中等农业学校試用教科书

数　学

下　册

江苏省句容农业学校主编

农牧类各专业用

农　业　出　版　社

中等农业学校試用教科書

数　　学

下　冊

江苏省句容农業学校 主編

农牧类各專业用

农业出版社

主　編　江苏省句容农業学校

編著者　江苏省句容农業学校　章景星

陕西省安康农業学校　郭尔康

安徽省鳳阳农業学校　李碩德

安徽省宿县农業学校　張公愚

中等农業学校試用教科書

数　　学

下　册

江苏省句容农業学校主編

农　業　出　版　社　出　版

北京西总布胡同七号

（北京市書刊出版業营業許可証出字第 106 号）

新华書店科技發行所發行　　各地新华書店經售

北京市印刷一厂印刷装訂

統一書号　13144.103

1961 年 7 月北京制型

1961 年 7 月初版

1961 年 7 月北京第一次印刷

印数　1—31,400 册

开本　787×1092 毫米　三十二分之一

字数　182 千字

印張　六又八分之七

定价　(5) 四角九分

下册目录

第十二章　任意角三角函数、三角函数的周期性

§143　任意大小的角　在初中几何里，我們曾把角规定为从一点引出的两条射綫所組成的几何图形(图 145)。但是我們在实际生活中，常常遇到时針的旋轉，齿輪的轉动，飞机螺旋桨的旋轉等，也使我們形成角的概念。这样，就使初中里关于角的定义不可能表示这些事例。所以，我們也可以把角看成是一条射綫圍繞它的端点所作的旋轉。

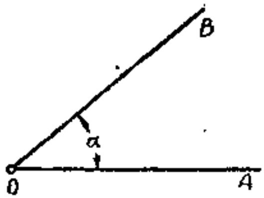

图　145

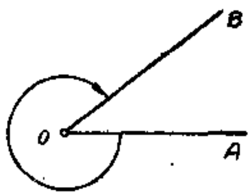

图　146

例如：射綫 OA 圍繞它的端点 O 从开始位置 OA 旋轉到終止的位置 OB，就組成了角 α(图 146)。端点 O 叫做角 α 的頂点，射綫旋轉的开始位置 OA 叫做角 α 的**始边**，而射綫旋轉的終止位置 OB 叫做角 α 的**終边**。

射綫旋轉时，可以有两个相反的方向。如果把依一个方向旋轉所組成的角叫做正角，那末，依相反方向旋轉所組成的角就叫做負角，通常规定依逆时針方向旋轉所組成的角为**正角**，依順时針方向旋轉所組成的角为**負角**。

当射綫依逆时針方向旋轉一周的过程中，由于終边可以在各种不同的位置，就組成 $0°$ 到 $360°$ 的一切角。如果再依原方向繼續旋轉，就組成大于 $360°$ 的角。如果射綫依順时針方向旋轉一周

后继續旋轉，就組成小于 $-360°$ 的角。如果射綫沒有作任何旋轉，仍留在开始位置，那末就說，射綫旋轉的角等于零度。这样，我們就可以得到任意大小的角。

当射綫由始边按任何方向第一次到达已知角 α 的終边以后，不問从那一方向，繼續旋轉任何整周，終边仍然在同一位置；因此，始边和終边的同一相关位置，可以是无限个旋轉的集合；换句話說，无限个不同的角可以有共同的边和頂点，也就是它們的几何图形完全一样。图 147 中指出四个不同的角 I、II、III 和 IV，它們有共同的始边 OA、終边 OB 和頂点 O，因为旋轉一整周是 $360°$，所以如果 k 为任何整数，那末角 α 和角 $360°k+\alpha$ 有共同的始边和終边；也就是說，和角 α 有共同始边和終边的角的一般形式为

