College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

应用数学基础

——微积分学习辅导与习题选解(上册)

主编 陈 洪

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

大学数学学习辅导丛书

应用数学基础——微积分学习辅导与习题选解

（上册）

主编　陈洪

高等教育出版社

内容提要

本书是为配合教育科学"十五"国家规划课题研究成果《应用数学基础——微积分》教材的使用而编写的。

本书按《应用数学基础——微积分》的章节顺序编排,与教学需求保持同步。每章包括教学重点与难点、内容概述和相关知识、疑难解析和经典例题分析、该章习题解答、练习、练习答案等部分。习题解答对主教材中较难并具有典型性的部分习题作出简要解答,既给学生以参考,又为学生留下了自我发挥的余地。

本书对主教材具有相对的独立性,内容切合学生实际需要,针对性强,通过解题过程,帮助学生掌握高等数学的基本知识、基本理论和基本技能,除可供培养应用型人才的高等学校工科和其他非数学类专业学生选用外,还可供使用主教材的教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

应用数学基础——微积分学习辅导与习题选解.(上册)/陈洪主编.—北京:高等教育出版社,2004.8

ISBN 7-04-014415-8

Ⅰ.应... Ⅱ.陈... Ⅲ.① 应用数学-高等学校-教学参考资料② 微积分-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 066346 号

策划编辑 王 强 **责任编辑** 董达英 **封面设计** 王凌波 **责任绘图** 杜晓丹
版式设计 王艳红 **责任校对** 殷 然 **责任印制** 孔 源

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
排　　版	高等教育出版社照排中心		
印　　刷	北京星月印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2004 年 8 月第 1 版
印　　张	18.5	**印　　次**	2004 年 8 月第 1 次印刷
字　　数	340 000	**定　　价**	19.60 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

物料号:14415-00

编者的话

本书是教育部课题"21世纪中国高校应用型人才培养体系的创新与实践"的数学子课题的重要研究成果之一，是应用型本科"高等数学"课程的辅助性读物。本书按宣立新主编的《应用数学基础——微积分》(上、下册)体系分章讨论，各章由以下六部分组成：

1. 教学重点与难点；
2. 内容概述和相关知识；
3. 疑难解析和典型例题分析；
4. 习题解答；
5. 练习；
6. 练习答案。

教学重点与难点的形成因素主要来自于：各章乃至全书的重要知识点，或者是贯串全章的一种思想方法或针对学生要求的能力训练等。在内容概述和相关知识部分，着重对重要的概念、基本理论、基本运算及其应用进行剖析、归纳，并指出必须注意的问题，使读者对每章的概貌有全面的了解。同时针对重要的概念、理论和运算的某些内容，介绍一些相关知识，以便于读者加深理解。在疑难解析和典型例题分析部分，着重通过实例对基本概念、基本运算中的疑难内容进行剖析；对理论知识的应用，通过对典型例题的分析或一题多解，让读者了解各种解题思路，并借助这些例题培养读者良好的思维习惯，提高分析问题、解决问题的能力。在习题解答部分，针对教材每一章的习题，讲清解题思路并给出详略适度的解答。每一章最后配有少量练习题并附答案，以供读者选用。

编者根据对应用型本科数学教学的长期研究和体会，对教材中的重点、难点问题，深入浅出地从应用型本科教学的实际出发给予了论证和解惑，带有启发性。本书也可作为其他本科高等数学教材的辅助用书。对于有志于成材的朋友，更是一本难得的参考读物。

本书分上、下两册。上册的编写情况为：第一章，陈洪(南京工程学院)与宣立新(南京师范大学)；第二章，陈洪与陈怡南(淮海工学院)；第三章，咸美新(南京工程学院)与宣立新；第四章，咸美新与胡可乐(南京工程学院)；第五章、第六章、第七章，郭树林(南京工程学院)与胡可乐。由陈洪主编，并负责统稿、定稿。

在本书编写过程中，宣立新教授认真地审阅了书稿，提出了许多有益的建议

和意见，编者在此表示衷心的感谢。

由于我们水平有限，书中会有不当之处，敬请读者不吝赐教。

编者

2004年2月

目　　录

第一章

函数的极限与连续

一、教学重点与难点

1. 教学重点

函数、函数的极限与连续的概念、初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质、简单函数的极限运算.

