无穷逻辑

INFINITARY LOGIC

李小五 著

社会科学文献出版社

无穷逻辑

INFINITARY LOGIC

（下）

李小五著

社会科学文献出版社

图书在版编目(CIP)数据

无穷逻辑(下)/李小五著. -北京:社会科学文献出版社,1998.10
ISBN 7-80149-070-3

Ⅰ.无… Ⅱ.李… Ⅲ.无限逻辑 Ⅳ.0141

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 23101 号

无穷逻辑(下)

编　　者:李小五
责任编辑:张清宇　屠敏珠
封面设计:孙元明
责任校对:伍　合
责任印制:盖永东

出版发行:社会科学文献出版社
(北京建国门内大街5号　电话 65139963　邮编 100732)
经　　销:新华书店总店北京发行所
排　　版:北京中文天地文化艺术有限公司
印　　刷:人民文学印制厂

开　　本:850×1168 毫米　1/32 开
印　　张:21
字　　数:540 千字
版　　次:1998 年 10 月第 1 版　1998 年 10 月第 1 次印刷
印　　数:0001—1000

ISBN 7—80149—070—3/B·011　　**定价**:36.00 元

前　言

本书接着作者 1996 年出版的《无穷逻辑》(上)的工作往下进行，主要证明、分析、讨论 80 年代以来无穷逻辑研究的最新进展.

根据读者的反映，笔者在撰写本书时，对上册前言原定下册的计划作了一些调整. 主要是删去一些模型论方面的内容(删去原计划的第 19 章等)，增加一些证明论方面的内容(增加原计划没有的第 21—23 章).

本书第 14 章讨论部分同构扩张定理. 这是一种非常重要的模型论方法，它与无穷语言的关系非常密切. 我们先从一个具体的例子开始，引出 BF-方法. 然后把它概括到一般情况，从而证明了 Karp-定理，并且讨论了它的几个变种. 最后我们给出一些反例说明前 3 节有些定理中的假设条件是本质的.

评价一种方法是否重要最好是举例或运用. 第 15 章致力于这个目标，以说明 BF-方法已成为研究无穷逻辑的一种重要的工具. 在本章 § 1，我们用 BF-方法研究一类结构的自同构性质，特别是可数结构的自同构的个数、自同构的可定义性以及刚性结构的一些重要性质. 这些性质可用以构造一个极为重要的反例. 在 § 2，我们研究 BF-方法对(无穷多个)结构构成的直积和直和的运用. 本节我们要论证的主要结果是：若 Φ 是 $\mathscr{L}_{\infty\lambda}$的正规公式类，则根据 BF-方法能得到许多有意义的结果. 在 § 3— § 4，我们研究 BF-方法对模为正则或不完全的滤子的归约直积的运用，以及对由不可辨元生成的结构的运用.

第 16 章和第 17 章我们介绍 80 年代建立起来的无穷逻辑的

分类理论[1] 的一重要结果：对某些结构类，我们能在同构的意义上找到确定该类元素的不变性.

第 16 章主要讨论在某些限制条件下，幂为 λ 且 $\mathscr{L}_{\infty\lambda}$-初等等价的不同构结构的个数. 这些结果扩展了对无穷逻辑模型论的研究. 从第 16 章所用的方法来看，本章内容可以说是前两章内容的继续，因为它们的证明在不同程度上都用到 BF-方法.

第 17 章主要研究 $\mathscr{L}_{\kappa^+\omega}$-理论的等幂不同构模型的个数问题. 它也是无穷逻辑模型论的一个重要问题. 我们在在 §1，首先考虑一阶不稳定理论的等幂不同构模型的个数. 这里的工作是为 §2 作准备的. 在 §2，我们研究 $\mathscr{L}_{\kappa^+\omega}$-不稳定理论的情况，由此得出的结果令人感兴趣. 在 §3，我们把 §2 的结果概括到更一般的情况：考虑更一般的结构类的等幂不同构模型的情况.

