周志文　蔡永芳　陈圣益

1

高中数学课本
学习问答

福建教育出版社

高中数学课本学习问答

第一册

周志文 蔡永芳 陈圣益

福建教育出版社

高中数学课本学习问答（第一册）

编著：周志文 蔡永芳 陈圣益

出版：福 建 教 育 出 版 社

发行：福 建 省 新 华 书 店

印刷：莆 田 市 印 刷 厂 印 刷

737×1092毫米32开本　　5.5印张　114千字

1984年5月第一版　　1984年5月第一次印刷

印数：1——88,550

书号：7159·908　　定价：0.49元

前　言

为了帮助读者理解与掌握高中数学课本的内容，我们编了《高中数学课本学习问答》，共两册。

本书所收集的问答题，系学生学习中提出的疑难问题以及教材重点内容的问题。为了便于阅读，尽量按课本的顺序来编排。

本书虽非总复习之类的用书，也注意把有关内容与解法进行归类总结。但是，它不求完备，只是有选择地解决基础知识与基本技能的一些主要问题。

本书可以作为在校学生或社会青年自学数学的辅导书，也可供中学数学教师参考。

本书的第一章至第四章由蔡永芳、周志文和陈圣益同志编写，第五章至第七章由周志文和蔡永芳同志编写。

限于水平，书中谬误之处在所难免，望读者批评指正。

编　者

目　　录

第一章 幂函数 指数函数 对数函数

一 集合与对应

1．怎样理解集合概念？

和其他学科一样，数学中的概念有两类：一是原始概念（不定义的基本概念），一是被定义的概念．集合是基本概念，它象平面几何中的点、线等概念一样是不加定义的概念．

在集合概念中，我们要注意“具有某种属性”、“对象”、“整体”等三点．这里所指的“对象”（即集合的元素）可以是数、式、点、线、面、体等，也可以是其他的事或物，这些对象各都具有某种特殊的性质．

集合具有下面三个特点：

（1）元素的确定性．“对于一个给定的集合，集合中的元素是确定的”．因此，我们可以判断一个元素属于或不属于某集合．

（2）元素的无序性．“在集合里，我们不考虑元素之间的顺序，只要元素完全相同，我们就认为是同一个集合”．

（3）元素的互异性．因为集合概念里的“一些对象”指的是一些互不相同的元素，因此，一个元素在一个集合里不

能重复出现。

2．符号“$\in$”与“$\subseteq$”（或“$\subset$”）有何区别？

符号“$\in$”是数学家皮亚诺（G. Peano）首先引用的。它是希腊语$\varepsilon\sigma\tau\iota$（是）这个词的第一个字母，它用在元素与集合之间，表示从属关系，如 a 是集合 A 的元素，表示为 $a\in A$；a 不是集合 A 的元素，表示为 $a\overline{\in}A$（或 $a\notin A$）．而符号“$\subseteq$”（或“$\subset$”）用于两个集合之间，表示包含的关系．如，集合A的任何一个元素都是集合 B 的元素，可以表示为 $A\subseteq B$；又如，集合 A 的任何一个元素都是集合B 的元素，并且集合 B 中至少有一个元素不属于 A，则可表示为 $A\subset B$。

因此，应用这两个符号时，不要把“$\in$”用于两个集合之间；也不要把“$\subseteq$”（或“$\subset$”）用于元素与集合之间。

3．怎样理解集合的相等？

根据子集的定义，$A\subseteq B$ 是指 A 的元素都是 B 的元素；$B\subseteq A$ 是指 B 的元素都是 A 的元素，所以 $A=B$ 实际上是指两个集合 A、B 由完全相同的元素所组成。

由集合相等的定义，可知：

（1）若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则 $A=B$；反过来，若 $A=B$，则 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$。

（2）若 $A\subseteq B$ 与 $B\subseteq A$ 中至少有一个不成立；则 $A\neq B$；反过来，若 $A\neq B$，则 $A\subseteq B$ 与 $B\subseteq A$ 中至少有一个不成立。

这些结论在有关的推理中是常用的。

4．为什么要引进空集的概念？

课本在第5页指出“为了方便起见，我们引进空集这个概念”，究竟有什么方便呢？让我们从反面来看它的必要性。如果没有引进空集概念，那么课本第6页的例：$\{x: x+1=x+3\}$，{小于零的正整数}，{两边之和小于第三边的三角形}等集合将失去意义。并且第7页的例：设 $A=$ {有理数}，$B=$ {无理数}，则 $A\cap B$ 的运算也就无法进行了。因此，为了表示不含任何元素的集合，也为了使得任意两个集合之间总能实施交的运算，有必要引进空集 ϕ 的概念。我们还必须知道：

