

初等数学习题汇编

—三角—

2055

新 蕾 出 版 社

初等数学习题汇编

—三 角—

[苏]П.С.莫坚诺夫 著

周概容 译

萧慧敏 校

新 蕾 出 版 社

初等数学学习题汇编

—三 角—

〔苏〕И·С·莫坚诺夫 著

周概容 译

萧慧敏 校

*

新 华 出 版 社 出 版

天 津 新 华 印 刷 四 厂 印 刷

新 华 书 店 天 津 发 行 所 发 行

开本 787×1092 毫米 1/32 印张 11.25 字数 234,000

1984年1月第1版

1984年1月第1次印刷

印数：1—51,300

统一书号：13213·5 定价：0.90元

中译本序

学习数学必须做一定的练习。通过练习，才能较好地掌握所学的知识和方法，才能逐步把书本的东西化为自己头脑里的东西。这是人所共知的道理。

学生之间的差异是客观存在的。有些学生对数学有较浓厚的兴趣，不满足于只做课本上的习题，又有时间和精力做更多更难的习题，这种愿望是好的。这部习题汇编中译本的出版，希望能对这些学生有所帮助。有些业余的数学爱好者，也可以利用它来提高自学水平。对于中学数学教师，本书也是一部较好的参考书。

我们鼓励青年们做一定数量的综合题，这有助于他们融会贯通数学中各分科的内容和方法，以及在以后工作中解决实际问题。

我们说学数学要做练习，决不是说做得越多越好。做多少才适当，这是因人而异的。有人立志要以数学为自己的专业（这总是少数），有的人只是要以数学为钻研其它学科的工具；有的人做少量典型的题，就能举一反三，有的人要多做几个才能达到同样目的；有的人要求掌握更多的技巧，有的人没有这种要求。因此不能划一要求，每人要根据自己的情况来确定选做多少，选做哪些才适当。

做数学练习要求运算熟练而准确，逻辑严密而简明，作图正确而整洁。达到这些要求是要有个过程的。我们希望有志

于学好数学的青少年以严肃的科学态度来对待练习的写作，一丝不苟，错了就改，发现更好的方法就重写(只要有时间)，精益求精。好的练习应有简明扼要的文字说明，使人一看就懂，不费猜测。科学态度和逻辑表达能力都是一切科学工作者应当具备的品质。

吴大任

1979年6月于南开大学

翻 译 说 明

这部习题汇编是根据〔苏〕П.С.莫坚诺夫著《初等数学专门教程习题汇编》第二版翻译而成的。中译本分为三册：

《代数》：第一——第十六章；

《几何》：第十七——第二十七章；

《三角》：第二十八——第三十一章。

每册中包括相应的习题解答。全书共编进各种习题近10000个。习题解答包括提示、题解和答案三种形式。有的章节附有简短的说明和例题。在编写这部习题汇编时，原作者参阅了国内外的大量文献，吸收了法国、英国、德国、意大利、波兰、美国、葡萄牙、西班牙、瑞士和中国等一系列国家的初等数学习题。这部习题汇编内容丰富而系统，适合中学数学教师，师范院校数学专业学生以及有一定基础的中学学生和数学爱好者参考使用。

全部习题根据内容划分章节。代数和三角的内容分别与С.И.诺涅塞洛夫著《初等代数专门教程》（赵慈庚等译《人民教育出版社》）和《三角学专门教程》（郑星华等译《人民教育出版社》）完全一致。几何部分的有关内容可参阅梁绍鸿编《初等数学复习及研究》（平面几何）和朱德祥编《初等数学复习及研究》（立体几何）（《人民教育出版社》）。

在翻译过程中，除代数习题增加了《复数》一章（第十

五章)之外,保留了原著的章节顺序和内容。另外,还参照(俄文版)

沙赫诺《高难度初等数学习题集》,

列曼《莫斯科数学竞赛题集》,

雅格洛姆《非初等问题的初等解法》,

莫坚诺夫、诺涅塞洛夫《投考高校数学参考书》等书,调整了少量习题,选择了一些新题,增补了部分题解。

考虑到部分读者的情况,译者对一些不常见的概念和性质作了注释和说明。在翻译的过程中改2-3原书中的一些贻误之处。

吴大任教授、胡国定教授对我们的工作始终关心和鼓励。吴大任教授为本书写了“中译本序”。王大璠同志和袁著社等同志对本书的翻译工作始终给予很大支持。周学光教授、赵殿兴先生和侯自新同志分别审阅了代数、几何和三角部分的译稿,并提了不少宝贵意见。在此,我们对以上同志深表谢意。