第 18 章讨论 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$-理论的范畴性. 考虑合并性、饱和性、型、不可辨性、稳定性与范畴性的关系，证明在一定的条件下，$\mathscr{L}_{\kappa\omega}$-理论是 μ-范畴的. 这里的结果是对经典逻辑模型论相应结果的概括.

从第 19 章到第 20 章我们讨论另一类重要的逻辑——无穷深逻辑.

无穷深逻辑的语言与非无穷深逻辑[2] 的语言相同，所不同的是公式的形成规则及其语义解释. 无穷深逻辑的主要思想是用树作为公式的形成规则来构造无穷公式，并用对策论方法给出不同的语义来解释它们. 无穷深逻辑的树状公式有很强的表达力，其模型论保持前面章节讨论过的许多重要的结果，从而丰富了我们对无穷这个概念的理解. 另一方面，由于语义的多样性，产生了可满足关系的多样性，使得我们对逻辑这个概念有了更深刻的理解.

在第 19 章 §1，我们引入无穷深语言 $\mathscr{N}_{\kappa\alpha}$和 $\mathscr{M}_{\kappa\alpha}$的语法，主要

---

〔1〕 这里所谓的分类理论是指将结构类按照令人感兴趣的模型论结果进行分类的理论.

〔2〕 参见本书后面的附录 2 开头.

讨论无穷深公式的形成规则. 在§2,我们根据对策论方法给出$\mathscr{N}_{\kappa\alpha}$和$\mathscr{M}_{\kappa\alpha}$的不同的语义,初步说明不同语义间的基本关系. 在§3,我们讨论$\mathscr{N}_{\kappa\alpha}$和$\mathscr{M}_{\kappa\alpha}$的表达力,对有穷性、良序等概念的刻画. 此节还讨论这些语言相对不同的语义具有的等价性,相互表达关系,以及无穷深公式与特殊形式的无穷深公式:对策公式、Keisler-良序量词公式、Vaught 公式和 Aczel-公式的关系. 在§4,我们讨论语义对策的确定性问题.

第 20 章主要从模型论的角度研究无穷深逻辑与经典无穷逻辑的异同. 我们要考虑经典无穷逻辑$\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$的一些基本结果,然后证明它们也能概括到$\mathscr{M}_{\kappa\lambda}$和($\mathscr{N}_{\kappa\lambda}$, S_1)上,而($\mathscr{N}_{\kappa\lambda}$, S_0)却没有这样好的结果,由此证明($\mathscr{N}_{\kappa\lambda}$, S_1)和($\mathscr{N}_{\kappa\lambda}$, S_0)的差距是相当大的. 在本章§1,我们考虑无穷深逻辑的模型论的基本结果. 主要考虑向下-LS-定理、超积基本定理和无穷深语言的紧致性问题. 在§2,我们研究类树部分同构与$\mathscr{N}_{\infty\alpha}$-初等等价性以及相应的关系. 类树部分同构方法也是对第 14—15 章的部分同构方法的概括.

我们在上册已经指出,无穷逻辑是一种非常重要的逻辑,其中一个原因就是它的演绎系统是许多逻辑的演绎系统的基础. 也就是说,有许多演绎系统都是在某个无穷逻辑的演绎系统上,通过增加或修改逻辑算子、联结词或量词建立起来的. 这样的逻辑我们称为无穷逻辑的扩展系统. 无穷逻辑的扩展系统很多,从第 21 章到第 22 章,我们介绍其中的一些重要的扩展系统. 主要介绍扩展系统的语义模型、演绎系统,并以证明完全性定理为核心. 对扩展逻辑的模型论结果,我们在这两章主要考虑完全性定理的应用.

第 21 章我们来研究一种比较特殊的逻辑——链逻辑. 在§1,我们给出链逻辑的基本概念,引入链一致性质,并证明链模型存在定理. 在§2,我们给出刻画链模型的演绎系统,证明一些基本的证明论结果,最后证明这样的演绎系统相对一类链模型是完全的. 在§3,我们讨论可容链逻辑的一些基本性质.

