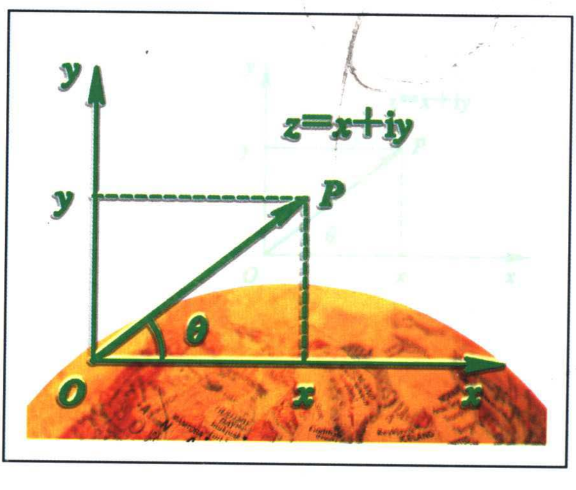
高等学校数学教材系列丛书

复变函数学习辅导

——配合西交大复变函数（第四版）



刘三阳 主编
于 力 任春丽 叶 峰 编著

西安电子科技大学出版社 http://www.xduph.com

高等学校数学教材系列丛书

复变函数学习辅导

——配合西交大复变函数(第四版)

刘三阳 主编

于力 任春丽 叶峰 编

西安电子科技大学出版社

2005

内容简介

复变函数是理工科大学生的一门重要基础课，为了帮助初学者在较短的时间里学好这门课程，我们编写了这本小册子．全书共六章，每章由“基本要求”、“疑难解析”、“范例精解”和“习题选解”四部分组成．书末还附有两套模拟试题及答案．

本书可以作为非数学类专业的理工科大学生学习复变函数课程的辅导资料，也可供教师参考．

图书在版编目(CIP)数据

复变函数学习辅导/刘三阳主编．—西安：西安电子科技大学出版社，2005

配合西交大复变函数(第四版)

ISBN 7-5606-1543-0

Ⅰ．复… Ⅱ．刘… Ⅲ．复变函数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ．O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 069234 号

策　　划　臧延新

责任编辑　王　瑛　臧延新

出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)

电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　编　710071

http://www.xduph.com　　E-mail：xdupfxb@pub.xaonline.com

经　　销　新华书店

印刷单位　陕西光大印务有限责任公司

版　　次　2005 年 7 月第 1 版　2005 年 7 月第 1 次印刷

开　　本　850 毫米×1168 毫米　1/32　印张　5.1875

字　　数　125 千字

印　　数　1～4000 册

定　　价　8.00 元

ISBN 7-5606-1543-0/O·0076

XDUP 1834001-1

前　言

复变函数是高等院校理工科专业普遍开设的一门数学基础课，它是自然科学与工程技术中常用的数学工具，因此学好复变函数课程对于在校大学生是十分重要的．但由于内容多，课时紧，难免使初学者存在这样或那样的困难和问题．为了帮助理工科大学生在较少的课时内学好这门课程，我们编写了这本复变函数学习辅导书．

全书共六章，每章均由四部分组成．第一部分是“基本要求”，这部分内容是从教育部 1995 年颁布的工科类《复变函数课程教学基本要求》中摘录的．这个教学基本要求仅是本科生应当达到的合格要求．第二部分是“疑难解析”，这部分内容是根据编者多年的教学经验，针对以往学生容易误解、容易出错的疑难问题进行剖析，有些问题涉及对基本概念、基本理论的理解，有些则是解题过程中的常见错误．第三部分是“范例精解”，选择若干有代表性的例题，对解题思路、解题方法进行详细分析，启发、诱导学生举一反三，提高解题能力．第四部分是“习题选解”，主要是对西安交通大学编写的《复变函数(第四版)》(高等教育出版社出版)中的部分习题作了较详细的解答．这本教材是获奖的全国优秀教材，被多所院校使用，习题安排合理，难易适度，选解该书习题使这本辅导书与学生所用教材紧密配合．此外，书末附录中

配备了两套“模拟试题”，学生可通过“模拟试题”检查自己对该课程基本内容掌握的程度.

