

中等农业学校試用教科書

數 學

下 冊

江苏省句容农业学校主編

农牧类各专业用

农 业 出 版 社

中等农业学校試用教科書

数 学

下 冊

江苏省句容農業學校 主編

农 牧 类 各 專 业 用

农 业 出 版 社

主編 江蘇省句容農業學校

編著者 江蘇省句容農業學校 章景星

陝西省安康農業學校 郭爾康

安徽省鳳陽農業學校 李碩德

安徽省宿縣農業學校 張公愚

中等農業學校試用教科書

數學

下冊

江蘇省句容農業學校主編

農業出版社出版

北京市復興路七號

(北京市書刊出版發賣許可證字第106號)

新華書店科技發行所發行 各地新華書店經售

北京市印刷一廠印刷裝訂

統一書號 18144.103

1961年7月北京制型

1961年7月初版

1961年7月北京第一次印刷

印数 1—31,400册

开本 787×1092毫米

三十二分之一

162 千字

印张 六又八分之七

定价 .5) 四角九分

下冊目錄

第十二章 任意角三角函数、三角函数的周期性.....	327
§ 143. 任意大小的角(327) § 144. 角的弧度法(328) § 145. 度与弧度的相互换算(329) § 146. 任意角三角函数的定义(332) § 147. 三角函数的符号(335) § 148. 三角函数值在单位圆上的表示法(335) § 149. $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ 角的三角函数值(338) § 150. 负角的三角函数(341) § 151. 由角的已知三角函数值作角(342) § 152. 三角函数的周期性(345) § 153 同角三角函数間的基本关系(346) § 154. 根据角的一个三角函数值计算其他各三角函数值(349) 習題二十八(362)	
第十三章 加法定理和它们的推論、三角函数的圖象.....	356
§ 155. 余弦的加法定理(356) § 156. 正弦的加法定理(358) § 157. 正切的加法定理(359) § 158. 二倍角和半角的正弦余弦和正切(361) § 159. 简化公式(363) § 160. 由角的已知三角函数值求角(367) § 161. 三角函数的圖象(369) 習題二十九(376)	
第十四章 斜三角形的解法	380
一、三角函数对数表和用法	380
§ 162. 三角函数对数表(380) § 163. 利用三角函数对数表进行計算(382) 習題三十(384)	
二、斜三角形的解法	385
§ 164. 正弦定理(385) § 165. 余弦定理(387) § 166. 斜三角形的解法(389) § 167. 利用三角形解法来解的应用問題 (393) 実習作業內容(397) 習題三十一(398)	
第十五章 多面体和旋成体	403
一、空間图形的基本概念	403
§ 168. 空間图形在平面內的表示法(403) § 169. 平面的确定(409) § 170. 直線与直線的相关位置(410) § 171. 直線与平面的相关位置(411) § 172. 有关平面的垂綫和斜綫的性質(414) § 173. 平面与平面間的相关位置(418) § 174. 多面角(423) 習題三十二(424)	
二、多面体	427
§ 175. 多面体的概念(427) § 176. 棱柱(428) § 177. 棱柱的全	

面积(430) § 178. 关于体积的基本概念(431)	§ 179. 長方体的体积(431)
§ 180. 祖暅原理(432)	§ 181. 橢柱的体积(432)
棱錐(435) § 183. 棱錐中平行于底面的截面的性质(436)	§ 184. 棱台(438) § 185. 正棱錐和正棱台的全面积(440)
§ 187. 棱錐的体积(443)	§ 188. 棱台的体积(445) 課題三十三(449)
三、旋成体 452	
§ 189. 旋成体(452)	§ 190. 圆柱(452)
圆柱的侧面积和全面积(453)	§ 191. 圆锥的侧面积和全面积(456)
§ 192. 圆柱的体积(454)	§ 193. 圆錐(455)
圆锥的侧面积和全面积(456)	§ 195. 圆錐的体积(457)
圆台(458) § 197. 圆台的侧面积和全面积(459)	§ 196. 圆台(458) § 197. 圆台的侧面积和全面积(459)
§ 199. 球(462)	§ 198. 圆台的体积(460)
§ 200. 关于旋成体表面积的引理(466)	§ 201. 球的体积(467)
§ 202. 球缺和球台的体积(468) 实習作業(470)	課題三十四(470)
第十六章 排列、組合和概率的初步知識 475	
一、排列、組合 475	
§ 203. 排列(475)	§ 204. 組合(480)
課題三十五(488)	§ 205. 重复排列(486)
二、概率的概念及性質 490	
§ 206. 概率的意义(490)	§ 207. 概率的加法定理(492)
六(496)	課題三十六(496)
第十七章 線性規劃 497	
§ 208. 線性規劃問題的意义(497)	
一、圖上作業法 501	
§ 209. 不成圓的圖上作業法(501)	§ 210. 成圈的圖上作業法(505)
§ 211. 麦場設置問題(513)	課題三十七(515)
二、表上作業法 518	
§ 212. 初始方案的編制(519)	§ 213. 最好方案的判定(529)
方案的調整(535)	§ 214. 表上作業法的一般步驟(537)
八(538)	課題三十八(538)