第 22 章的内容可分两大部分,第一部分由§1—§2 组成,着

重讨论无穷深逻辑的系统，这也可以看作是经典无穷逻辑的扩展系统. 在§1，我们研究 Suslin-逻辑的演绎系统、完全性定理以及模型论基本结果. 在§2，我们研究对策逻辑的演绎系统、完全性定理和模型论的基本结果. 第二部分由§3—§4 组成，着重讨论包含其他种类的量词的演绎系统. 这些量词或者代替经典量词(全称量词和存在量词)，如我们在§3 研究的概率量词逻辑；或者扩展经典量词. 如我们在§4 研究的滤子逻辑.

第 23 章，我们讨论无穷逻辑的一种自然演绎系统——矢列演算. 在§1，我们讨论经典无穷逻辑的矢列演算. 这里的工作是与上册第 4—5 章的工作平行的. 在§2，我们讨论无穷深逻辑的矢列演算的一个特例——确定逻辑，它是对第 19 章§4 的语义对策确定性的语法刻画. 在§3，我们概括§1 和§2 的内容，讨论无穷深逻辑的矢列演算的一般理论.

第 24 章我们研究力迫法与无穷逻辑的关系. 自从 Barwise 在 1970 年把 Robinson-力迫理论扩张到无穷逻辑以后，已有许多人在各个不同的方面考虑力迫法与无穷逻辑的关系，得到许多令人感兴趣的结果. 本章我们介绍上述工作中具有代表性的结果. 在§1—§2，我们用模型论力迫法分别证明 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-省略型定理，和 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-逼近定理、$\mathscr{L}_G$-逼近定理. 在§3，我们讨论模型论力迫法与某些 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$-结构类的关系. 在§4，我们用集合论力迫法证明演绎系统 $\mathbf{B}_{\infty\infty}$(Taut)的不完全性.

本书后面还有两个附录：附录 1 讨论基数和、直积与 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$-初等等价之间的关系，这是上册需要的结果. 附录 2 则简单回顾无穷逻辑的发展史，使读者能全面把握无穷逻辑产生、成熟和发展的脉络，更好地理解无穷逻辑在整个逻辑史上的地位，在此附录我们也指出当今无穷逻辑研究的热点.

本书末附参考文献、重要记号索引和主题词索引，便于读者查阅.

本书最后是一个勘误表，它改正了上册在表述和排录中存在

的一些错误. 在此我要感激中国社会科学院哲学所逻辑室张清宇研究员在阅读本书上、下册时发现的一些错误. 这些错误中属于上册的在上述勘误表中改正,属于下册的则在正文中改正.

本书可以作为逻辑学、哲学、数学以及相关领域的科研人员的参考书,也可作为上述领域研究生的教材或参考书.

由于作者水平有限,错误和不当之处在所难免,所以衷心希望读者批评指正,以便将来有机会修版.

本书的出版得到北京大学哲学系逻辑教研室宋文坚教授和中国社会科学院哲学所逻辑研究室张家龙研究员的推荐,得到中国社会科学院哲学所学术委员会的审定,得到中国社会科学院科研局的资助,得到中国社会科学文献出版社,特别是屠敏珠女士、陈海力女士和孙元明先生的帮助,在此向上述个人和单位表示我衷心的感谢.

李小五

1995 年 12 月

目　　录

第 14 章 部分同构扩张定理*

本章我们介绍一种非常重要的模型论方法：**部分同构扩张方法**[1]. 部分同构扩张方法也称为**back and forth-方法**，后面我们经常简称其为**BF-方法**或**BF-论证**. 这种方法的某些运用实际上已经在上册一些章节出现过，但在此我们要集中全面讨论之.