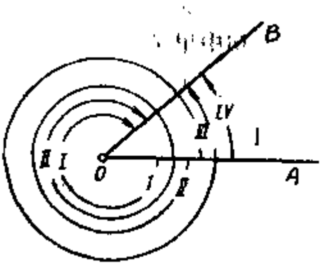

图　147

$360°k+\alpha$（k 为任何整数）。

§144　角的弧度法　我們在过去常常采用“度”作为单位来度量角的大小，这种度量方法，在物理或其他科学技术問題中会感到不够方便，因此，下面我們来介紹另一种度量角的大小的方法。

从 §140 的例 3 中，我們知道，对于一个已知为 $n°$ 的圓心角 α 它所对的弧长 l（也就是含有 $n°$ 的弧长），可由下面的式子进行計算，即

$$l=\frac{\pi Rn}{180}.$$

由这个算式，可以求得这个圓心角所对的弧长与半徑的比为

$$\frac{l}{R}=\frac{\pi n}{180}.$$

如果圓心角 α 的大小不变（仍为 $n°$），我們取不同的半徑 R_1，

那末 α 所对的弧长相应的是 l_1，这样应有

$$l_1=\frac{\pi R_1 n}{180}.$$

显然，这时弧长与半徑之比仍为

$$\frac{l_1}{R_1}=\frac{\pi n}{180}.$$

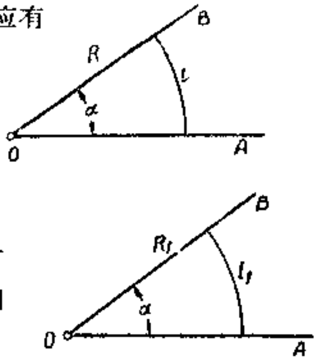

图 148

这就説明了，在圓心角相同的时候，圓心角所对的弧长和半徑的比相同，只有在圓心角的大小改变的时候，这个比才改变。

由此可知，角 α 所对的弧长与半徑之比仅决定于角 α 的大小，而与半徑的长短无关。

根据上面的道理，所以我們可以**用圓心角所对的弧长 l 与半徑 R 的比 $\left(\frac{l}{R}\right)$ 来表示角的大小**，用这个比值来表示角的大小的方法，叫做弧度法。当圓心角所对的弧长与半徑相等时，那末比值 $\frac{l}{R}$ 就等于 1，我們取这样的角作为用弧度法度量角的单位，这个单位叫做弧度。所以 1 弧度的角就是弧长等于半徑的圓心角。

如果用 α 表示以弧度为单位的角，那末它的量数有下面的式子：

$$\alpha=\frac{l}{R}.$$

§145 度与弧度的相互换算 为了明确度与弧度之間的相互关系，下面我們来説明度与弧度的换算方法。

我們知道 1 周角为 $360°$，一个圓周长为 $2\pi R$，所以 1 周角含有

$$\frac{2\pi R}{R}=2\pi(\text{弧度})。$$

由此可知

$$360^\circ=2\pi\text{弧度。}$$

因此推出度与弧度的换算关系表如下：

度	0°	15°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
弧　度	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

这个表中的对应值以后常常要用到，所以必须牢固地記忆。

我們由 $360^\circ=2\pi$ 这个关系式，可以推得 1°所含的弧度数和 1 弧度所含的度数。

因为　　$360^\circ=2\pi$ 弧度，亦即 $180^\circ=\pi$ 弧度。

所以　　$1^\circ=\frac{\pi}{180}$弧度≈ 0.017453弧度；

$$1\text{弧度}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ\approx 57^\circ17'44.8'',$$

或　　1 弧度 $\approx 57.29^\circ$。

因此，要把若干度化成弧度，应当用已知的度数去乘$\frac{\pi}{180}$弧度（或者 0.017453 弧度）；要把若干弧度化成度，应当用已知的弧度数去乘$\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$，(者$57^\circ17'44.8''$)。

例 1：把 $67^\circ30'$ 化成弧度。

解：因为　　$67^\circ30'=67\frac{1}{2}$度，

所以
$$67^\circ30'=\frac{\pi}{180}\text{弧度}\times 67\frac{1}{2}$$
$$=\frac{135\pi}{360}\text{弧度}$$
$$=\frac{3\pi}{8}\text{弧度。}$$