本书的出版得到了西安电子科技大学出版社领导和编辑部的支持，我们在此一并致谢.

由于时间仓促，而且编者的水平有限，错误与不妥之处在所难免，恳请读者批评指正.

编者

2005年4月

目　录

第一章　复数与复变函数

一、基 本 要 求

1. 掌握复数的各种表示法及其运算.
2. 了解区域的概念.
3. 了解复球面与无穷远点.
4. 理解复变函数的概念.
5. 了解复变函数的极限和连续的概念.

二、疑 难 解 析

1. 怎样确定辐角的主值 $\arg z$?

答：一个复数 $z\neq 0$ 的辐角

$$\theta=\mathrm{Arg}z=\mathrm{Arctg}\,\frac{y}{x}$$

是以正实轴为始边，$\overrightarrow{OP}$ 为终边的角（如图 1.1 所示），它是多值的. z 的辐角的主值 $\arg z$ 满足

$$-\pi<\arg z\leqslant\pi$$

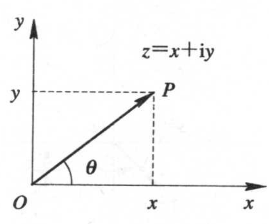


图 1.1

$\arg z$ 用 $\mathrm{Arctg}\,\frac{y}{x}$ 的主值 $\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$ 表示时有如下关系：

$$
\arg z=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} & (z\text{ 在第一、四象限})\\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+\pi & (z\text{ 在第二象限})\\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}-\pi & (z\text{ 在第三象限})\\ \pm\dfrac{\pi}{2} & (z\text{ 在虚轴上})\\ \pi & (z\text{ 在负实轴上})\end{cases}
$$

其中$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}\frac{y}{x}<\frac{\pi}{2}$.

例 求复数$-1-i$与$-1+3i$的辐角主值.

解 注意到点$-1-i$在第三象限(如图1.2(a)所示),从而

$$
\arg(-1-i)=\operatorname{arctg}\frac{-1}{-1}-\pi=\frac{\pi}{4}-\pi=-\frac{3\pi}{4}
$$

由于$-1+3i$在第二象限(如图1.2(b)所示),因此

$$
\arg(-1+3i)=\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{-1}\right)+\pi=\operatorname{arctg}(-3)+\pi
$$

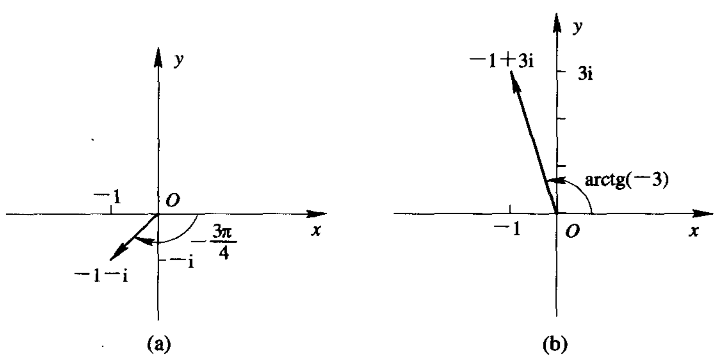


图 1.2

2. 复数可以用向量表示，是否就此可以认为复数的运算与向量的运算是相同的?

答: 不可以. 复数的运算与向量的运算有相同之处，但也有不同之处.

如复数运算与向量运算有相同的加法运算和数乘运算. 但复数运算有乘、除、乘幂和方根，向量则没有. 向量运算有数量积、向量积和混合积，复数却没有.

3. 复平面上的圆周方程有哪几种形式?

答: 常用的形式有三种.

(1) $|z-z_0|=r$，表示以 z_0 为圆心，r 为半径的圆周.

(2) $z\bar{z}+\alpha\bar{z}+\bar{\alpha}z+c=0$(其中 α 为复常数，c 为实常数).

(3) $z=z_0+re^{i\theta}(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$，表示以 z_0 为圆心，r 为半径的圆周.