2. 教学难点

函数关系的建立、函数的极限概念、分段函数与复合函数极限的计算.

二、内容概述和相关知识

1. 函数

(1) 函数的定义

定义 1 设 x 和 y 是两个变量，D 是 $\mathbf{R}$ 的非空子集，$\forall x\in D$，变量 y 按照某个对应关系 f 总有确定的实数与之对应(记作 $y=f(x)$)，则称 f 是定义在 D 上的函数. x 称为自变量，y 称为因变量. D 称为函数 f 的定义域，数集 $\{f(x)\mid x\in D\}$ 称为函数 f 的值域.

在定义 1 中，如果对 $x\in D$，y 有唯一确定的实数与之相对应，这样的函数称为单值函数；如果对 $x\in D$，y 有两个或两个以上确定的实数与之对应，这样的函数称为多值函数.

如 $y^2=x$ 是定义在 $D=\{x\geqslant 0\mid x\in\mathbf{R}\}$ 上的多值函数且是二值函数. 该二值函数可以分成两个单值函数

$$y_1=\sqrt{x},\ y_2=-\sqrt{x}$$

来讨论，并称 y_1,y_2 为函数 $y^2=x$ 的两个单值分支. 一般地说，研究多值函数是把它分成若干个单值分支，然后对每个单值分支(单值函数)进行讨论.

由于常常通过函数值讨论函数，因此通常把自变量为 x、因变量为 y 的函数 f 记成 $y=f(x)$.

由函数的定义可知，函数的定义域与对应关系是确定函数的要素，与自变

量、因变量选用的符号无关. 两个函数只有在定义域相同、对应关系也相同时,它们才是同一个函数.

(2) 分段函数

定义 2 对定义域的不同部分,对应关系用不同的解析式表示的函数,称为分段函数.

函数
$$f(x)=\begin{cases} x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases} \tag{1}$$

符号函数
$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases} \tag{2}$$

狄利克雷(P. G. L. Dirichlet)函数
$$D(x)=\begin{cases} 1, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\end{cases} \tag{3}$$

都是分段函数.

由定义 2 可见,分段函数是按照表达函数的外在形式来定义的. 有的分段函数经恒等变形,可以在定义域范围内用一个解析式表示,如(1)式给出的分段函数可恒等变形成
$$f(x)=|x|=\sqrt{x^2}. \tag{4}$$
(4)式表示的函数已不是分段函数,但(1)式和(4)式表示的是同一个函数.

对于分段函数必须注意的是,它是用几个解析式表示一个函数,而不是几个函数. 分段函数的定义域是自变量在各段取值的全体所成的集合.

如分段函数
$$g(x)=\begin{cases} -x-1, & -1\leqslant x<0,\\ -x+1, & 0<x<1\end{cases}$$
的定义域 $D=[-1,0)\cup(0,1)$,它的图像如图 1-1 所示.

(3) 复合函数

定义 3 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 U, $u=\varphi(x)$ 的定义域为 X, $D=\{x\in X\mid \varphi(x)\in U\}\neq\varnothing$,则 $\forall x\in D$,通过 $u=\varphi(x)$,变量 y 总有确定的值 $f(u)$ 与之对应,这样得到的以 x 为自变量、y 为因变量的函数,称为函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 的复合函数,记作 $y=f[\varphi(x)]$, D 是它的定义域, u 称为中间变量.

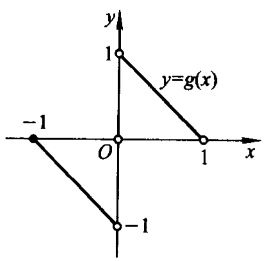

图 1-1

"复合"是由简单函数构造复杂函数的一种重要

方法.由于在讨论函数的微分或积分性质时,往往是先讨论简单函数的相应性质,再通过“分解”复杂函数为简单函数的复合等方法,来讨论复杂函数的有关性质,因此熟练地分析复杂函数的结构并善于“分解”复杂函数为简单函数的复合是十分必要的.