如果需要求得这个弧度数的近似值，例如精确到 0.001 的近

似值，我們可以这样来做：

$$67°30' \approx 0.01745\text{弧度} \times 67.5$$
$$\approx 1.178\text{弧度}。$$

例 2：把$\frac{3\pi}{5}$弧度化成度。

解：$$\frac{3\pi}{5}\text{弧度} = \frac{180°}{\pi} \times \frac{3\pi}{5} = 108°.$$

为了方便起見，我們規定：用弧度表示角的大小时，可以略去“弧度”兩字。也就是說，α 等于 2、$\frac{1}{2}$等是分別表示 α 等于 2 弧度，$\frac{1}{2}$弧度等。

度与弧度的換算，在伯拉基斯的“四位数学用表”中列有相互換算表。它的查法与查三角函数表相仿，下面我們通过例子来熟悉这个表的使用法。

例 1：化 71°21′ 为弧度。

解：由表XII可以直接查得

$$71°21' \approx 1.2462。$$

例 2：化 23°20′ 为弧度。

解：查表得
$$\begin{array}{r@{\;\approx\;}l} 23°18' & 0.4067 \\ +2' & +\quad 6 \\ \hline 23°20' & 0.4073 \end{array}$$

例 3：化 1.0862 弧度为度。

解：查表得
$$\begin{array}{r@{\;\approx\;}l} 1.0856 & 62°12' \\ +\quad 6 & +\quad 2' \\ \hline 1.0862 & 62°14' \end{array}$$

如把圓心角的度数利用度与弧度的換算法化成弧度，就可用式子

$$\alpha = \frac{l}{R}$$

根据R的長度求得圓心角所对的弧l的長度；实际上，上面的式子也

可写成

$$l = R\alpha$$

的形式，这就是說，**圓弧的长就等于它所对的中心角的弧度数乘以半徑的积。**

例 1：半徑为 2.2 米的車輪旋轉 30°30′的角，問車輪上任一点所經过的路程是多少？（精确到 0.05 米）。

解：查表得 30°30′≈0.5323 弧度，根据公式，得

$$l = R\alpha \approx 2.2 \times 0.532 \approx 1.2(\text{米})。$$

答：經过的路程为 1.2 米。

例 2：設飞輪的直徑是 1.2 米，每分鐘旋轉 300 次，

(1) 求飞輪每秒鐘的角速度 ω(即每秒鐘旋轉的弧度数)；

(2) 求輪上一点的速度 v。

解：(1) 因为飞輪每秒鐘旋轉的弧度数叫角速度，因此

$$\omega = \frac{2\pi \times 300}{60} = 10\pi(\text{弧度/秒})。$$

(2) 飞輪上某一点的速度，就是綫速度，所以

$$v = \frac{2\pi \times 0.6 \times 300}{60} = 6\pi(\text{米/秒})。$$

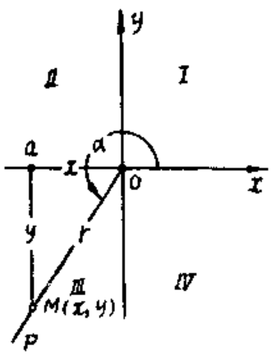

图　149

§146　任意角三角函数的定义　在第七章里，三角函数是由銳角所构成的直角三角形的三边的比来定义的，这样的定义不能适用于任意角，为了进一步研究三角函数的性質和解决解三角形的問題，我們下面来研究任意大小角的三角函数。

取平面上直角坐标系的原点 O 为頂点，使射綫圍繞 O 点从正半軸 OX 起旋轉到 OP 而形成从 **OX 到 OP 的任意角 α**(图 149)，那末除掉当 α 的值等于 $180°k$ 和 $180°k+90°$ 以外，角 α 的終边