由于我们水平所限,译文中定有不少不妥之处,恳请读者批评指正。

译 者

目 录

第二十八章 恒等变换	1 (195)
§ 1. 恒等变换	1 (195)
I°. 恒等式	1
II°. 条件恒等式	7 (195)
§ 2. 求和	17 (196)
第二十九章 反三角函数	23 (201)
第三十章 三角方程和超越方程 三角不等式和超越 不等式	42 (207)
§ 1. 一元三角方程	47 (207)
§ 2. 三角方程组	62 (215)
§ 3. 解三角不等式	68 (221)
§ 4. 三角不等式的证明	71 (226)
§ 5. 反三角方程和反三角不等式	77 (231)
§ 6. 超越方程	81 (234)
§ 7. 讨论初等函数	82 (235)
§ 8. 杂题	86 (237)
第三十一章 三角在几何中的应用	92 (240)
§ 1. 三角形各元素之间的三角函数关系	92
§ 2. 解三角形	106 (240)
§ 3. 三角在平面几何中的应用	122 (255)
§ 4. 三角在立体几何中的应用	160 (317)

I°.	平面, 直线, 二面角	160 (317)
II°.	平行六面体	164 (323)
III°.	棱柱	166 (325)
IV°.	三棱锥	168 (327)
V°.	多棱锥	172 (328)
VI°.	圆柱	177 (334)
VII°.	圆锥	178 (335)
VIII°.	球和多面体、圆柱以及圆锥的配合	184 (339)
解答部分		(194)

注: 前一个数码为正文页数, 后一个数码为解答页数。

第二十八章 恒等变换

§ 1. 恒等变换

I°. 恒等式

证明下列恒等式:

$$1. \sin a \cos(b-a) + \cos a \sin(b-a) = \sin b.$$

$$2. \cos(a+b) + \sin(a-b) \\ = (\cos a + \sin a)(\cos b - \sin b).$$

$$3. \operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}^2 b = \frac{\sin(a+b)\sin(a-b)}{\cos^2 a \cos^2 b}.$$

$$4. \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b} + \frac{\sin(b-c)}{\cos b \cos c} + \frac{\sin(c-a)}{\cos c \cos a} = 0.$$

$$5. \frac{\sin(a-b)}{\sin a \sin b} + \frac{\sin(b-c)}{\sin b \sin c} + \frac{\sin(c-a)}{\sin c \sin a} = 0.$$

$$6. \sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b \\ = \cos^2 b - \cos^2 a.$$

$$7. \sin(a+b)\sin(a-b) + \sin(b+c)\sin(b-c) \\ + \sin(c+a)\sin(c-a) = 0.$$

$$8. \sin(a+b)\sin(a-b) + \sin(b-c)\sin(b+c) \\ + \sin(c+d)\sin(c-d) + \sin(d+a)\sin(d-a) = 0.$$

$$9. \sin^2(a+b) = \cos^2 a + \cos^2 b - 2\cos a \cos b \cos(a+b)$$

$$= \sin^2 a + \sin^2 b + 2 \sin a \sin b \cos(a+b).$$

$$10. \quad \sin(60^\circ - a) \cos(30^\circ + a) \\ + \cos(60^\circ - a) \sin(30^\circ + a) = 1.$$

$$11. \quad \cos^2 a + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + a\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - a\right) = \frac{3}{2}.$$

$$12. \quad \operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \sqrt{3} \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ = \sqrt{3}.$$

$$13. \quad \operatorname{tg}(a+b) \operatorname{tg}(a-b) = \frac{\sin^2 a - \sin^2 b}{\cos^2 a - \sin^2 b}.$$

$$14. \quad \frac{\operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}^2 b}{\operatorname{ctg}^2 a \operatorname{ctg}^2 b - 1} = \operatorname{tg}(a+b) \operatorname{tg}(a-b) \operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg}^2 b.$$

$$15. \quad \operatorname{tg}(a-b)(1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b) + \operatorname{tg}(b-c)(1 + \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c) \\ + \operatorname{tg}(c-a)(1 + \operatorname{tg} c \operatorname{tg} a) = 0.$$

$$16. \quad \cos(a-b) \cos(a+b) - \sin(a-b) \sin(a+b) \\ = \cos 2a.$$

$$17. \quad \frac{1 - 2\sin^2 a}{1 + \sin 2a} = \frac{1 - \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg} a}.$$