BF-方法起源于集合论的初建时期. G. Cantor 第一个运用此方法证明了：

两个无端点的可数稠密线序是同构的.

Langford 在其[1926]用同样的方法证明了：

基数任意的两个这样的线序是初等等价的.

这似乎是首次在元数学的范围内运用BF-方法. Hausdorff 用更一般的 BF-方法证明了 Cantor-定理对 η_λ-集成立：

对正则基数 λ，幂为 λ 的 η_λ-集之间同构.

这种类型的 BF-方法在证明饱和结构的惟一性和万有性(universality)时再次用到，在这里用它证明了：

初等等价的等幂饱和结构之间同构.[2]

Fraïssé 在其[1955]和 Ehrenfeucht 在其[1961]从另一角度概括了 Langford 的方法和结果，用定义在诸有穷集上的、具有 BF-性质的部分同构的族，给出了初等等价的一个纯集合论刻画. Ehren-

---

* 本下册所有未交待过的概念、定义或记号请见上册.

[1] 下一章我们介绍这种方法在模型论中的几个重要的应用.

[2] 饱和结构的定义见后面 14.1.7. 注意：每一 λ-饱和结构是 λ-万有的，即这样的结构包含某个一阶理论的所有幂 $\leqslant\lambda$ 的结构的一嵌入摹本.

feucht 还给这样的部分同构族一个对策论(game theory)的解释.

但是,只是到了 Karp 的[1965]才第一次结论性地指出, BF-方法,作为一种相当自然的元数学方法,并不适用于有穷逻辑,而只适用于无穷逻辑. 更确切地说,它适用于类逻辑 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$,是刻画 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$ 的重要工具.

从那时起, BF-方法在无穷逻辑模型论中得到日益广泛地运用. Chang 在其[1968a], Barwise-Ekolof 在其[1970], Barwise 在其[1973]都发展和推广了 Karp 使用的 BF-方法和结果. 他们的这些成果对各种 BF-方法给出了一种统一的形式,提供了一种更加一般地处理问题的方法. Benda 在其[1969]和 Calais 在其[1972]还把 Karp 的工作概括到类逻辑 $\mathscr{L}_{\infty\lambda}$. Dickmann 和 D. Kueker 在其[1975]分别总结性地提出 BF-方法的一般性理论. M. Karttunen 在其[1978]还把 BF-方法运用到无穷深的类逻辑 $\mathscr{N}_{\infty\lambda}$.

本章主要介绍上述成果[1],除了 M. Karttunen 的工作,因为后者还需其他背景知识,我们将在以后的章节讨论.

BF-方法可以很自然地分成两类:"一次一个"(等价地,"一次有穷个")的形式和"一次小于 λ 个"的形式,其中 λ 可以是不可数基数. 这里要注意,前者并不是后者的特例,而是后者一限制形式的特例.

本章§1 我们从 η_λ-集的例子开始,引出 BF-方法. 用一种一般的形式讨论由具有 BF-性质和扩张性质的部分同构的族构造同构的方法. 在此我们将介绍"一次一个"形式的 BF-方法和"一次小于 λ 个"形式的 BF-方法,以及与此相关的两种部分同构关系 $\cong_2^{p,\lambda}$ 和 $\cong_\lambda^p$,讨论在一定条件下它们之间以及与普通的同构 $\cong$ 之间的关系.

§2 主要证明 Karp-定理,讨论它的几种变种. Karp-定理在说明无穷语言和 BF-方法间的密切联系方面起决定性的作用. 在本

---

[1] 这些成果的表述主要来自 Dickmann 的[1975].

节我们还讨论了有穷逻辑的情况，并证明了 Ehrenfeucht-Fraïssé-定理.

§3 我们考虑前两节所运用的概念和技巧的各种概括，用一种更一般的形式详细地研究无穷语言和 BF-方法间的联系. 无穷语言模型论中有几个重要的定理：Karp-定理、Scott-同构定理的 Chang-概括、等等. 它们原来是用不同的方式（但本质上使用相同的 BF-论证）证明的. 本节我们把这几个定理的证明统一起来.