OP 必定在每一象限內,我們按終边 OP 在第几象限, 就說角 α 終止在第几象限,或者說角 α 是第几象限的角,图 149 中角 α 的終边 OP 終止在第三象限,我們說角 α 是第三象限的角。

在角 α 的終边 OP 上取不和 O 点重合的任意点 M, 設这点的坐标是 $M(x, y)$, M 点到原点 O 的距离为 r,这样, x、y 和 r 所組成的比,有下面的定理。

定理 对于已知角 α, 比值 $\frac{y}{r}$、$\frac{x}{r}$、$\frac{y}{x}$、$\frac{x}{y}$、$\frac{r}{x}$ 和 $\frac{r}{y}$ 仅决定于角 α 的大小,与所取 M 点的位置无关。

証明 在角 α (图 150) 的終边上再任取不和 O 点重合的一点 $M'(x', y')$,并設 $OM'=r'$,从 M 和 M' 分别向 OX 軸引垂綫 MM_1 和 $M'M'_1$,得两相似三角形 OMM_1 和 $OM'M'_1$,所以

$$\frac{|y|}{r}=\frac{|y'|}{r'}.$$

但 M 和 M' 在同一象限內, y 和 y' 是符号相同的数, 所以証得

$$\frac{y}{r}=\frac{y'}{r'}.$$

同理可以証明

$$\frac{x}{r}=\frac{x'}{r'},\quad \frac{y}{x}=\frac{y'}{x'},\quad \frac{x}{y}=\frac{x'}{y'},$$

$$\frac{r}{x}=\frac{r'}{x'},\quad \frac{r}{y}=\frac{r'}{y'}.$$

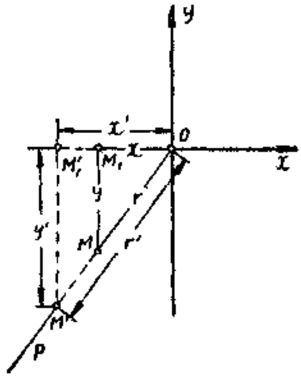

图 150

从上面定理的証明, 說明了对于每一个已知角 α 都有完全确定的比值 $\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$、$\frac{y}{x}$、$\frac{x}{y}$、$\frac{r}{x}$ 和 $\frac{x}{r}$ (比的后項不能是零)和它对应,所以这些比值是角 α 的函数,这些函数叫做三角函数。

1. 角 α 的[1]終边上任意点的縱坐标 y 和原点到这点的距离 r 的比，叫做角 α 的正弦。

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}.$$

2. 角 α 的終边上任意点的横坐标 x 和原点到这点的距离 r 的比，叫做角 α 的余弦。

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}.$$

3. 角 α 的終边上任意点的縱坐标 y 和横坐标 x 的比，叫做角 α 的正切。

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}.$$

4. 角 α 的終边上任意点的横坐标 x 和縱坐标 y 的比，叫做角 α 的余切。

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}.$$

当角 α 为銳角时，上面的定义和第七章里所規定的三角函数的定义是一致的，因此新的三角函数的定义，是銳角三角函数定义的推广，它适用于任意大小的角。

除了上述的四个三角函数外，还有下面两个三角函数：

$$\sec\alpha=\frac{r}{x}，\text{叫做角 }\alpha\text{ 的正割。}$$

$$\csc\alpha=\frac{r}{y}，\text{叫做角 }\alpha\text{ 的余割。}$$

因为函数 $\sec\alpha$ 和 $\csc\alpha$ 应用較少，所以我們以后主要是研究前四个三角函数。

三角函数的名称正弦、余弦、正切、余切、正割、余割，都是我国

① 这里和以后講到的角 α 都是在直角坐标系中，从 OX 軸到終边 OP 的角。

十六世紀已有的名称，在公元三世紀，我国数学家刘徽計算以1为半徑的圓内接正六边形，正十二边形等的边长，以及公元十三世紀赵有欽計算圓内接正方形的边长，实际上已經求得了某些特殊角的正弦值。