第十二章 任意角三角函数、三角函数的周期性

§ 143 任意大小的角 在初中几何里，我們曾把角規定為從一點引出的兩條射線所組成的幾何圖形（圖 145）。但是我們在實際生活中，常常遇到時針的旋轉，齒輪的轉動，飛機螺旋槳的旋轉等，也使我們形成角的概念。這樣，就使初中里關於角的定義不可能表示這些事例。所以，我們也可以把角看成是一條射線圍繞它的端點所作的旋轉。

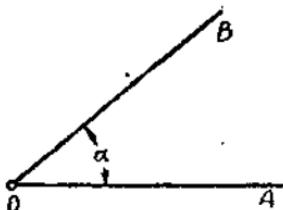


图 145

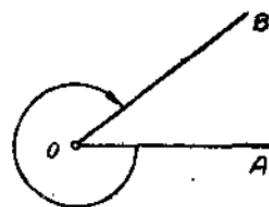


图 146

例如：射線 OA 圍繞它的端點 O 从開始位置 OA 旋轉到終止的位置 OB ，就組成了角 α （圖 146）。端點 O 叫做角 α 的頂點，射線旋轉的開始位置 OA 叫做角 α 的始邊，而射線旋轉的終止位置 OB 叫做角 α 的終邊。

射線旋轉時，可以有兩個相反的方向。如果把依一個方向旋轉所組成的角叫做正角，那末，依相反方向旋轉所組成的角就叫做負角，通常規定依逆時針方向旋轉所組成的角為正角，依順時針方向旋轉所組成的角為負角。

當射線依逆時針方向旋轉一周的過程中，由於終邊可以在各種不同的位置，就組成 0° 到 360° 的一切角。如果再依原方向繼續旋轉，就組成大於 360° 的角。如果射線依順時針方向旋轉一周

后继续旋转，就组成小于 -360° 的角。如果射线没有作任何旋转，仍留在开始位置，那末就说，射线旋转的角等于零度。这样，我们就可以得到任意大小的角。

当射线由始边按任何方向第一次到达已知角 α 的终边以后，不问从那一方向，继续旋转任何整周，终边仍然在同一位置；因此，始边和终边的同一相关位置，可以是无限个旋转的集合；换句话说，无限个不同的角可以有共同的边和顶点，也就是它们的几何图形完全一样。图 147 中指出四个不同的角 I, II, III 和 IV，它们有共同的始边 OA 、终边 OB 和顶点 O ，因为旋转一整周是 360° ，所以如果 k 为任何整数，那末角 α 和角 $360^\circ k + \alpha$ 有共同的始边和终边；也就是说，和角 α 有共同始边和终边的角的一般形式为

$$360^\circ k + \alpha \quad (k \text{ 为任何整数})。$$

§ 144 角的弧度法 我们在过去常常采用“度”作为单位来度量角的大小，这种度量方法，在物理或其他科学技术问题中会感到不够方便，因此，下面我们将介绍另一种度量角的大小的方法。