由 $|z-z_0|=r\Rightarrow|z-z_0|^2=r^2\Rightarrow(z-z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0)=r^2$ 化为 $z\bar{z}-\bar{z}_0z-z_0\bar{z}-r^2+z_0\bar{z}_0=0$，即有(2)的形式.

又由 $|z-z_0|=r$ 得 $z-z_0=re^{i\theta}\Rightarrow z=z_0+re^{i\theta}$，即有(3)的形式.

4. 函数、映射和变换是否是同一概念?

答: 没有本质的区别，是同一概念. 函数、映射和变换强调的都是变量(或集合)之间的对应关系. 只是函数往往是就数的对应而言，映射或变换往往是就点的对应而言. 因此，在复变函数中我们不再区分函数、映射和变换，而把它们都看作 z 平面上集合 G 与 w 平面上集合 G^* 之间的一种对应.

5. 复变函数的极限概念与一元实变函数的极限概念有什么区别?

答: 两者在叙述方法和形式上是相似的，但含意有很大的不同.

在讨论极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 时，由于 x 仅在 x 轴上取值，因此

$x \to x_0$ 的任意方向，实际上就是两个方向（在 x_0 的邻域内从 x_0 的左方与右方趋近于 x_0）．而在讨论 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ 时，由于 z 在复平面上取值，因此 $z \to z_0$ 不仅可以从 z_0 的左右两个方向趋于 z_0，还可以从 z_0 的四面八方以任何方式趋于 z_0，而对于 $z \to z_0$ 的任何方式，都要求 $f(z)$ 趋于同一值 A．由此看出，复变函数的极限比一元实变函数的极限的要求要苛刻得多．这也正是我们在后面将要看到的复变函数有不少美妙结果之原因所在．

三、范例精解

例 1 求下列复数的模与辐角．

1) $z=\dfrac{(\sqrt{3}+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(\sqrt{3}-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}$；　2) $z=\dfrac{1-\mathrm{i}\ \mathrm{tg}x}{1+\mathrm{i}\ \mathrm{tg}x}$　$\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$．

分析 通常的方法是先将 z 化成代数形式 $z=x+\mathrm{i}y$，然后利用 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ 求模，利用 $\mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}$ 及 z 所在象限求出辐角主值．本题中我们注意到 z 的分子与分母互为共轭复数，因此，容易直接求出 $|z|$．

解 1) 方法一：将 z 的分子、分母同乘以 $(\sqrt{3}+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})$ 得

$$z=\frac{(\sqrt{3}+\mathrm{i})^2}{|\sqrt{3}+\mathrm{i}|^2}\cdot\frac{(1-\mathrm{i})^2}{|1+\mathrm{i}|^2}$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)(-\mathrm{i})=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$$

所以

$$|z|=1,\ \arg z=\mathrm{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\pi}{6}$$

$$\mathrm{Arg}z=-\frac{\pi}{6}+2k\pi\qquad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

方法二：利用模及辐角的运算性质，我们有

$$|z|=\frac{\left|\sqrt{3}+\mathrm{i}\right|\ |1-\mathrm{i}|}{\left|\sqrt{3}-\mathrm{i}\right|\ |1+\mathrm{i}|}=1$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Arg}z&=\operatorname{Arg}\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}+\operatorname{Arg}\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\\&=\left(\frac{\pi}{3}+2m\pi\right)+\left(-\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\\&=2(m+n)\pi-\frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

其中 m，n 为整数.

2）为了求 z 的辐角，先写出 z 的代数形式

$$\begin{aligned}z&=\frac{1-\mathrm{i}\ \mathrm{tg}x}{1+\mathrm{i}\ \mathrm{tg}x}=\frac{(1-\mathrm{i}\ \mathrm{tg}x)^2}{(1+\mathrm{i}\ \mathrm{tg}x)(1-\mathrm{i}\ \mathrm{tg}x)}\\&=\frac{1-\mathrm{tg}^2x-2\mathrm{i}\ \mathrm{tg}x}{1+\mathrm{tg}^2x}\\&=\frac{\dfrac{\cos^2x-\sin^2x}{\cos^2x}-\dfrac{2\mathrm{i}\sin x}{\cos x}}{\dfrac{1}{\cos^2x}}=\cos2x-\mathrm{i}\sin2x\\&=\cos(-2x)+\mathrm{i}\sin(-2x)\end{aligned}$$

显然有 $|z|=1$，$\operatorname{Arg}z=-2x+2k\pi$ ($k=0$，±1，±2，$\cdots$).