必须指出,不是任意两个函数都可以复合,只有满足定义3中的$\{x\in X \mid \varphi(x)\in U\}\neq\varnothing$,函数$y=f(u)$与$u=\varphi(x)$才能复合.如$y=\sqrt{u}$,$u=-(1+x^2)$在实数范围内就不能复合.

(4) 初等函数

定义4 幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.由常数和基本初等函数经有限次四则运算和有限次的函数复合构成的、可用一个解析式表示的函数,称为初等函数.

初等函数是高等数学讨论的主要对象.

(5) 函数的几种特性

1° 有界性

定义5 设函数$f(x)$的定义域为D,数集$X\subset D$,$\exists$常数$M>0$,$\forall x\in X$,相应的函数值满足$|f(x)|\leqslant M$,则称函数$f(x)$在X上有界.如果不存在以上的正常数M,则称$f(x)$在X上无界.如果$f(x)$在定义域D上有界,则称$f(x)$为有界函数.

函数的有界性也可采用如下的定义.

定义6 设函数$f(x)$的定义域为D,数集$X\subset D$,$\exists$常数$M(m)$,$\forall x\in X$,有$f(x)\leqslant M(f(x)\geqslant m)$,则称函数$f(x)$在$X$上上有界(下有界),$M(m)$称为$f(x)$的一个上界(下界).在$X$上既上有界又下有界的函数称为$X$上的有界函数.

容易验证:“函数$f(x)$在X上有界”在定义5与定义6两种定义下是等价的.

有界函数$f(x)$是在定义域上整体有界.而函数$g(x)$在定义域的子集X上有界,只是局部有界.如函数$y=x^2$在定义域内无界,在区间$(0,1)$内则是有界的.

有界函数$f(x)$的几何意义是它的图像落在某两条水平线所夹的条形区域内.

2° 单调性

定义7 设函数$f(x)$的定义域为D,区间$I\subset D$,$\forall x_1,x_2\in I$,$x_1<x_2$,恒有

$$f(x_1)<f(x_2)\,(f(x_1)>f(x_2)),$$

则称$f(x)$在区间I上是单调增加(减少)的,并统称区间I上的单调增加、单调

减少的函数为 I 上的单调函数. 如果 $f(x)$在定义域 D 上单调增加(减少),则称 $f(x)$为单调增加(减少)的函数.

从几何直观上看,单调增加(减少)函数的图像,沿 x 轴的正向是上升(下降)的.

函数 $f(x)$在区间 I^* 上单调增加(减少),且在定义域 D 内没有真包含 I^* 的区间使 $f(x)$仍为单调,则称 I^* 为 $f(x)$的单调增加(减少)区间. 函数$f(x)$的单调增加区间、单调减少区间统称为 $f(x)$的单调区间.

函数 $y=\sin x$ 在定义域不是单调的,但它有单调区间$\left[n\pi-\frac{\pi}{2},n\pi+\frac{\pi}{2}\right]$($n\in\mathbf{Z}$),其中$\left[2n\pi-\frac{\pi}{2},2n\pi+\frac{\pi}{2}\right]$($n\in\mathbf{Z}$)是它的单调增加区间,$\left[2n\pi+\frac{\pi}{2},2n\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$($n\in\mathbf{Z}$)是它的单调减少区间.

3° 奇偶性

定义 8 设函数 $y=f(x)$的定义域 D 关于原点对称,$\forall x\in D$,都有 $f(-x)=-f(x)$($f(-x)=f(x)$),则称函数 $f(x)$为奇(偶)函数.

奇函数的图像关于原点对称,偶函数的图像关于 y 轴对称.

4° 周期性

定义 9 设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,$\exists$ 常数 $T\neq 0$,$\forall x\in D$,有 $f(x\pm T)=f(x)$,则称函数 $f(x)$为周期函数,T 为函数$f(x)$的一个周期. 当周期函数 $f(x)$的周期中存在最小正数 T_0,则称 T_0 为函数 $f(x)$的最小正周期. 当周期函数存在最小正周期时,通常说该函数的周期是指它的最小正周期.

周期函数若以 $T(>0)$为周期,则在每个长度为 T 的区间$[nT,(n+1)T]$($n\in\mathbf{Z}$)上,函数的图像是相同的.