§147 三角函数的符号 由于各象限内点的坐标的符号有正有負，而点到原点間的距离总看做是正的，因此根据三角函数的定义，三角函数的值也应該有正有負，它們的符号要看角的終边在哪一个象限而定。

对于正弦和余割来說，它的符号应与角的終边上的点的縱坐标的符号相同，因此，第一和第二象限的角的正弦和余割是正的，而第三和第四象限的角的正弦和余割是負的。

对于余弦和正割来說，它的符号应与角的終边上的点的横坐标的符号相同，因此，第一和第四象限的角的余弦和正割是正的，而第二和第三象限的角的余弦和正割是負的。

对于正切和余切来說，它的符号应取决于角的終边上的縱坐标和横坐标的符号的相同或相反，因此，第一和第三象限的角的正切和余切是正的，而第二和第四象限的角的正切和余切是負的。

現在將各三角函数的符号列表如下：

符号 函数 / 角所在的象限	$\sin\alpha$ $\csc\alpha$	$\cos\alpha$ $\sec\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$ $\mathrm{ctg}\alpha$
I	+	+	+
II	+	−	−
III	−	−	+
IV	−	+	−

§148 三角函数值在单位圓上的表示法 根据任意角三角函数的定义，我們知道，对于一个已知角的三角函数值的大小，和在

这个角的終边上所取的点的位置无关，为了便于对三角函数的性質的研究，我們取和原点距离为单位长度的点。在直角坐标系中，以原点为圓心，作出等于单位长度的綫段为半徑的圓，这个圓叫做单位圓。

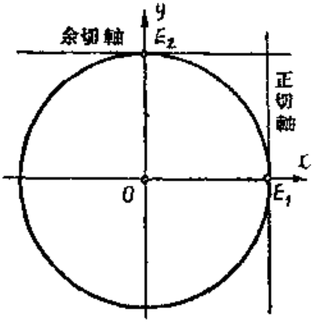

图　151

单位圓(图 151) 与正半軸 OX 和 OY 相交的点 E_1 和 E_2 叫单位点，E_1 的坐标是(1,0)，E_2 的坐标是(0,1)。

在单位点 E_1 和单位圓相切的直綫叫**正切軸**，正切軸上一切点的横坐标都等于 1；在单位点 E_2 和单位圓相切的直綫叫**余切軸**，余切軸上一切点的縱坐标都等于 1。

利用单位圓、正切軸和余切軸，可以只用某些特殊点的縱坐标或横坐标，来表示已知角的三角函数值，并且能够清楚的說明它們的数値范圍，現在分别研究如下：

1．角 α 的正弦和余弦在单位圓上的表示法。

設 $M(x,y)$ 是角 α 終边 OP 和单位圓的交点(图 152)，因为 M 在单位圓上，所以不論角 α 終止在哪一象限，都可以得

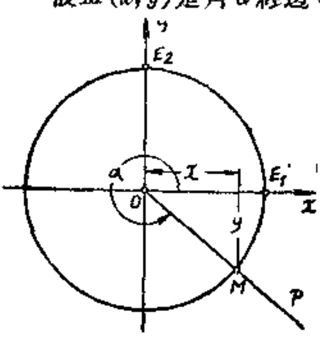

图　152

$$OM = r = 1。$$

由定义可得

$$\sin\alpha = \frac{y}{1} = y,$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{1} = x.$$

也就是說，角 α 的正弦等于它的終边和单位圓交点的縱坐标，而它的余弦等于这点的横坐标。

很明显，无論角 α 終止在那一象限，它的終边总能和单位圓相

交，而且交点的坐标可以是 -1 到 $+1$ 間并包括这两个值在内的一切数值，而且也只能是这样的数值。所以函数 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的值，对 α 的任何值都对应着确定的值而且可以是 -1 到 $+1$ 間，并包括这两个值在内的一切实数。