从 § 140 的例 3 中，我们知道，对于一个已知为 n° 的圆心角 α 它所对的弧长 l （也就是含有 n° 的弧长），可由下面的式子进行计算，即

$$l = \frac{\pi R n}{180}.$$

由这个算式，可以求得这个圆心角所对的弧长与半径的比为

$$\frac{l}{R} = \frac{\pi n}{180}.$$

如果圆心角 α 的大小不变（仍为 n° ），我们取不同的半径 R_1 ，

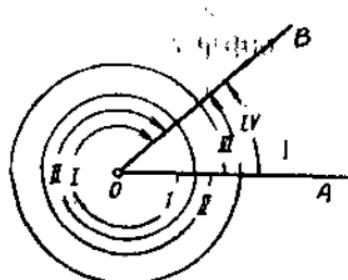


图 147

形完全一样。图 147 中指出四个不同的角 I, II, III 和 IV，它们有共同的始边 OA 、终边 OB 和顶点 O ，因为旋转一整周是 360° ，所以如果 k 为任何整数，那末角 α 和角 $360^\circ k + \alpha$ 有共同的始边和终边；也就是说，和角 α 有共同始边和终边的角的一般形式为

那末 α 所对的弧长相应的是 l_1 , 这样应有

$$l_1 = \frac{\pi R_1 n}{180}$$

显然, 这时弧长与半径之比仍为

$$\frac{l_1}{R_1} = \frac{\pi n}{180}$$

这就說明了, 在圓心角相同的时候, 圓心角所对的弧长和半徑的比相同, 只有在圓心角的大小改变的时候, 这个比才改变。

由此可知, 角 α 所对的弧长与半徑之比仅决定于角 α 的大小, 而与半徑的长短无关。

根据上面的道理, 所以我們可以用圓心角所对的弧长 l 与半徑 R 的比 $(\frac{l}{R})$ 来表示角的大小, 用这个比值来表示角的大小的方法, 叫做弧度法。当圓心角所对的弧长与半徑相等时, 那末比值 $\frac{l}{R}$ 就等于 1, 我們取这样的角作为用弧度法度量角的单位, 这个单位叫做弧度。所以 1 弧度的角就是弧长等于半徑的圓心角。

如果用 α 表示以弧度为单位的角, 那末它的量数有下面的式子:

$$\alpha = \frac{l}{R}$$

§ 145 度与弧度的相互换算 为了明确度与弧度之間的相互关系, 下面我們來說明度与弧度的换算方法。

我們知道 1 周角为 360° , 一个圓周长为 $2\pi R$, 所以 1 周角含有

$$\frac{2\pi R}{R} = 2\pi (\text{弧度})$$

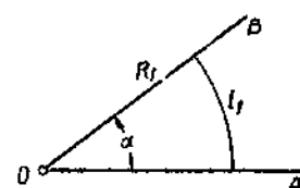
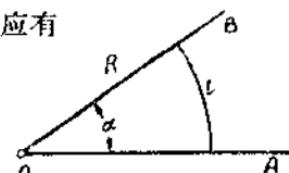


图 148

由此可知

$$360^\circ = 2\pi \text{弧度}.$$

因此推出度与弧度的换算关系表如下：

度	0°	15°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
弧 度	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

这个表中的对应值以后常常要用到，所以必须牢固地记忆。

我们由 $360^\circ = 2\pi$ 这个关系式，可以推得 1° 所含的弧度数和 1 弧度所含的度数。

因为 $360^\circ = 2\pi$ 弧度，亦即 $180^\circ = \pi$ 弧度。

所以 $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ 弧度 ≈ 0.017453 弧度；

$$1 \text{弧度} = \left(\frac{180}{\pi} \right)^\circ \approx 57^\circ 17' 44.8'',$$

或 $1 \text{弧度} \approx 57.29^\circ$ 。

因此，要把若干度化成弧度，应当用已知的度数去乘 $\frac{\pi}{180}$ 弧度（或者 0.017453 弧度）；要把若干弧度化成度，应当用已知的弧度数去乘 $\left(\frac{180}{\pi} \right)^\circ$ 。（或者 $57^\circ 17' 44.8''$ ）。

例 1. 把 $67^\circ 30'$ 化成弧度。

解：因为 $67^\circ 30' = 67\frac{1}{2}$ 度，

$$\begin{aligned} \text{所以 } 67^\circ 30' &= \frac{\pi}{180} \text{ 弧度} \times 67\frac{1}{2} \\ &= \frac{135\pi}{360} \text{ 弧度} \\ &= \frac{3\pi}{8} \text{ 弧度。} \end{aligned}$$