例 2　将复数 $z=1+\sin1+\mathrm{i}\cos1$ 化为三角表示式和指数表示式.

分析　先将 z 改写成代数形式后求出 $|z|$ 和 $\arg z$.

解　由于

$$\begin{aligned}|z|^2&=(1+\sin1)^2+\cos^21=2(1+\sin1)\\&=2\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\right]=4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

从而

$$|z| = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) > 0$$

又由

$$\frac{\cos 1}{1+\sin 1} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)}$$

$$= \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)$$

得

$$\arg z = \operatorname{arctg}\frac{\cos 1}{1+\sin 1} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

因为 $1+\sin 1>0$，$\cos 1>0$，所以 z 在第一象限，于是 z 的三角表示式为

$$z = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\right]$$

z 的指数表示式为

$$z = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)}$$

例 3 证明

$$|1-\bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)$$

分析 这是一个有关复数模的恒等式，所以可以利用公式 $|z|^2 = z\bar{z}$ 来证明.

证 $|1-\bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2$

$$= (1-\bar{z}_1 z_2)\overline{(1-\bar{z}_1 z_2)} - (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)}$$

$$= (1-\bar{z}_1 z_2)(1-z_1\bar{z}_2) - (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)$$

$$= 1 - \bar{z}_1 z_2 - z_1\bar{z}_2 + |z_1|^2|z_2|^2$$

$$-(|z_1|^2-\bar{z}_1z_2-z_1\bar{z}_2+|z_2|^2)$$
$$=(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)$$

注 如果将 z 写成 $x+\mathrm{i}y$ 代入后化简会很繁琐.

例 4 解方程 $(1+z)^5=(1-z)^5$.

解 显然方程的根 $z\neq1$，所以原方程可写成

$$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^5=1$$

令
$$w=\frac{1+z}{1-z} \tag{1}$$
则
$$w^5=1 \tag{2}$$

因为 $1=\cos0+\mathrm{i}\sin0$，所以

$$\sqrt[5]{1}=\cos\frac{2k\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{5}\qquad(k=0,1,2,3,4)$$

方程(2)的根为 $w=1$，$\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{5}\mathrm{i}}$，$\mathrm{e}^{\frac{4\pi}{5}\mathrm{i}}$，$\mathrm{e}^{\frac{6\pi}{5}\mathrm{i}}$，$\mathrm{e}^{\frac{8\pi}{5}\mathrm{i}}$. 即 $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$，其中 $\alpha=0$，$\frac{2\pi}{5}$，$\frac{4\pi}{5}$，$\frac{6\pi}{5}$，$\frac{8\pi}{5}$. 但由(1)得

$$z=\frac{w-1}{w+1}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}+1}=\frac{\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha-1}{\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha+1}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\left(-\sin\frac{\alpha}{2}+\mathrm{i}\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\alpha}{2}\right)}=\mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$$

故原方程的根为

$$z=\mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$$

其中 $\alpha=0$，$\frac{2\pi}{5}$，$\frac{4\pi}{5}$，$\frac{6\pi}{5}$，$\frac{8\pi}{5}$.

例 5 写出圆周方程 $x^2+2x+y^2=1$ 的复数形式.

分析 平面上特殊曲线方程化成复数形式的一般方法是：从 (x, y)平面上的已给曲线方程 $F(x, y)=0$ 出发，经过变量代换

可得其复数方程为

$$F\left(\frac{1}{2}(z+\bar{z}),\ \frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})\right)=0$$

解 令 $x=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$，$y=\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})$，代入得

$$\frac{1}{4}(z+\bar{z})^2+(z+\bar{z})-\frac{1}{4}(z-\bar{z})^2=1$$

化简得所给圆周的复数方程为

$$z\bar{z}+z+\bar{z}-1=0$$

例 6 描出下列不等式所确定的区域.