(1) 空集是任何集合的子集

熟悉了这一性质，要写出某一集合的所有子集，就不会把空集 ϕ 遗漏掉。

(2) 空集是唯一的

事实上，设 ϕ_1 与 ϕ_2 都是空集，因为空集是任何集合的子集，所以空集也是空集的子集（非真子集），于是有 $\phi_1\subseteq\phi_2$ 且 $\phi_2\subseteq\phi_1$，故 $\phi_1=\phi_2$。这就是说空集是唯一的。

除此之外，对初学者还必须注意0、{0}、ϕ 三者的区别。数0不是集合，{0}是含有一个元素为0的集合，而 ϕ 是不含任何元素的集合。

5．交集与集的交有什么区别和联系？

(1) 集的交指的是运算，即求交集的运算；

(2) 交集（$A\cap B$）是一个集合，是集合 A 和 B 进行交运算的结果。

我们还会碰到并集与集的并、补集与集的补，它们的区别和联系也都一样，这里就不再重复了。

6. 交集应掌握哪些性质？

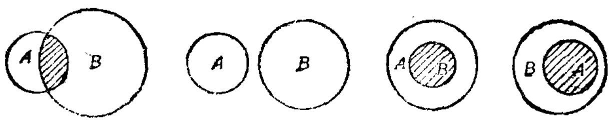
(1) 对于任意集合 A、B 都有下面关系式

$$A\cap B\subseteq A,\ A\cap B\subseteq B.$$

证明：若 $A\cap B$ 非空，对于它的任意元素 x，根据交集的定义，那么有 $x\in A$ 且 $x\in B$，所以 x 是 A 的元素，从而 $A\cap B\subseteq A$。若 $A\cap B$ 是空集，由于$\phi\subseteq A$，所以 $A\cap B\subseteq A$。

同理可证：$A\cap B\subseteq B$。

从韦恩图来看是很明显的，如下图：



$A\cap B\subseteq A$	$A\cap B=\phi\subseteq A$	$A\cap B=B\subseteq A$	$A\cap B=A\subseteq A$
$A\cap B\subseteq B$	$A\cap B=\phi\subseteq B$	$A\cap B=B\subseteq B$	$A\cap B=A\subseteq B$

(2) $A\subseteq B\Longleftrightarrow A\cap B=A$。

证明：因为交集是任一被交集的子集，所以

$$A\cap B\subseteq A. \tag{1}$$

又当任意 $x\in A$，由于 $A\subseteq B$，故 $x\in B$，从而 $x\in A\cap B$。于是

$$A\subseteq A\cap B. \tag{2}$$

由(1)和(2)得　　$A\cap B=A$，

这就证明了$A\subseteq B\Longrightarrow A\cap B=A$。

反过来，任取 $x\in A$，因为 $A=A\cap B$，根据相等定

义，得 $A\subseteq A\cap B$，因而 $x\in A\cap B$，由交集定义，得 $x\in A$ 且 $x\in B$，于是 $A\subseteq B$。这就证明了 $A\cap B=A\Longrightarrow A\subseteq B$。

(3) $A\cap A=A$；$A\cap I=A$（I 为全集）；$A\cap\phi=\phi$。

证明：$\because\ A\subseteq A$，$\therefore\ A\cap A=A$；

$\because\ A\subseteq I$，$\therefore\ A\cap I=A$；

$\because\ \phi\subseteq A$，$\therefore\ A\cap\phi=\phi$。

7．并集应掌握哪些性质？

(1) A、B 是任意两集合，则 $A\subseteq A\cup B$，$B\subseteq A\cup B$，$A\cap B\subseteq A\cup B$。

最后一个结论证明如下：

证明：$\because$ 交集是任一被交集的子集

$\therefore\ A\cap B\subseteq A$，

又 $A\subseteq A\cup B$；

故 $A\cap B\subseteq A\cup B$。

(2) 子集与包含集的并集等于包含集，即

$$A\subseteq B\Longleftrightarrow A\cup B=B.$$

证明：$\because A\subseteq B$，

$\therefore\ A\cup B\subseteq B$； (1)

又 $B\subseteq A\cup B$， (2)