如果需要求得这个弧度数的近似值，例如精确到 0.001 的近

似值，我们可以这样来做：

$$\begin{aligned} 67^{\circ}30' &\approx 0.01745 \text{ 弧度} \times 67.5 \\ &\approx 1.178 \text{ 弧度。} \end{aligned}$$

例 2：把 $\frac{3\pi}{5}$ 弧度化成度。

$$\text{解： } \frac{3\pi}{5} \text{ 弧度} = \frac{180^{\circ}}{\pi} \times \frac{3\pi}{5} = 108^{\circ}.$$

为了方便起见，我們規定：用弧度表示角的大小时，可以略去“弧度”兩字。也就是說， α 等于 2 、 $\frac{1}{2}$ 等是分別表示 α 等于 2 弧度， $\frac{1}{2}$ 弧度等。

度与弧度的換算，在伯拉基斯的“四位数学用表”中列有相互換算表。它的查法与查三角函数表相仿，下面我們通过例子来熟悉这个表的使用法。

例 1：化 $71^{\circ}21'$ 为弧度。

解：由表可以直接查得

$$71^{\circ}21' \approx 1.2462.$$

例 2：化 $23^{\circ}20'$ 为弧度。

解：查表得 $23^{\circ}18' \approx 0.4067$

$$\begin{array}{r} + 2' \\ \hline 23^{\circ}20' \approx 0.4073 \end{array}$$

例 3：化 1.0862 弧度为度。

解：查表得 $1.0856 \approx 62^{\circ}12'$

$$\begin{array}{r} + 6' + 2' \\ \hline 1.0862 \approx 62^{\circ}14' \end{array}$$

如把圆心角的度数利用度与弧度的換算法化成弧度，就可用式子

$$\alpha = \frac{l}{R}$$

根据 R 的長度求得圆心角所对的弧 l 的長度；实际上，上面的式子也

可写成

$$l = R\alpha$$

的形式，这就是说，圆弧的长就等于它所对的中心角的弧度数乘以半径的积。

例 1：半径为 2.2 米的车轮旋转 $30^{\circ}30'$ 的角，问车轮上任一点所经过的路程是多少？（精确到 0.05 米）。

解：查表得 $30^{\circ}30' \approx 0.5328$ 弧度，根据公式，得

$$l = R\alpha \approx 2.2 \times 0.5328 \approx 1.2 \text{ (米)}.$$

答：经过的路程为 1.2 米。

例 2：设飞轮的直径是 1.2 米，每分钟旋转 300 次，

(1) 求飞轮每秒钟的角速度 ω （即每秒钟旋转的弧度数）；

(2) 求轮上一点的速度 v 。

解：(1) 因为飞轮每秒钟旋转的弧度数叫角速度，因此

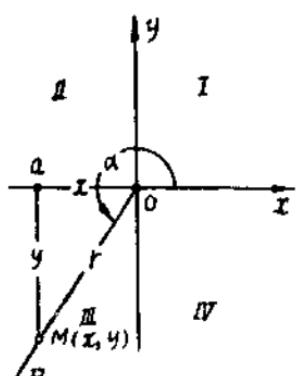


图 149

$$\omega = \frac{2\pi \times 300}{60} = 10\pi \text{ (弧度/秒)}.$$

(2) 飞轮上某一点的速度，就是线速度，所以

$$v = \frac{2\pi \times 0.6 \times 300}{60} = 6\pi \text{ (米/秒)}.$$

§ 146 任意角三角函数的定义 在第七章里，三角函数是由锐角所构成的直角三角形的三边的比来定义的，这样的定义不能适用于任意角，为了进一步研究三角函数的性质和解决解三角形的问题，我们下面来研究任意大小角的三角函数。

取平面上直角坐标系的原点 O 为顶点，使射线围绕 O 点从正半轴 OX 起旋转到 OP 而形成从 OX 到 OP 的任意角 α （图 149），那末除掉当 α 的值等于 $180^{\circ}k$ 和 $180^{\circ}k + 90^{\circ}$ 以外，角 α 的终边