2. 函数的极限

(1) 数列的极限

定义 1 对数列$\{x_n\}$,有常数 a,当项数 n 无限增大时,数列的相应项 x_n 无限逼近常数 a,则称常数 a 是数列$\{x_n\}$的极限,记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 或 $x_n\to a(n\to\infty)$,并称数列$\{x_n\}$是收敛的,否则称数列$\{x_n\}$是发散的.

对数列的极限应注意理解下面几点:

1° 极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 表示项数 n 无限增大时,通项 x_n 变化的总趋势——无限逼近常数 a.

2° 数列极限的几何解释:设极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,将常数 a 和数列的通项x_n 在数轴上用它们的对应点表示出来. 对 a 的任一个取定的邻域(如 $N(a,\varepsilon)$),n 无限增大时,数列的项 x_n 最终(从某项 x_m 以后的项)都落在该邻域内. $a>0$ 时如

图 1-2 所示.

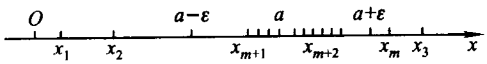

图 1-2

因此极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 表明,数列 $\{x_n\}$ 的项几乎都聚集在点 a 的邻近处.

3° 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 又可叙述为:当项数 n 无限增大时,通项 x_n 与点 a 的距离 $|x_n-a|$ 无限逼近零.

(2) $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

定义 2 对函数 $f(x)$,有正常数 M,当 $|x|>M$ 时函数 $f(x)$ 有定义.当自变量 x 的绝对值无限增大时,相应的函数值 $f(x)$ 无限逼近常数 A,则称 A 为 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限,记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to\infty)$.

对函数的极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 应注意理解下面几点:

1° 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 表示自变量 x 的绝对值无限增大时,相应的函数值 $f(x)$ 变化的总趋势——无限逼近常数 A.

2° $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的几何解释:在 xOy 平面的 y 轴上用点 A 表示常数 A,取点 A 的任一个邻域 $N(A,\varepsilon)$,当自变量的绝对值 $|x|$ 无限增大时,函数 $y=f(x)$ 的图像最终都落到由 $y=A-\varepsilon$ 和 $y=A+\varepsilon$ 夹成的条形区域内.$A>0$ 时如图 1-3 所示.

3° 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 又可叙述为:当自变量 x 的绝对值足够大时,相应的函数值 $f(x)$ 与 A 的距离 $|f(x)-A|$ 无限逼近零.

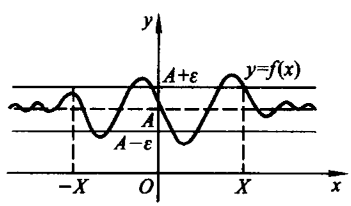

图 1-3

4° 数列 $\{x_n\}$ 可以看成以正整数集为定义域的整标函数:$\forall\, n\in\mathbf{N}^*$,$f(n)=x_n$.因此数列的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 即 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=a$.

(3) $x\to+\infty$($x\to-\infty$)时函数 $f(x)$ 的极限

定义 3 对函数 $f(x)$,有正常数 M,$f(x)$ 在 $x>M$($-x>M$)时有定义,当 x($-x$)无限增大时,相应的函数值 $f(x)$ 无限逼近常数 A,则称 A 为 $x\to+\infty$($x\to-\infty$)时函数 $f(x)$ 的极限,记作 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to+\infty)$($\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to-\infty)$).

对极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$($\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$)除了注意理解与(2)中的极限

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$相类似的前 3 条以外，还应注意：

定理 1 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$.

(4) $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$的极限

定义 4 设函数 $f(x)$在 x_0 的某个去心邻域 $N(\hat{x}_0,\delta)$内有定义，当自变量 x 在$N(\hat{x}_0,\delta)$内与 x_0 无限接近时，相应的函数值无限逼近常数 A，则称 A 为 $x\to x_0$时函数 $f(x)$的极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 或$f(x)\to A(x\to x_0)$.

对极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 应注意理解下面几点：

1° 函数 $f(x)$在 x_0 处有极限与 $f(x)$在 x_0 处有无定义无关.