由(1)和(2)得 $A\cup B=B$。

这就证明了 $A\subseteq B\Longrightarrow A\cup B=B$。

反过来，因为 $A\subseteq A\cup B=B$，所以 $A\subseteq B$。

这就证明了 $A\subseteq B\Longleftarrow A\cup B=B$。

(3) 一个集合与自身（或空集）的并集是它的自身，一

个集合与全集的并集是全集，即 $A\cup A=A$，$A\cup\phi=A$，$A\cup I=I$。

证明：$\because$ $A\subseteq A$，$\therefore$ $A\cup A=A$。

$\because$ $\phi\subseteq A$，$\therefore$ $A\cup\phi=A$。

$\because$ $A\subseteq I$，$\therefore$ $A\cup I=I$。

8．补集应掌握哪些性质？

（1）$A\subseteq I$，由补集的定义知 $\overline{A}\subseteq I$。

（2）A、$\overline{A}$ 之间的关系：$A\cup\overline{A}=I$，$A\cap\overline{A}=\phi$。

9．怎样理解单值对应？

从单值对应的定义的内容应注意下列三点：

（1）定义中指出“按照某种对应关系”．可以是由解析式给出的对应关系，例如：$s=\frac{1}{2}gt^2$ 等，也可以是不能由解析式给出的对应关系，例如，一个班级的学生构成一个集合 A，这个班级学生参加一次考试，考试成绩分四个等级：优、良、及格、不及格，记作：集合 $B=\{$优、良、及格、不及格$\}$，A 中的每一个学生都对应 B 中的一个成绩．这种对应关系只能用语言表达．

（2）“在 B 中都有唯一元素和它对应”有两层意思，一是对于 A 的元素在 B 中都要有元素和它对应（存在性）；二是 A 中的任一个元素只对应 B 中的一个元素（唯一性），也就是 A 中的一个元素不能对应 B 中一个以上的元素，若多于一个，那么就不是单值对应。

（3）A 中不同元素可以对应于 B 中的同一个元素，B 中

有些元素可以不被对应。

单值对应也叫做映射。这时，如果 $a\in A$，$b\in B$，且 $a\rightarrow b$，则 b 叫做 a 的象，a 叫做 b 的原象。象集 $R\subseteq B$ 不一定等于 B。

10．怎样理解函数概念？

在函数概念中涉及到两个集合，以及这两个集合的元素之间的对应关系。这两个集合就是函数的定义域和值域，在课本里它们都是一些实数组成的集合。对应关系是从定义域到值域的单值对应。

当提到“确定一个函数”或“给定一个函数”时，一般就是指函数的对应关系，定义域、值域等都是确定的或给定的。如果函数关系是由解析式确定的，则函数的值域可由函数的定义域及对应关系所确定，因此给出函数的定义域和对应关系这两个要素，这个函数就确定了。这样要判定两个给定函数是否相同函数，就可以根据这两个要素判定。例如 $y=x$ 与 $y=x^2$，因为对应关系不同，所以它们是不同函数；$y=\frac{1}{2}x\ (x\in R)$ 与 $y=\frac{1}{2}x\ (x\in\{0, 1, 2, \cdots\})$、$y=\frac{(x+2)(x-1)}{x-1}$ 与 $y=x+2$，因为定义域不同，所以它们都是两个不同函数。而 $y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=|x|$，虽然形式不同，但它们却是相同函数。

11．函数关系有哪几种表示法？各有什么特点？

函数关系的表示法有下列四种：

(1) 解析法　把自变量和函数的对应关系用一个（或者

几个）式子表示出来，这种表示函数关系的方法叫做解析法。例如自由落体落下的距离和时间之间的关系，可以用 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 来表示。

解析法能把函数关系准确完整地表示出来，便于推算和理论分析，但计算函数值有时很复杂，并且不是所有函数都有解析表示式。

（2）列表法　把自变量 x 的一系列值和对应的函数值 y 列成一个表，这种表示函数关系的方法叫做列表法。例如常用的对数表、数的平方表、三角函数表以及车站的里程票价表。

列表法便于检查对应值，但有时只能把一部分对应值表示出来。

（3）图象法　用坐标平面上适合于函数关系的点的轨迹（点的集合）来表示函数的对应规则，这种表示法叫做图象法。如气象台气温自动记录图、检查心脏疾患的心电图、病人体温记录图、各种折线统计图等都是。

图象法把相依变化关系表现得很明显，但对应值的精确度不高。

（4）叙述法　用语言直接表达函数的对应规则，这种表示法叫做叙述法。如狄立克莱函数（当自变量取有理数时，对应的函数值是1，当自变量取无理数时，对应的函数值是0）就是用这种方法表示的。

12．怎样理解函数的符号？

$y=f(x)$不能说成“y 等于 f 与 x 的积”，它表达了

“y是x的函数”．其中x表示自变量，y（或$f(x)$）表示自变量x的函数．符号f是英语function（函数）这个词的第一个字母．

使用函数的表示符号时，应注意下列几点：

(1) f表示自变量与函数值的对应关系，如果函数$y=f(x)$是解析法表示的，则它的对应关系f就是指按一定顺序施加于自变量x的运算总体，如$y=f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$，这时对应关系f表示下面一系列运算总体：①自变量x的平方；②由所得结果减去1；③求所得差的立方根．