OP 必定在每一象限内，我們按終邊 OP 在第几象限，就說角 α 終止在第几象限，或者說角 α 是第几象限的角，圖 149 中角 α 的終邊 OP 終止在第三象限，我們說角 α 是第三象限的角。

在角 α 的終邊 OP 上取不和 O 点重合的任意点 M ，設这点的坐标是 $M(x, y)$ ， M 点到原点 O 的距离为 r ，这样， x, y 和 r 所組成的比，有下面的定理。

定理 对于已知角 α ，比值 $\frac{y}{r}, \frac{x}{r}, \frac{y}{x}, \frac{x}{y}, \frac{r}{x}$ 和 $\frac{r}{y}$ 仅决定于角 α 的大小，与所取 M 点的位置无关。

證明 在角 α (圖 150) 的終边上再任取不和 O 点重合的一点 $M'(x', y')$ ，并設 $OM' = r'$ ，从 M 和 M' 分別向 OX 軸引垂綫 MM_1 和 $M'M_1$ ，得两相似三角形 OMM_1 和 $OM'M_1$ ，所以

$$\frac{|y|}{r} = \frac{|y'|}{r'}.$$

但 M 和 M' 在同一象限內， y 和 y' 是符号相同的数，所以証得

$$\frac{y}{r} = \frac{y'}{r'}.$$

同理可以証明

$$\frac{x}{r} = \frac{x'}{r'}, \quad \frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}, \quad \frac{x}{y} = \frac{x'}{y'},$$

$$\frac{r}{x} = \frac{r'}{x'}, \quad \frac{r}{y} = \frac{r'}{y'}.$$

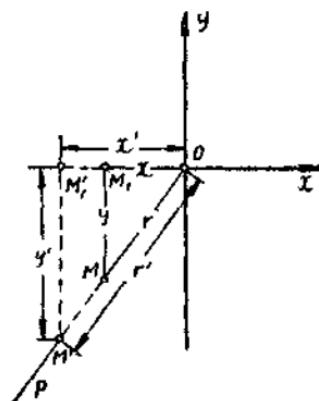


图 150

从上面定理的証明，說明了对于每一个已知角 α 都有完全确定的比值 $\frac{y}{r}, \frac{x}{r}, \frac{y}{x}, \frac{x}{y}, \frac{r}{x}$ 和 $\frac{r}{y}$ (比的后項不能是零) 和它对应，所以这些比值是角 α 的函数，这些函数叫做三角函数。

1. 角 α 的^① 終边上任意点的纵坐标 y 和原点到这点的距离 r 的比, 叫做角 α 的正弦。

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}.$$

2. 角 α 的終边上任意点的横坐标 x 和原点到这点的距离 r 的比, 叫做角 α 的余弦。

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}.$$

3. 角 α 的終边上任意点的纵坐标 y 和横坐标 x 的比, 叫做角 α 的正切。

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}.$$

4. 角 α 的終边上任意点的横坐标 x 和纵坐标 y 的比, 叫做角 α 的余切。

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}.$$

当角 α 为锐角时, 上面的定义和第七章里所规定的三角函数的定义是一致的, 因此新的三角函数的定义, 是锐角三角函数定义的推广, 它适用于任意大小的角。

除了上述的四个三角函数外, 还有下面两个三角函数:

$$\sec \alpha = \frac{r}{x}, \text{ 叫做角 } \alpha \text{ 的正割。}$$

$$\csc \alpha = \frac{r}{y}, \text{ 叫做角 } \alpha \text{ 的余割。}$$

因为函数 $\sec \alpha$ 和 $\csc \alpha$ 应用较少, 所以我們以后主要是研究前四个三角函数。

三角函数的名称正弦、余弦、正切、余切、正割、余割, 都是我国

^① 这里和以后講到的角 α 都是在直角坐标系中, 从 OX 軸到終边 OP 的角。

十六世紀已有的名称，在公元三世紀，我国数学家刘徽計算以1为半徑的圓內接正六边形，正十二邊形等的邊長，以及公元十三世紀趙有欽計算圓內接正方形的邊長，实际上已經求得了某些特殊角的正弦值。

