物体之间的相对速度

$$\vec{u}_{12}=\vec{u}_2-\vec{u}_1=\vec{u}'_2-\vec{u}'_1=\vec{u}'_{12} \qquad (1·1·7)$$

在伽利略变换下也是一个不变量。

若在（1·1·6）的两边再对 t 求导数，则得：

$$\begin{cases}\dfrac{du'_x}{dt}=\dfrac{du_x}{dt}\\ \dfrac{du'_y}{dt}=\dfrac{du_y}{dt}\\ \dfrac{du'_z}{dt}=\dfrac{du_z}{dt}\end{cases} \qquad (1·1·8)$$

所以有

$$\frac{d\vec{u'}}{dt}=\frac{d\vec{u}}{dt}$$

即加速度也是伽利略变换下的不变量。

现在我们来证明：牛顿第二定律

$$\vec{F}=m\vec{a}$$

在经典力学的范围内对伽利略变换是个不变式。

由于质量 m 在经典力学中被看作不变，而加速度 a 又在上面被证明为伽利略变换下的不变量，所以在证明上述论断时只需就力 F 讨论即可。

力 F 在经典力学中归纳起来有下述的三种类型：

①与质点的相互距离有关的力（如万有引力等）

②与物体和媒质的相对速度有关的力（如干摩擦力等）

③与时间有关的力（如往复式发动机活塞上的压力等）

但不论那一类力，根据前面所得的结果，我们知道它们均为在伽利略变换下之不变量；所以牛顿第二定律在经典力学范围内为伽利略变换下之不变式。

§1·2 坐标旋转

对于仅仅是绕原点的坐标旋转论，我们在解析几何中已经知道，它们的坐标变换如下：

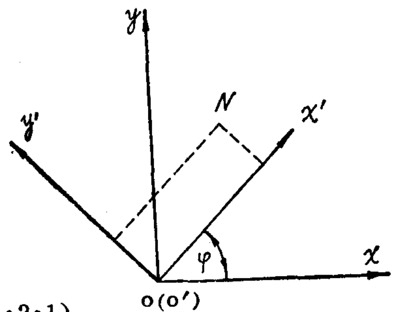


图 2

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y' = y\cos\varphi - x\sin\varphi \end{cases} \quad (1\cdot2\cdot1)$$

矢量 $\overrightarrow{ON}$ 的长度 $|\overrightarrow{ON}| = A$（也有称之为矢量 $\overrightarrow{ON}$ 的模数或模的等），在坐标系 oxy 即 s 系内

$$A^2 = x^2 + y^2$$

在坐标系 $o'x'y'$ 即 s' 系内

$$A^2 = (x')^2 + (y')^2$$

很显然，式（1·2·1）是一个线性变换。现在我们来证明

（命题一）：线性变换（1·2·1）保持平方项之和不变，即 x^2+y^2 在变换（1·2·1）之下是个不变量。

因为：

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi$$
$$y' = y\cos\varphi - x\sin\varphi$$

所以

$$\begin{aligned}(x')^2 + (y')^2 &= (x\cos\varphi + y\sin\varphi)^2 + (y\cos\varphi - x\sin\varphi)^2 \\ &= (x^2\cos^2\varphi + 2xy\cos\varphi\sin\varphi + y^2\sin^2\varphi) + \\ &\quad + (y^2\cos^2\varphi - 2xy\cos\varphi\sin\varphi + x^2\sin^2\varphi) \\ &= x^2 + y^2\end{aligned}$$

即 $$(x')^2+(y')^2=x^2+y^2 \tag{1·2·2}$$

所以命题一成立。现在我们反过来证明：

（命题二）：若一线性变换满足平方项之和保持不变，那么它在图2所示的右手坐标系下必为（1·2·1）的形式。

保持平方项之和不变的线性变换都可写成如下形式：

$$x'=ax+by$$

$$y'=cx+dy$$

要此变换满足（1·2·2），即要求

$$\begin{aligned}(x')^2+(y')^2&=(ax+by)^2+(cx+dy)^2\\&=(a^2+c^2)x^2+2(ab+cd)xy\\&\quad+(d^2+b^2)y^2=x^2+y^2\end{aligned}$$

故有：

$$\begin{cases}a^2+c^2=1\\b^2+d^2=1\\ab+cd=0\end{cases}$$

从上面的前两式可知，此时的 a，b，c，d，其绝对值均小于1，因此我们可令：

$$a=\cos\varphi$$

由

$$a^2+c^2=1$$

可得 $$c=\pm\sin\varphi$$

(i) 取 $c=\sin\varphi$

那么从：$ab+cd=0$ 可得

$$\cos\varphi\cdot b+\sin\varphi\cdot d=0$$

故有 $$b=-d\,\mathrm{tg}\,\varphi$$

从 $$b^2+d^2=1$$

可得： $d^2 + d^2\mathrm{tg}^2\varphi = 1 = d^2\ (1 + \mathrm{tg}^2\varphi)\ = d^2\sec^2\varphi$