§4 我们举一些反例来说明前 3 节有些定理中的假设条件是必要的，从而对这些定理的进一步概括作了限制.

在展开本章的内容之前，我们先固定几个在本章和下一章将要用到的记号：任给 $\mathscr{L}$ 的结构 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$，称映射 f 是从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 中的**部分同构（映射）**$\Leftrightarrow$

(1) $\mathrm{Dom}(f)$是 $\mathfrak{A}$ 的子结构，$\mathrm{Ran}(f)$是 $\mathfrak{B}$ 的子结构；

(2) f 是从 $\mathfrak{A}\upharpoonright\mathrm{Dom}(f)$到 $\mathfrak{B}$ 中的单射.

我们知道，任给 $X\subseteq A$，由 X 生成的 $\mathfrak{A}$ 的子结构是 $\mathfrak{A}$ 的、包含 X 的最小子结构. 若除了(1)—(2)，f 还满足

(3) $\mathrm{Dom}(f)$由$<\lambda$ 个元素生成（其中 λ 是无穷基数），

则 f 称为 **λ-部分同构（映射）**. 这里有一个重要的例外是从空集生成的 $\mathfrak{A}$ 的子结构到 $\mathfrak{B}$ 中的映射 $\mathbf{0}$. 当它有定义且是单射时，我们也把它看作是一个部分同构，不管它的定义域是否满足上述(1).

注意：若 $\mathbf{0}$ 有定义，则它是惟一的. 在这种情况下，

$$\begin{aligned}\mathrm{Dom}(\mathbf{0})\text{不满足(1)} &\Leftrightarrow \mathrm{Dom}(\mathbf{0})=\varnothing\\ &\Leftrightarrow \mathscr{L}\text{ 不包含个体常元符号.}\end{aligned}$$

下面我们总用 $f\subseteq g$ 指称 f 和 g 间的**扩张（关系）**：

$$f\subseteq g \Leftrightarrow \mathrm{Dom}(f)\subseteq\mathrm{Dom}(g)\text{ 且 } g\upharpoonright\mathrm{Dom}(f)=f.$$

以后我们用带下标或不带下标的英文大写黑正体 $\mathbf{I}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$, … 来表示部分同构映射的族.

§ 1 back and forth-方法的引入

本节我们从证明两个等幂（基数是正则的）η_λ-集同构开始，引入 BF-方法，介绍“一次一个”形式的 BF-方法以及这种部分同构 $\cong_2^{p,\lambda}$ 与通常的同构$\cong$在一定条件下的联系. 然后引入“一次小于 λ 个”形式的 BF-方法以及这种部分同构$\cong_\lambda^p$ 在一定条件下与$\cong$的关系，以及$\cong_2^p$ 和$\cong_2^{p,\lambda}$ 的关系. 最后讨论初等等价的饱和结构间的部分同构关系.

下面的定理是 Hausdorff 对 Cantor 关于无端点的可枚举稠密线序的同构定理的概括.

14. 1. 1 Hausdorff-定理 若 λ 是正则无穷基数，则幂为 λ 的任意两个 η_λ-集同构（其中 η_λ-集的定义见 11. 1. 7).

证明：本证明很自然地分成两个部分：

部分 1. 令 λ 是无穷正则基数，$\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 是幂任意的 η_λ-集. 定义从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 中的所有部分同构映射集 $\mathbf{I}$ 如下：

$$\mathbf{I}=\{f: f \text{ 是保序映射使得} |\mathrm{Dom}(f)|<\lambda\}.$$

我们来证明 $\mathbf{I}$ 有如下性质：

(1)（**λ-扩张性质**）任给子集 $\mathbf{F}\subseteq\mathbf{I}$ 使得 $|\mathbf{F}|<\lambda$ 且 $\mathbf{F}$ 由$\subseteq$线序，存在 $g\in\mathbf{I}$ 使得 g 扩张所有的 $f\in\mathbf{F}$；