$$18. \quad \cos^6 a - \sin^6 a = \cos 2a \left(1 - \frac{1}{4} \sin^2 2a\right).$$

$$19. \quad \cos^6 a + \sin^6 a = \cos^2 2a + \frac{1}{4} \sin^2 2a.$$

$$20. \quad \frac{\cos^2 2a - 4\cos^2 a + 3}{\cos^2 2a + 4\cos^2 a - 1} = \operatorname{tg}^4 a.$$

$$21. \quad \frac{(1 + \operatorname{tg} a)^2 - 2\operatorname{tg}^2 a}{1 + \operatorname{tg}^2 a} = \sin 2a + \cos 2a.$$

$$22. \quad \operatorname{tg} 2a + \sec 2a = \operatorname{tg}(45^\circ + a).$$

$$23. \quad \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - a\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = \sin 2a.$$

$$24. 1 + \cos 2a \cos 2b = 2 \sin^2 a \sin^2 b + 2 \cos^2 a \cos^2 b.$$

$$25. \cos^2(a-b) - \sin^2(a+b) = \cos 2a \cos 2b.$$

$$26. \sin^2(a+b) + \cos^2(a-b) = 1 + \sin 2a \sin 2b.$$

$$27. \cos^2(a+b) - \sin^2 a = \cos b \cos(2a+b).$$

$$28. \operatorname{tg}^2(a+b) + \operatorname{tg}^2(a-b) = \frac{2(\sin^2 2a + \sin^2 2b)}{(\cos 2a + \cos 2b)^2}.$$

$$29. \sin \frac{3\pi}{10} \sin \frac{\pi}{10} - \sin \frac{3\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{7\pi}{10} \sin \frac{3\pi}{10} = 0.$$

$$30. \frac{\cos 3a}{\cos a} = 2 \cos 2a - 1 = \frac{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} 2a}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} 2a}.$$

$$31. \sin a \sin 3a = \sin^2 2a - \sin^2 a.$$

$$32. \cos a \cos 3a = \cos^2 2a - \sin^2 a.$$

$$33. \operatorname{tg} a \operatorname{tg} 3a = \frac{\operatorname{tg}^2 2a - \operatorname{tg}^2 a}{1 - \operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg}^2 2a}.$$

$$34. \frac{\sin 3a + \sin^3 a}{\cos^3 a - \cos 3a} = \operatorname{ctg} a.$$

$$35. 4 \sin^3 a \cos 3a + 4 \cos^3 a \sin 3a = 3 \sin 4a.$$

$$36. 32 \sin^2 a \cos^4 a = 2 + \cos 2a - 2 \cos 4a - \cos 6a.$$

$$37. \sin 6a = 2 \sin a (16 \cos^5 a - 16 \cos^3 a + 3 \cos a).$$

$$38. \cos 4a = 8 \cos^4 a - 8 \cos^2 a + 1 = 8 \sin^4 a - 8 \sin^2 a + 1.$$

$$39. \operatorname{tg} 4a = \frac{4 \operatorname{tg} a (1 - \operatorname{tg}^2 a)}{1 - 6 \operatorname{tg}^2 a + \operatorname{tg}^4 a}.$$

$$40. \operatorname{tg} a + 2 \operatorname{tg} 2a + 4 \operatorname{tg} 4a + 8 \operatorname{ctg} 8a = \operatorname{ctg} a.$$

$$41. \sin a = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}} = \frac{2 \operatorname{ctg} \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{a}{2}} = \frac{2}{\operatorname{tg} \frac{a}{2} + \operatorname{ctg} \frac{a}{2}}.$$

$$42. \frac{1 + \sin a}{1 + \cos a} = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{tg} \frac{a}{2} \right)^2.$$

$$43. \frac{\cos a}{1 + \cos a} = \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} \right).$$

$$44. \frac{\sec a + \operatorname{tg} a}{\sec a - \operatorname{tg} a} = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2} \right).$$

$$45. \operatorname{tg} a \operatorname{tg}^4 \frac{a}{4} + 4 \operatorname{tg}^3 \frac{a}{4} - 6 \operatorname{tg} a \operatorname{tg}^2 \frac{a}{4} - 4 \operatorname{tg} \frac{a}{4} + \operatorname{tg} a = 0.$$