2° 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 表示自变量 x 无限趋近 x_0 时，相应的函数值 $f(x)$ 变化的总趋势——无限逼近常数 A.

3° 设极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，任取一个收敛于 x_0 的自变量的值构成的数列 $\{x_n\}(x_n\neq x_0)$，则相应的函数值的数列$\{f(x_n)\}$一定收敛于 A.

4° 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的几何解释：在 xOy 平面的y 轴上用点A 表示常数 A，取点 A 的任一个邻域$N(A,\varepsilon)$，当 x 与x_0 无限接近时，函数 $y=f(x)$的图像最终都落到由直线 $y=A-\varepsilon$ 和$y=A+\varepsilon$ 夹成的条形区域内. $A>0$ 时如图 1－4所示.

5° 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 又可叙述为：当自变量 x 与x_0 足够接近并且 $x\neq x_0$ 时，相应的函数值 $f(x)$与 A 的距离$|f(x)-A|$无限逼近零.

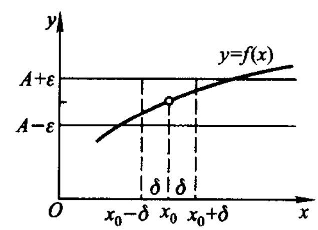

图 1－4

(5) 函数 $f(x)$在点 x_0 处的左、右极限

定义 5 设在 x_0 的某个右半邻域$(x_0, x_0+\delta)$(左半邻域$(x_0-\delta,x_0)$)内，函数 $f(x)$有定义. 当自变量在此半邻域内无限趋近 x_0 时，相应的函数值$f(x)$无限逼近常数 A，则称 A 为函数$f(x)$在点 x_0 处的右(左)极限. 记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$或$f(x_0^+)=A$($\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$ 或$f(x_0^-)=A$).

对函数 $f(x)$在点 x_0 处的左、右极限，除了注意理解与(4)的极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 相类似的 5 条以外，还应注意：

定理 2 极限 $\lim\limits_{x_0\to x_0} f(x)=A$ 的充要条件是$f(x)$在点 x_0 处的左、右极限都等于 A，即 $f(x_0^+)=f(x_0^-)=A$.

(6) 极限的统一定义

由于数列$\{x_n\}$可以视作以正整数集$\mathbf{N}^*$为定义域的函数$f(n)=x_n$，因此数列的极限可看作函数的极限.

对函数的极限，自变量的变化过程有$n\to\infty$，$x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$，$x\to x_0$，$x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$ 7种情形，这7种情形下的函数极限具有相似的叙述方式，因此可以将它们统一成一种形式，以便于讨论极限的共性.

定义6 对函数$f(x)$，在自变量的某一变化过程中，若相应的函数值$f(x)$无限逼近常数A，则称A为取定的自变量变化过程中函数$f(x)$的极限，记作$\lim\limits_{x}f(x)=A$.

对统一的函数极限$\lim\limits_{x}f(x)=A$，应注意理解的地方与前面讨论的相仿，留给读者作为练习.

(7) 极限$\lim\limits_{x}f(x)=A$的性质

由函数的极限的统一定义$\lim\limits_{x}f(x)=A$，可以得到极限的共同性质：

性质1 (唯一性) 若$\lim\limits_{x}f(x)=A$，$\lim\limits_{x}f(x)=B$，则$A=B$；

性质2 (有界性) 若$\lim\limits_{x}f(x)=A$，则在自变量的变化过程中，函数$f(x)$是有界的；

性质3 (保号性) 若$\lim\limits_{x}f(x)=A$且$A>0(<0)$，则在自变量变化过程中的某一时刻以后，$f(x)>0(f(x)<0)$.

推论 若$\lim\limits_{x}f(x)=A$且在自变量变化过程的某一时刻以后，函数值$f(x)\geqslant 0(\leqslant 0)$，则$A\geqslant 0(\leqslant 0)$.

3. 无穷小

(1) 无穷小的定义

定义1 极限为零的变量称为无穷小.

对无穷小的定义应注意理解以下几点：

1° 无穷小是变量相对于自变量的某个变化过程而言的；

2° 数0是唯一可以称为无穷小的常数.