(2)（**“一次一个”的 back and forth-性质**）[1]

① （**“forth”-性质**）对每一 $f\in\mathbf{I}$ 和 $a\in A$，存在$g\in\mathbf{I}$使得 $f\subseteq g$ 且 $a\in\mathrm{Dom}(g)$；

② （**“back”-性质**）对每一 $f\in\mathbf{I}$ 和 $b\in B$，存在$g\in\mathbf{I}$使得 $f\subseteq g$ 且 $b\in\mathrm{Ran}(g)$.

---

[1] back and forth-性质后面经常简称为 **BF-性质**.

部分 1 的证明：(1) 令 $g=\bigcup\mathbf{F}$，因为 λ 是正则基数，所以 $|\mathrm{Dom}(g)|<\lambda$，因此 g 已经在 $\mathbf{I}$ 中，这样就证明了(1).

观察(2)中的①和②，易见它们有某种对称性，所以若我们证明了①，且把这个证明中的 A 和 B 的作用互相交换，则②也就证明了，因此下面我们只须证明①：不妨假设 $a\notin\mathrm{Dom}(f)$，否则，不证自明. 令 (Y,Z) 是 $\mathrm{Dom}(f)$ 中由 a 定义的**分割**(cut)：

$$Y=\{y\in\mathrm{Dom}(f):y<^{\mathfrak{A}}a\},\quad Z=\{z\in\mathrm{Dom}(f):a<^{\mathfrak{A}}z\}.$$

因为 f 是保序的且 $Y<^{\mathfrak{A}}Z$[1]，所以 $f[Y]<^{\mathfrak{B}}f[Z]$. 因为 $|\mathrm{Dom}(f)|<\lambda$，所以 $|f[Y]|$，$|f[Z]|<\lambda$. 因为 $\mathfrak{B}$ 是 η_λ-集，所以存在 $b\in B$ 使得 $f[Y]<^{\mathfrak{B}}b<^{\mathfrak{B}}f[Z]$. 选择 $g(a)$ 是某个这样的 b，则

$$\mathrm{Dom}(g)=\mathrm{Dom}(f)\cup\{a\},\quad g\restriction\mathrm{Dom}(f)=f.$$

显然，这个 g 有我们要证的性质.

部分 2. 若 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{B}$ 是幂为 λ 的 η_λ-集且 $\mathbf{I}$ 是具有性质(1)和(2)的、从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 中的非空部分同构的族，则 $\mathfrak{A}\cong\mathfrak{B}$.

部分 2 的证明：令 $\langle a_\alpha:\alpha<\lambda\rangle$ 和 $\langle b_\alpha:\alpha<\lambda\rangle$ 分别是 A 和 B 的(无重复)枚举，f_0 是 $\mathbf{I}$ 的任意元. 据 $\mathbf{I}$ 的性质，我们定义 $\mathbf{I}$ 中一映射序列如下：

$$f_0\subseteq f_1\subseteq\cdots\subseteq f_\alpha\subseteq\cdots\qquad(\alpha<\lambda)$$

使得

(Ⅰ) 若 α 是偶后继序数(即 $\alpha=\beta+2n$，其中 β 是极限序数且 $0<n<\omega$)，则据(2)①，令

$$f_\alpha=\text{某个 } g\in\mathbf{I} \text{ 使 } f_{\alpha-1}\subseteq g \text{ 且 } a_{\beta+n-1}\in\mathrm{Dom}(g);$$

(Ⅱ) 若 α 是奇后继序数(即 $\alpha=\beta+2n+1$，其中 β 是极限序数且 $n<\omega$)，则据(2)②，令

$$f_\alpha=\text{某个 } g\in\mathbf{I} \text{ 使 } f_{\alpha-1}\subseteq g \text{ 且 } b_{\beta+n}\in\mathrm{Ran}(g);$$ [2]

(Ⅲ) 若 $\alpha<\lambda$ 是极限序数，则据(1)，令

[1] 即 Y 中每一元都 $<^{\mathfrak{A}}$ 于 Z 中任一元. 下同.