故有 $d = \pm\cos\varphi$

$$b = \mp\sin\varphi$$

这样，我们就得到了如下的两个变换：

$$\begin{cases} x' = ax + by = \cos\varphi\cdot x - \sin\varphi\cdot y \\ y' = cx + dy = \sin\varphi\cdot x + \cos\varphi\cdot y \end{cases} \tag{1·2·3}$$

$$\begin{cases} x' = \cos\varphi\cdot x + \sin\varphi\cdot y \\ y' = \sin\varphi\cdot x - \cos\varphi\cdot y \end{cases} \tag{1·2·4}$$

(ii) 若取 $c = -\sin\varphi$，则我们同样可得如下两个变换

$$\begin{cases} x' = \cos\varphi\cdot x + \sin\varphi\cdot y \\ y' = -\sin\varphi\cdot x + \cos\varphi\cdot y \end{cases} \tag{1·2·5}$$

$$\begin{cases} x' = \cos\varphi\cdot x - \sin\varphi\cdot y \\ y' = -\sin\varphi\cdot x - \cos\varphi\cdot y \end{cases} \tag{1·2·6}$$

显见（1·2·3）和（1·2·5）可统一成一种变换，不妨用（1·2·5）代表。而（1·2·4）和（1·2·6）可统一成另一种变换，不妨用（1·2·4）代表。

在（1·2·4）和（1·2·5）两种变换中，（1·2·4）又显然是变换（1·2·5）的反演，属于左手系，故应除去。

所以在右手系里保持平方项之和不变的线性变换就是（1·2·5）即（1·2·1）。

故知命题二成立。

§1.3 菲左的实验

下面讨论狭义相对论的实验基础。

十九世纪初期，光的波动学说刚发展起来，当时人们以为

光波与弹性波完全相仿，光的传播也需要一种弹性媒质。这种弹性媒质充满整个宇宙而且渗透在一切物体的内部。人们称这种弹性媒质为宇宙以太。

为了证实这种以太的观念，人们设计了许多实验来研究以太与物体相互作用时的特性。但是这些实验的结果无法用以太的观念来统一解释。在这许多实验中，最著名的而且后来对爱因斯坦（A. Einstein）建立相对论影响最大的实验是下述的菲左（Fiezau）实验和迈克耳逊（Michelson）实验。

为了研究透明媒质（例如水）的运动对于这种媒质中以太的影响，菲左在1851年曾作了一个实验。这个实验的装置可用图3来说明。

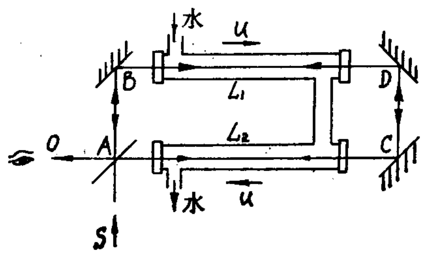


图 3

当图中长度各为l的两管L_1和L_2中的水不流动时，光线S投至半镀银薄片A上分成两部分，分别经过$ACDBA$和$ABDCA$而会合在一起，观察者可以看到一定的干涉条纹。

现在使L_1与L_2两管中的流水速度为u，流动方向如图3所示，则观察者就可以看到干涉条纹的移动。

菲左按照流水可以局部带动以太的假设来对这个实验进行计算。若设V是光在静水内的以太中传播的速度，而以太被流水局部带动后具有速度αu，α称为以太被带动的牵引系数。那么根据经典力学中的速度相加法则，我们可得：

当光线在水中顺流进行时，它相对于此实验装置（或观察者）的速度为：$V+\alpha u$。

当光线在水中逆流进行时，它相对于此实验装置（或观察者）的速度为：$V-\alpha u$。

显然，当水静止时，这两部分光线的时间差为 $\Delta t=0$；而当水流动时这两部分光线的时间差为

$$\Delta t=\frac{2l}{V-\alpha u}-\frac{2l}{V+\alpha u}=\frac{4l\alpha u}{V^2-\alpha^2u^2}$$