(2) 无穷小的性质

定理1 $\lim\limits_{x}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)(\lim\limits_{x}\alpha(x)=0)$.

定理2 有限个无穷小的和是无穷小.

定理3 无穷小与有界量的积是无穷小.

推论 有限个无穷小的积是无穷小.

对无穷小的性质，必须注意：

1° 任意多个无穷小的和未必是无穷小.

2° 两个无穷小的比的极限是不定式，即结论不能确定，可能是不等于零的

常数、也可能是零、甚至极限不存在.这种不定式记为“$\frac{0}{0}$”.

3° 任意多个无穷小的积未必是无穷小.

(3) 无穷小的比较

定义 2 设$\lim\limits_{x}\alpha(x)=0,\lim\limits_{x}\beta(x)=0$,若$\lim\limits_{x}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c$(常数)或$\lim\limits_{x}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=0$,则称 $\alpha(x)$与 $\beta(x)$是可以比较的.

1° 如 $c=0$,则称 $\alpha(x)$是 $\beta(x)$的高阶无穷小,或 $\beta(x)$是 $\alpha(x)$的低阶无穷小,简记为 $\alpha=o(\beta)$.

2° 如 $c\neq0$,则称 $\alpha(x)$与 $\beta(x)$是同阶无穷小;特别,$c=1$ 时,称 $\alpha(x)$与 $\beta(x)$是等价无穷小,简记为 $\alpha\sim\beta$.

定义 3 若$\lim\limits_{x\to0}\frac{\alpha(x)}{x^k}=c(\neq0)$,$k$ 为非零常数,则称 $\alpha(x)$是 $x\to0$ 时 x 的 k 阶无穷小.

等价无穷小在两个无穷小的比的极限计算中有以下的重要性质:

定理 4 设 $\alpha\sim\alpha_1,\beta\sim\beta_1,\lim\limits_{x}\frac{\alpha_1}{\beta_1}=A$,则$\lim\limits_{x}\frac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x}\frac{\alpha_1}{\beta_1}$.

由定理 4 可见,在求两个无穷小的比的极限,即“$\frac{0}{0}$”型的极限时,可将其分子或分母分别换成它们的等价无穷小,以简化极限的计算.为此,熟悉 $x\to0$ 时以下的等价无穷小关系对极限的计算是很有益的.

$x\to0$ 时,$\sin x\sim x,\tan x\sim x,\arcsin x\sim x,\arctan x\sim x,\ln(1+x)\sim x,e^x-1\sim x,(1+x)^\mu-1\sim\mu x(\mu\in\mathbf{R}),1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$等等.

对“$\frac{0}{0}$”型的不定式作等价无穷小代换时,必须指出的是:对分子、分母的乘积因子可以作等价无穷小的代换,但当分子、分母是多项之和的时候,对它们的某一项不能作等价无穷小的代换.

4. 无穷大

(1) 无穷大的定义

定义 在自变量 x 的某个变化过程中,相应的函数值的绝对值$|f(x)|$无限增大,则称函数 $f(x)$为该自变量变化过程中的无穷大;如果相应的函数值 $f(x)(-f(x))$无限增大,则称函数 $f(x)$为该自变量变化过程中的正(负)无穷大.如函数 $f(x)$是 $x\to x_0$ 时的无穷大,记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$;如 $f(x)$是 $x\to\infty$时的正无穷大,记作$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$;如 $f(x)$是 $x\to x_0^+$ 时的负无穷大,记作

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$;等等.

对无穷大应注意理解以下几点(为叙述的方便,自变量的变化过程以 $x \to x_0$ 为例,其他情形有类似的结论):

1° $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$,即函数 $f(x)$是 $x \to x_0$ 时的无穷大,它在形式上采用了极限的符号,但它是 $f(x)$在 $x \to x_0$ 时极限不存在的一种情形.

2° 函数 $f(x)$是 $x \to x_0$ 时的无穷大,也反映了自变量 x 无限趋近 x_0 时,相应的函数值的绝对值$|f(x)|$变化的总趋势——$|f(x)|$无限增大.

3° 若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$,对任意一个收敛到 x_0 的自变量的值构成的数列$\{x_n\}(x_n \neq x_0)$,则相应函数值的数列$\{f(x_n)\}$也是无穷大.