1) $|z-\mathrm{i}|+|z+\mathrm{i}|\leqslant 2\sqrt{2}$；

2) $0<\arg\frac{z-1}{z+1}<\frac{\pi}{6}$.

分析 先看能否由不等式直接找出 z 所构成的点集，若不能，则可用代数方法令 $z=x+\mathrm{i}y$，将不等式转化成 x，y 间的关系后再确定.

解 1) 在几何上不难看出，该不等式表示到点 i 及 $-\mathrm{i}$ 距离之和不超过 $2\sqrt{2}$的点 z 所构成的点集，也就是椭圆 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$ 及其内部，是有界闭区域(如图 1.3(a)所示).

2) 令 $z=x+\mathrm{i}y$，则

$$\frac{z-1}{z+1}=\frac{x^2+y^2-1+2y\mathrm{i}}{(x+1)^2+y^2}$$

因为 $0<\arg\frac{z-1}{z+1}<\frac{\pi}{6}$，所以有 $x^2+y^2-1>0$，$2y>0$，以及

$$0<\frac{2y}{x^2+y^2-1}<\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

即 $x^2+y^2>1$，$y>0$ 以及 $x^2+(y-\sqrt{3})^2>4$.

故所求区域是上半平面内圆周 $x^2+(y-\sqrt{3})^2=4$ 的外部，是

无界单连通区域(如图 1.3(b)所示).

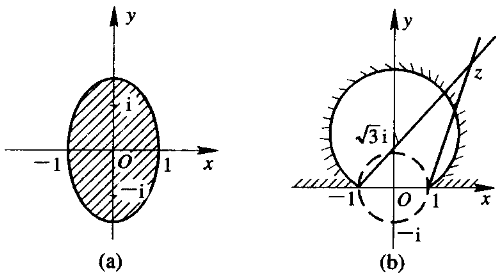


图 1.3

例 7 求满足关系式 $\cos\theta<r<3\cos\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$的点 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$的集合 G. 若 G 为一区域,则指明它是单连通区域还是多连通区域.

解 因为 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$, $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$, 所以

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\ \cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

于是关系式 $\cos\theta<r<3\cos\theta$ 即为

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}<\sqrt{x^2+y^2}<\frac{3x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

或

$$x<x^2+y^2<3x$$

等价地有

$$\begin{cases}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2<\frac{9}{4}\\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2>\frac{1}{4}\end{cases}$$

故所求点集 G 为图 1.4 中阴影部分,它是一个单连通区域.

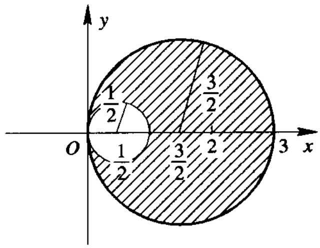


图 1.4

例 8 函数 $w=z^2$ 将集合 $G=\{z \mid 1<\mathrm{Re}(z)<2\}$ 映射成什么区域?

分析 求集合 G 在映射下的像集合 G^*，通常是将 G 的边界曲线方程代入到映射中求出像曲线，然后再确定 G^*. 本题中 G 是 z 平面上的带形区域，边界是直线 $x=1$ 与 $x=2$(如图 1.5(a)所示)，只要求出它们的像曲线，G^* 即可确定.

解 令 $z=x+\mathrm{i}y$, $w=u+\mathrm{i}v$, $w=z^2$，对应于

$$u=x^2-y^2,\ v=2xy$$

将边界 $x=1$ 代入上式得其像曲线的参数方程为

$$u=1-y^2,\ v=2y \qquad (-\infty<y<+\infty)$$

消去参数 y 得抛物线方程:

$$u=1-\frac{v^2}{4}$$

让 x 从 1 连续地变到 2，直线 $x=1$ 就扫出带形 $1<\mathrm{Re}(z)<2$ 及其边界直线 $x=1$ 与 $x=2$，而抛物线 $u=1-\frac{v^2}{4}$ 相应地扫出如图 1.5(b)中的阴影部分，它的边界是抛物线:

$$u=1-\frac{v^2}{4} \quad 与 \quad u=4-\frac{v^2}{16}$$