正是由于这个时间差，使观察者看到了干涉条纹的移动。菲左在量出了干涉条纹的移动后算出了以太被带动的牵引系数：

$$\alpha=1-\frac{1}{n^2} \qquad (1\cdot3\cdot1)$$

其中 n 为流体的折射率。

公式（1·3·1）早由菲涅耳在研究以太的理论时发现，而菲左的实验结果则证实了这个公式。

§1.4 迈克耳逊的实验

按前所述，以太可以局部地被运动的物质所带动。而且牵引系数 α 与此运动物质的折射率有关。对于折射率为 1 的媒质其牵引系数显然为零，也就是说不应带动以太。

地球周围的大气的折射率几乎为 1，所以说地球在运动中不应带动以太。故地球对于以太的运动当时人们就以为是地球对于绝对静止参照系的绝对运动。

1881年，迈克耳逊为了测定地球对于以太的绝对运动速度做了一个实验，结果完全否定了不带动以太的假设。

迈克耳逊的实验可用图 4 来说明，图中所示的装置就是通常所说的迈克耳逊干涉仪。

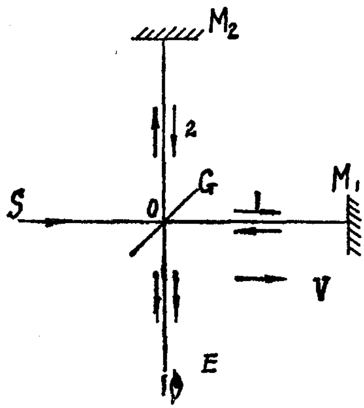


图 4

设 $OM_1 = OM_2 = l$

首先考虑光线 I 在平行于地球运动方向上运动的情况。

假定在静止的以太内光线的传播速度为 C，那么对于光线 I 来说，从薄片 O 至反射镜 M_1 的路程上，根据经典力学的速度相加定理可知，光对此实验装置的速度为 $C-V$；

而当光线 I 从反射镜 M_1 反射到薄片 O 时，根据速度相加定理，其对实验装置的速度应为 $C+V$；

因此当光线 I 从薄片 O 到达反射镜 M_1 再返回到 O 这段路程所需的时间 t_1 为：

$$t_1 = \frac{l}{C-V} + \frac{l}{C+V} = \frac{2l}{C} \quad \frac{1}{1-\frac{V^2}{C^2}}$$

现在来考虑光线 Ⅱ 在垂直于地球运动方向的运动情况。

因为已设在静止的以太中光线速度为 C，现在地球相对于以太以速度 V 运动，所以光线 Ⅱ 相对于实验装置的速度应为 $\sqrt{C^2-V^2}$（参见图 5）。

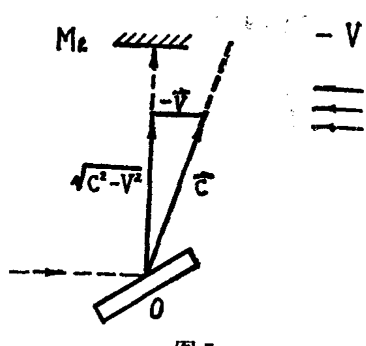


图 5

这样从薄片 O 到达反射镜 M_2 再返回到 O 这段路程中所需的时间为

$$t_2=\frac{2l}{\sqrt{C^2-V^2}}=\frac{2l}{C}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}$$

所以光线Ⅰ和光线Ⅱ所经过的路程的时间差为

$$\Delta t=t_1-t_2=\frac{2l}{C}\left[\frac{1}{1-\frac{V^2}{C^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}\right] \qquad (1\cdot4\cdot1)$$

若把迈克耳逊的实验装置在水平面内转动90°，那么显然此时光线Ⅰ和光线Ⅱ所经过的路程的时间差为：

$$\Delta t'=\frac{2l}{C}\left[\frac{-1}{1-\frac{V^2}{C^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}\right]=-\Delta t \qquad (1\cdot4\cdot2)$$

根据泰勒展开

$$(1-\alpha)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\alpha+\cdots$$

$$(1-\alpha)^{-1}=1+\alpha+\cdots$$

可知

$$\Delta t\doteq\frac{l}{C}\beta^2 \qquad (1\cdot4\cdot3)$$

因此两个时间差的改变量是

$$\frac{2l}{C}\beta^2$$

其中 $\beta=\frac{V}{C}$。

这个改变量决定了仪器转动90°后干涉条纹的移动。当时间的改变量是光振动的一个周期 T 时，就引起一条干涉条纹的移动。一般条纹移动的总数 Δn 决定于下式：

$$\Delta n=\frac{2l\beta^2}{CT}=\frac{2l}{\lambda}\beta^2=\frac{2l}{\lambda}\left(\frac{V}{C}\right)^2 \qquad (1\cdot4\cdot4)$$