(2) f在不同的问题中可以代表不同的对应关系；在同一个问题中，f只代表一个对应关系，如果要同时研究几个函数时，就要用几个不同的记号f、F、g、……等分别表示它们的对应关系．

(3) 当x表示一个数时，$f(x)$也表示一个数；当x表示自变量时，$f(x)$表示自变量x的(以f为对应关系)函数．

(4)如果没有确定f表示什么具体对应关系，则$f(x)$表示“x的某个函数”．

13．怎样求函数的定义域？

函数的定义域由下列两方面来确定：

(1) 根据问题的实际意义．例$y=ax^2$，当$a=\pi$时，表示以x为半径的圆面积是y，这时定义域$x>0$；当$a=\frac{1}{2}g$（g是重力加速度）时，表示自由落体经过时间x所落下的距离是y，这时定义域$0\leqslant x\leqslant T$，其中T表示从开始下落到落地所花费的时间．

（2）根据函数表达式的意义．如果一般地研究用某一个解析式 $f(x)$ 所确定的函数 $y=f(x)$，那么，函数的定义域就是使解析式 $f(x)$ 有意义的 x 值的全体．

一般地说，若 $y=\dfrac{1}{f(x)}$，则定义域是使 $f(x)\neq 0$ 的 x 的值；若 $y=\sqrt{f(x)}$，则定义域是使 $f(x)\geqslant 0$ 的 x 的值；若 $y=\log_a f(x)$，则定义域是使 $f(x)>0$ 的 x 的值（有时还要考虑底数 $a>0$，$a\neq 1$）；……．

例 求函数 $y=\dfrac{\sqrt[3]{x-2}\sqrt{x+1}}{\lg(2x^2-x)}$ 的定义域．

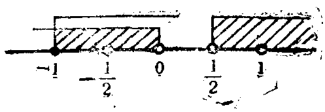
解：为了使函数有意义，x 必须满足：

$$\begin{cases}2x^2-x>0,\\ \lg(2x^2-x)\neq 0,\\ x+1\geqslant 0.\end{cases}\qquad 即\begin{cases}x(2x-1)>0,\\ 2x^2-x\neq 1,\\ x+1\geqslant 0.\end{cases}$$

所以
$$\begin{cases}x>\dfrac{1}{2}\text{ 或 }x<0,\\ x\neq 1\text{ 且 }x\neq -\dfrac{1}{2},\\ x\geqslant -1.\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}x>\dfrac{1}{2},\\ x\neq 1\text{ 且 }x\neq -\dfrac{1}{2},\\ x\geqslant -1\end{cases}\quad 和\begin{cases}x<0,\\ x\neq 1\text{ 且 }x\neq -\dfrac{1}{2},\\ x\geqslant -1.\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}x>\dfrac{1}{2},\\ x\neq 1\end{cases}\quad 和\begin{cases}x<0,\\ x\neq -\dfrac{1}{2}\\ x\geqslant -1.\end{cases}$$



可以看出原函数的定义域是

$\{x:-1\leqslant x<-\frac{1}{2}\}\cup\{x:-\frac{1}{2}<x<0\}\cup\{x:\frac{1}{2}<x<1\}\cup\{x:x>1\}$.

14．怎样求函数的值域？

利用函数的解析式或从函数式中解出 x，均可求出函数的变化范围（值域）.

例 1 求函数 $y=\frac{1}{2x-x^2-5}$ 的值域.

解法一：（利用函数的解析式）为了求值域，把这个函数写成

$$y=-\frac{1}{(x-1)^2+4}$$

的形式.

在函数的定义域 $\{x:x\in R\}$ 里，有 $0<\frac{1}{(x-1)^2+4}\leqslant\frac{1}{4}$，于是这个函数的值域是 $-\frac{1}{4}\leqslant y<0$，即

$\{y:-\frac{1}{4}\leqslant y<0\}$.

解法二：从函数式中解出 x，得 $x=1\pm\sqrt{-(\frac{1}{y}+4)}$，由此得出 $-(\frac{1}{y}+4)\geqslant 0$，解这个不等式得 $-\frac{1}{4}\leqslant y<0$，于是这个函数的值域是 $-\frac{1}{4}\leqslant y<0$，即 $\{y:-\frac{1}{4}\leqslant y<0\}$.

例 2 求函数 $y=\lg(1-2\cos x)$ 的值域.

解法一：根据函数的解析式，知 $1-2\cos x>0$，即 $\cos x<\frac{1}{2}$，又根据余弦函数的性质知，$-1\leqslant\cos x<\frac{1}{2}$，于是这个函数的值域是 $-\infty<y\leqslant\lg 3$.