$$46. \cos a \cos b \cos c = \frac{1}{4} \cos(a + b + c) + \frac{1}{4} \cos(b + c - a) + \frac{1}{4} \cos(a + c - b) + \frac{1}{4} \cos(a + b - c).$$

$$47. \sqrt{3} \sin a \cos b = \frac{1}{2} \cos(60^\circ - a + b) + \frac{1}{2} \cos(a + b - 60^\circ) - \frac{1}{2} \cos(60^\circ + a + b) - \frac{1}{2} \cos(60^\circ + a - b).$$

$$48. 4 \sin a \sin(60^\circ - a) \sin(60^\circ + a) = \sin 3a.$$

$$49. \cos^4 a = \frac{1}{8} \cos 4a + \frac{1}{2} \cos 2a + \frac{3}{8}.$$

$$50. \sin^4 a = \frac{1}{8} \cos 4a - \frac{1}{2} \cos 2a + \frac{3}{8}.$$

$$51. \cos^5 a = \frac{1}{16} \cos 5a + \frac{5}{16} \cos 3a + \frac{5}{8} \cos a.$$

$$52. \sin^5 a = \frac{1}{16} \sin 5a - \frac{5}{16} \sin 3a + \frac{5}{8} \sin a.$$

$$53. \sin^3 a \cos^3 a = \frac{3}{32} \sin 2a - \frac{1}{32} \sin 6a.$$

$$54. \sin a \sin(b-c) + \sin b \sin(c-a) + \sin c \sin(a-b) = 0.$$

$$55. \sin a \sin b \sin(c-d) + \sin b \sin c \sin(d-a) + \sin c \sin d \sin(a-b) + \sin d \sin a \sin(b-c) = 0.$$

$$56. \sin^2 2a \cos^2 a - \cos^2 2a \sin^2 a = \sin a \sin 3a.$$

$$57. \cos(a-b) - \sin(a+b) = 2 \sin(45^\circ - a) \cos(45^\circ + b).$$

$$58. \sin 50^\circ \sin 24^\circ (\operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 66^\circ) + \sin 74^\circ = 2 \cos 16^\circ.$$

$$59. \sin(a+b) \sin(b+c) - \sin a \sin c = \sin b \sin(a+b+c).$$

$$60. \sin a + \cos a + \sin b + \cos b = 2 \sqrt{2} \cos \frac{a-b}{2} \cos \left(45^\circ - \frac{a+b}{2} \right).$$

$$61. \operatorname{tg}(a-b) + \operatorname{tg}(b-c) + \operatorname{tg}(c-a) = \operatorname{tg}(a-b) \operatorname{tg}(b-c) \operatorname{tg}(c-a).$$

$$62. 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c = 4 \sin \frac{a+b+c}{2} \sin \frac{b+c-a}{2} \sin \frac{a-b+c}{2} \times \sin \frac{a+b-c}{2}.$$

$$\begin{aligned}
 63. \quad & 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c - 2\cos a \cos b \cos c \\
 &= 4\cos \frac{a+b+c}{2} \cos \frac{b+c-a}{2} \cos \frac{a-b+c}{2} \\
 &\quad \times \cos \frac{a+b-c}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 64. \quad & 4\cos a \cos b \cos c + \cos 2a + \cos 2b + \cos 2c + 1 \\
 &= 8\cos \frac{a+b+c}{2} \cos \frac{b+c-a}{2} \cos \frac{a-b+c}{2} \\
 &\quad \times \cos \frac{a+b-c}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 65. \quad & \cos^2(b-c) + \cos^2(c-a) + \cos^2(a-b) \\
 &= 2\cos(b-c)\cos(c-a)\cos(a-b) + 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 66. \quad & 2(\sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x)^2 - (\sin^8 x + \cos^8 x) \\
 & \quad (\text{化简}).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 67. \quad & \frac{\sin 3a}{\sin(c-a)\sin(a-b)} + \frac{\sin 3b}{\sin(a-b)\sin(b-c)} \\
 & + \frac{\sin 3c}{\sin(b-c)\sin(c-a)} = 4\sin(a+b+c).
 \end{aligned}$$

$$68. \quad \operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right).$$

$$\begin{aligned}
 69. \quad & \sin^3 a \sin^3(b-c) + \sin^3 b \sin^3(c-a) \\
 & \quad + \sin^3 c \sin^3(a-b) \\
 &= 3\sin a \sin b \sin c \sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 70. \quad & \cos^2(a-x) + \cos^2(b-x) - 2\cos(a-b)\cos(a-x) \\
 & \quad \times \cos(b-x) \quad (\text{化简}).
 \end{aligned}$$

$$71. \quad \frac{(\sin 2a + \sin 4a + \sin 6a)^3 - \sin^3 2a - \sin^3 4a - \sin^3 6a}{\sin 3a \sin 4a \sin 5a \cos^2 a \cos 2a}$$