[2] 据 BF-性质(2)，在(Ⅰ)和(Ⅱ)这两种情况下都有 f_α 存在.

$$f_\alpha = \text{某个 } g \in \mathbf{I} \text{ 使 } g \text{ 对所有 } \delta < \alpha \text{ 扩张映射 } f_\delta.$$

施简单归纳，我们能证明$\langle f_\delta: \delta < \alpha \rangle$构成一个$\subseteq$-链. 据$\lambda$-扩张性质(1)，存在满足(Ⅲ)的映射.

易证$f = \bigcup_{\alpha<\lambda} f_\alpha$是保序映射，且$\mathrm{Dom}(f) = A$, $\mathrm{Ran}(f) = B$，故

$$f: \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}. \quad \square$$

说明：从上述证明显见其第2部分与线序的特性无关，要求的同构的构造完全依赖族$\mathbf{I}$的性质(1)和(2)，因此我们很容易把第2部分概括成一个一般的定义. 为此我们先给出下列记号：

记号 若存在上述具有λ-扩张性质(1)[1]和"一次一个"的BF-性质(2)的、从$\mathfrak{A}$到$\mathfrak{B}$中的部分同构所构成的非空族$\mathbf{I}$，则我们写作：

$$\mathfrak{A} \cong_2^{p,\lambda} \mathfrak{B}, \quad \text{或 } \mathbf{I}: \mathfrak{A} \cong_2^{p,\lambda} \mathfrak{B}.$$

14.1.2 定理 令$\mathfrak{A}$和$\mathfrak{B}$是幂$\leqslant\lambda$的$\mathscr{L}$-结构，或更一般地，$\mathfrak{A}$和$\mathfrak{B}$是由幂$\leqslant\lambda$的集合生成的$\mathscr{L}$-结构，则

(1) $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \Leftrightarrow \mathfrak{A} \cong_2^{p,\lambda} \mathfrak{B}$.

(2) 若$\mathbf{I}: \mathfrak{A} \cong_2^{p,\lambda} \mathfrak{B}$，则每一$f \in \mathbf{I}$能扩张为从$\mathfrak{A}$到$\mathfrak{B}$的同构.

证明：(1). "$\Rightarrow$"：令$f: \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, $\mathbf{I} = \{f\}$，显然，$\mathbf{I}$有上述性质(1)和(2)，因此$\{f\}: \mathfrak{A} \cong_2^{p,\lambda} \mathfrak{B}$. "$\Leftarrow$"：可以从下面的(2)得到.

(2). 固定$f_0 \in \mathbf{I}$，令X, Y是幂$\leqslant\lambda$的集合使得

① $\mathrm{Dom}(f_0) \cup X$, $\mathrm{Ran}(f_0) \cup Y$分别生成$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$；

② $X \cap \mathrm{Dom}(f_0) = Y \cap \mathrm{Ran}(f_0) = \varnothing$.

令$\langle a_\alpha: \alpha < \lambda \rangle$, $\langle b_\alpha: \alpha < \lambda \rangle$分别是$X$和$Y$的枚举. 从$f_0$开始，据14.1.1证明的第2部分相同的步骤，定义$\mathbf{I}$中映射序列如下：

$$f_0 \subseteq f_1 \subseteq \cdots \subseteq f_\alpha \subseteq \cdots. \qquad (\alpha < \lambda)$$

施归纳于$\alpha < \lambda$易证：

---

[1] 当λ是奇异基数时，我们还要求(1)中的$\mathbf{F}$满足下列性质：

$$|\mathrm{Dom}(\bigcup \mathbf{F})| < \lambda.$$