4° $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$有如下的几何解释:对反映函数值的绝对值增大程度的任一个正常数 M,在自变量 x 与x_0 无限接近时,最终曲线 $y = f(x)$都落在直线 $y = M$ 的上方或$y = -M$ 的下方.如图 1-5 所示.

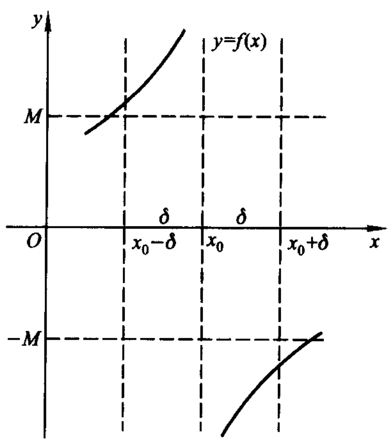

图 1-5

5° $x \to x_0$ 时的无界量与无穷大是两个不同的概念,无穷大必定是无界量,但无界量未必是无穷大.

对正无穷大、负无穷大必须注意的情形与以上无穷大的情形相类似,留读者考虑.

(2) 无穷小与无穷大的关系

定理 无穷大的倒数是无穷小;恒不为零的无穷小的倒数为无穷大.

5. 极限的运算法则

定理 设$\lim\limits_{x} f(x) = A$,$\lim\limits_{x} g(x) = B$,则

(1) $\lim\limits_{x}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x}f(x)\pm\lim\limits_{x}g(x)=A\pm B$;

(2) $\lim\limits_{x}[f(x)\cdot g(x)]=[\lim\limits_{x}f(x)]\cdot[\lim\limits_{x}g(x)]=AB$;

(3) 若 $B\neq0$,有$\lim\limits_{x}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x}f(x)}{\lim\limits_{x}g(x)}=\dfrac{A}{B}$;

(4) 若 $B>0$,有$\lim\limits_{x}[g(x)]^{f(x)}=[\lim\limits_{x}g(x)]^{\lim\limits_{x}f(x)}=B^{A}$.

对极限的运算法则必须注意:

1° 4条法则都只有在极限$\lim\limits_{x}f(x)$,$\lim\limits_{x}g(x)$存在的条件下才能成立(无限大是极限不存在的情形);

2° (1),(2)两条法则可推广到有限个函数的情形;

3° 法则(3)要求 $B\neq0$,法则(4)要求 $B>0$.

6. 函数的连续性及其应用

(1) 函数的连续性

定义 1 函数 $f(x)$在点 x_0 的某一邻域 $N(x_0,\delta)$内有定义,且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,则称函数 $f(x)$在点 x_0 处连续.

函数 $f(x)$在点 x_0 处连续还有以下的等价定义:

定义 1′ 函数 $f(x)$在点 x_0 的某一邻域 $N(x_0,\delta)$内有定义,当自变量 x 在x_0 处有增量 Δx($x_0+\Delta x\in N(x_0,\delta)$),若 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$,则称函数 $f(x)$在点 x_0 处连续.

定义 2 若函数 $f(x)$在点 x_0 处,有

$$f(x_0^+)=f(x_0)\quad(f(x_0^-)=f(x_0)),$$

则称函数 $f(x)$在点 x_0 处右(左)连续.

由定义 1 和定义 2 可知

定理 1 函数 $f(x)$在点 x_0 处连续的充要条件是 $f(x)$在点 x_0 处左连续且右连续.

定义 3 如果函数 $f(x)$在开区间(a,b)内的每一点都连续,则称函数$f(x)$在开区间(a,b)内连续,记作 $f(x)\in C(a,b)$.

如果 $f(x)\in C(a,b)$,且 $f(x)$在点 a 右连续、在点 b 左连续,则称函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,记作 $f(x)\in C[a,b]$.

函数 $f(x)$在它的定义域内的每一点都连续时,则称函数 $f(x)$为连续函数.

(2) 连续函数的运算

定理 2 若函数 $f(x)$,$g(x)$都在点 x_0 处连续,则函数 $f(x)\pm g(x)$,