(化简)。

$$72. \quad 2\sin^2 a \frac{1 + \operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg}(45^\circ - a)}{\operatorname{ctg} 2a \cos 2a - 2 + 2\sin 2a} = \operatorname{tg}^2 2a \operatorname{tg}^3(45^\circ + a).$$

II°. 条件恒等式

设 $a = b + c$, 求证:

$$1. \quad \sin a + \sin b + \sin c = 4 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}.$$

$$2. \quad \cos a + \cos b + \cos c = 4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2} - 1.$$

$$3. \quad \sin a + \sin b - \cos c$$

$$= 1 - 4 \cos \frac{c}{2} \sin \left(45^\circ - \frac{a}{2}\right) \sin \left(45^\circ + \frac{b}{2}\right)$$

$$4. \quad \operatorname{tg} a + \operatorname{ctg} b + \operatorname{ctg} c = \operatorname{tg} a \operatorname{ctg} b \operatorname{ctg} c.$$

$$5. \quad \sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c = 2(1 - \cos a \cos b \cos c).$$

$$6. \quad \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c - 2 \cos a \cos b \cos c = 1.$$

设 $a + b + c = \frac{\pi}{2}$, 求证:

$$7. \quad \sin a + \sin b + \sin c - 1$$

$$= 4 \sin \frac{\pi - 2a}{4} \sin \frac{\pi - 2b}{4} \sin \frac{\pi - 2c}{4}.$$

$$8. \quad \sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c = 1 - 2 \sin a \sin b \sin c.$$

$$9. \quad \operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg} b + \operatorname{ctg} c = \operatorname{ctg} a \operatorname{ctg} b \operatorname{ctg} c.$$

$$10. \quad \sin a \sin b \cos c + \sin a \sin c \cos b + \sin b \sin c \cos a \\ = \cos a \cos b \cos c.$$

$$\begin{aligned}
 11. \quad & (1 - \sin b)(1 - \sin c) \cos a \\
 & + (1 - \sin c)(1 - \sin a) \cos b \\
 & + (1 - \sin a)(1 - \sin b) \cos c \\
 & = \cos a \cos b \cos c.
 \end{aligned}$$

设 $a + b + c = \pi$, 求证:

$$12. \quad \sin a + \sin b = 2 \cos \frac{c}{2} \cos \frac{a-b}{2}.$$

$$13. \quad \frac{\sin a + \sin b}{\cos a + \cos b} = \operatorname{ctg} \frac{c}{2}.$$

$$14. \quad \sin^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a = \sin(a-b) \sin c.$$

$$15. \quad \sin a + \sin b + \sin c = 4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}.$$

$$16. \quad \cos a + \cos b + \cos c = 4 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2} + 1.$$

$$17. \quad \cos a + \cos b + \cos c = 1 + 2 \frac{\sin a \sin b \sin c}{\sin a + \sin b + \sin c}.$$

$$\begin{aligned}
 18. \quad & \operatorname{ctg} \frac{a}{2} + \operatorname{ctg} \frac{b}{2} + \operatorname{ctg} \frac{c}{2} \\
 & = \frac{\sin a + \sin b + \sin c}{\sin b + \sin c - \sin a} \operatorname{ctg} \frac{a}{2}.
 \end{aligned}$$

$$19. \quad \cos 2a + \cos 2b + \cos 2c = -1 - 4 \cos a \cos b \cos c.$$

$$20. \quad \sin^2 a + \sin^2 b - \sin^2 c = 2 \sin a \sin b \cos c.$$

$$\begin{aligned}
 21. \quad & \sin^3 a + \sin^3 b + \sin^3 c = 3 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2} \\
 & + \cos \frac{3a}{2} \cos \frac{3b}{2} \cos \frac{3c}{2}.
 \end{aligned}$$

$$22. \quad \operatorname{tg} \frac{a}{2} + \operatorname{tg} \frac{b}{2} - \operatorname{ctg} \frac{c}{2} = -\operatorname{tg} \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{b}{2} \operatorname{ctg} \frac{c}{2}.$$