§ 147 三角函数的符号 由于各象限內点的坐标的符号有正有負，而点到原点間的距离总看做是正的，因此根据三角函数的定义，三角函数的值也應該有正有負，它們的符号要看角的終邊在哪一个象限而定。

对于正弦和余割來說，它的符号应与角的終邊上的点的縱坐标的符号相同，因此，第一和第二象限的角的正弦和余割是正的，而第三和第四象限的角的正弦和余割是負的。

对于余弦和正割來說，它的符号应与角的終邊上的点的橫坐标的符号相同，因此，第一和第四象限的角的余弦和正割是正的，而第二和第三象限的角的余弦和正割是負的。

对于正切和余切來說，它的符号应取决于角的終邊上的縱坐标和橫坐标的符号的相同或相反，因此，第一和第三象限的角的正切和余切是正的，而第二和第四象限的角的正切和余切是負的。

現在將各三角函数的符号列表如下：

符 號 所 在 的 象 限 角 函 數	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
	$\operatorname{cosec} \alpha$	$\sec \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
I	+	+	+
II	+	-	-
III	-	-	+
IV	-	+	-

§ 148 三角函数值在单位圓上的表示法 根据任意角三角函数的定义，我們知道，对于一个已知角的三角函数值的大小，和在

这个角的终边上所取的点的位置无关，为了便于对三角函数性质的研究，我们取和原点距离为单位长度的点。在直角坐标系中，以原点为圆心，作出等于单位长度的线段为半径的圆，这个圆叫做单位圆。

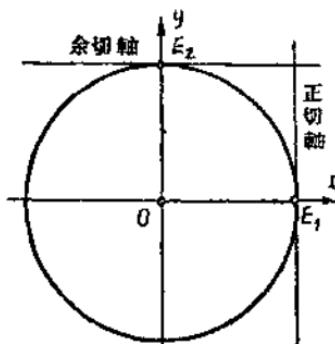


图 151

单位圆(图 151)与正半轴 OX 和 OY 相交的点 E_1 和 E_2 叫单位点， E_1 的坐标是 $(1, 0)$ ， E_2 的坐标是 $(0, 1)$ 。

在单位点 E_1 和单位圆相切的直线叫正切轴，正切轴上一切点的横坐标都等于 1；在单位点 E_2 和单位圆相切的直线叫余切轴，余切轴上一切点的纵坐标都等于 1。

利用单位圆、正切轴和余切轴，可以只用某些特殊点的纵坐标或横坐标，来表示已知角的三角函数值，并且能够清楚的说明它们的数值范围，现在分别研究如下：

1. 角 α 的正弦和余弦在单位圆上的表示法。

设 $M(x, y)$ 是角 α 终边 OP 和单位圆的交点(图 152)，因为 M

在单位圆上，所以不論角 α 终止在哪一象限，都可以得

$$OM = r = 1.$$

由定义可得

$$\sin \alpha = \frac{y}{1} = y,$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{1} = x.$$

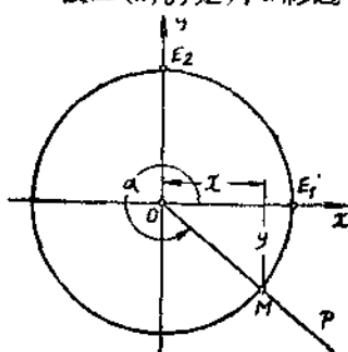


图 152

也就是说，角 α 的正弦等于它的终边和单位圆交点的纵坐标，而它的余弦等于这点的横坐标。很明显，无论角 α 终止在那一象限，它的终边总能和单位圆相

交，而且交点的坐标可以是 -1 到 +1 间并包括这两个值在内的一切数值，而且也只能是这样的数值。所以函数 $\sin \alpha$ 和 $\cos \alpha$ 的值，对 α 的任何值都对应着确定的值而且可以是 -1 到 +1 间，并包括这两个值在内的一切实数。