2. **角 α 的正切和余切在单位圓上的表示法**

設 $M(x, y)$ 是角 α 的終边 OP 或 OP 的反向延綫和正切軸的交点，当角 α 終止在第一和第四象限的时候(图 153)，由定义可得

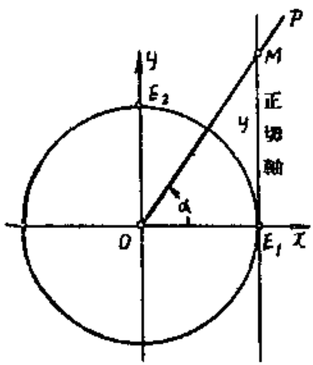

图 153

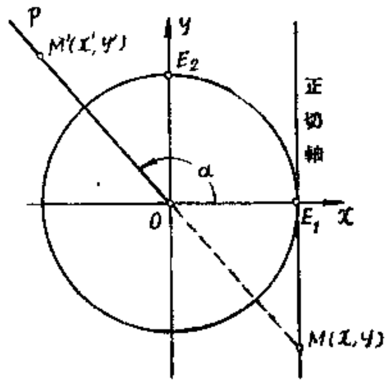

图 154

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}=\frac{y}{1}=y.$$

如果角 α 終止在第二和第三象限(图 154)，可在角的終边上取关于原点和 M 点对称的点 $M'(x', y')$，因为

$$x'=-x=-1,\ \ y'=-y,$$

所以
$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y'}{x'}=\frac{-y}{-1}=y.$$

也就是說，角 α 的正切，等于它的終边或終边的反向延綫和正切軸交点的縱坐标。

設 $M(x, y)$ 是角 α 的終边 OP 或 OP 的反向延綫和余切軸的

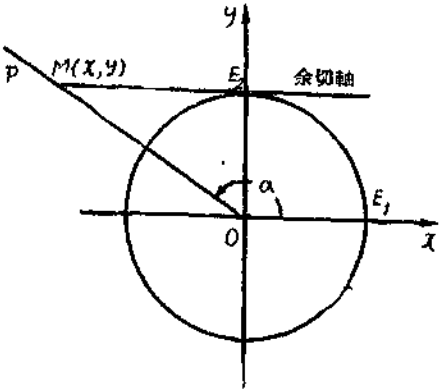

图　155

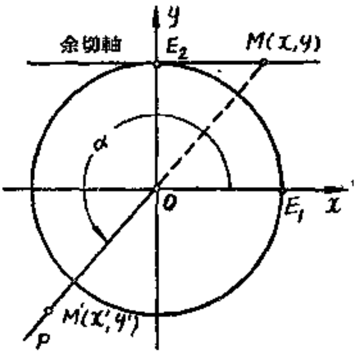

图　156

交点(图 155, 156)，同样可得

$$\operatorname{ctg}\alpha=x.$$

也就是説，角 α 的余切，等于它的終边或終边的反向延綫和余切軸交点的横坐标。

很明显，只有角 α 等于

$180°k+90°$ 或 $k\pi+\frac{\pi}{2}$(k为任何整数)时，角的終边平行于正切軸，除此以外，角 α 的終边或它的反向延綫总可以和正切軸相交，而且交点的縱坐标可以是一切实数值；另外，只有当角 α 等于$180°k$ 或$k\pi$(k为任何整数)时，角的終边平行于余切軸，除此以外，角 α 的終边或它的反向延綫总可以和余切軸相交而且交点的横坐标可以是一切实数值。

由此可知，函数 $\operatorname{tg}\alpha$ 除了当角等于 $180°k+90°$外，对于角 α 的其他任何值，都有确定的值；函数 $\operatorname{ctg}\alpha$ 除了当角等于 $180°k$ 外，对于角 α 的其他任何值，都有确定的值。函数 $\operatorname{tg}\alpha$ 和 $\operatorname{ctg}\alpha$ 的值可以是一切实数。

§149　0°、90°、180°、270° 角的三角函数值　根据上节的討論，我們可以利用三角函数值在单位圓上的表示法，求得特殊角的