2. 角 α 的正切和余切在单位圆上的表示法

设 $M(x, y)$ 是角 α 的终边 OP 或 OP 的反向延綫和正切軸的交点，当角 α 终止在第一和第四象限的时候(图 153)，由定义可得

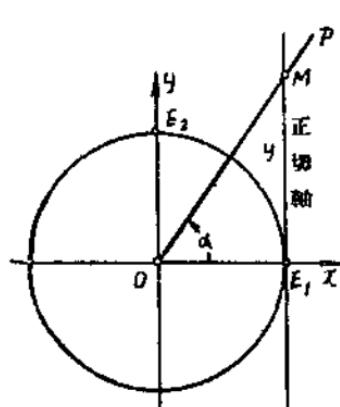


图 153

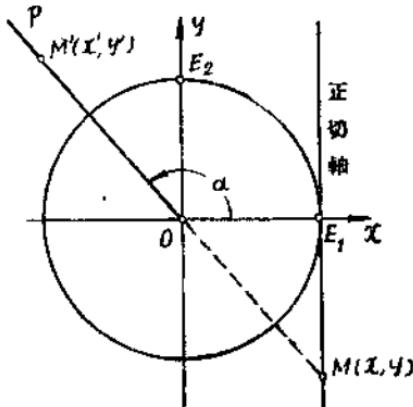


图 154

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{y}{1} = y.$$

如果角 α 终止在第二和第三象限(图 154)，可在角的终边上取关于原点和 M 点对称的点 $M'(x', y')$ ，因为

$$x' = -x = -1, \quad y' = -y,$$

所以 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y'}{x'} = \frac{-y}{-1} = y.$

也就是说，角 α 的正切，等于它的终边或终边的反向延綫和正切軸交点的纵坐标。

设 $M(x, y)$ 是角 α 的终边 OP 或 OP 的反向延綫和余切軸的

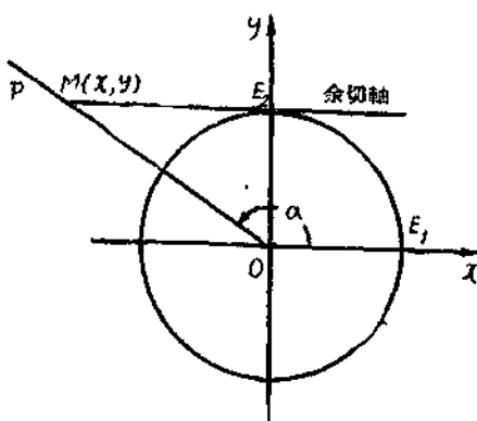


图 155

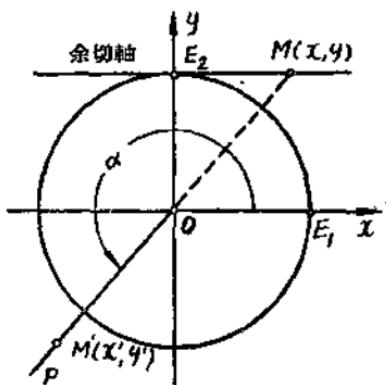


图 156

交点(图 155, 156), 同样可得

$$\operatorname{ctg} \alpha = x.$$

也就是说, 角 α 的余切, 等于它的终边或终边的反向延线和余切轴交点的横坐标。

很明显, 只有角 α 等于

$180^\circ k + 90^\circ$ 或 $k\pi + \frac{\pi}{2}$ (k 为任何整数) 时, 角的终边平行于正切轴, 除此以外, 角 α 的终边或它的反向延线总可以和正切轴相交, 而且交点的纵坐标可以是一切实数值; 另外, 只有当角 α 等于 $180^\circ k$ 或 $k\pi$ (k 为任何整数) 时, 角的终

边平行于余切轴, 除此以外, 角 α 的终边或它的反向延线总可以和余切轴相交而且交点的横坐标可以是一切实数值。

由此可知, 函数 $\operatorname{tg} \alpha$ 除了当角等于 $180^\circ k + 90^\circ$ 外, 对于角 α 的其他任何值, 都有确定的值; 函数 $\operatorname{ctg} \alpha$ 除了当角等于 $180^\circ k$ 外, 对于角 α 的其他任何值, 都有确定的值。函数 $\operatorname{tg} \alpha$ 和 $\operatorname{ctg} \alpha$ 的值可以是一切实数。

§ 149 $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ 角的三角函数值 根据上节的讨论, 我们可以利用三角函数值在单位圆上的表示法, 求得特殊角的