

数学分析

习题课讲义

谢惠民 恽自求 编
易法槐 钱定边

(上册)

 高等教育出版社

数学分析习题课讲义

(上册)

谢惠民 恽自求 编
易法槐 钱定边



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学分析习题课讲义/谢惠民等编. —北京:高等教育出版社, 2003. 7

ISBN 7-04-011922-6

I. 数… II. 谢… III. 数学分析-高等学校-教材 IV. 017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 037783 号

策 划 王 瑜 责任编辑 薛春玲
封面设计 于 涛 责任印制 宋克学

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100011
总 机 010-82028899

购书热线 010-64054588
免费咨询 800-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>

经 销 新华书店北京发行所
印 刷 北京人卫印刷厂

开 本 787×960 1/16
印 张 27.5
字 数 510 000

版 次 2003 年 7 月第 1 版
印 次 2003 年 7 月第 1 次印刷
定 价 28.80 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

内 容 简 介

本书是教育部“国家理科基地创建名牌课程项目”的研究成果,其目的是为数学分析的习题课教学提供一套具有创新特色的教材和参考书

本书以编著者们近 20 年来在数学分析及其习题课方面的教学经验为基础,吸取了国内外多种教材和研究性论著中的大量成果,非常注意经典教学内容中的思想、方法和技巧的开拓和延伸,在例题的讲解中强调启发式和逐步深入,在习题的选取中致力于对传统内容的更新、补充与层次化

本书分上下两册出版 上册内容为极限理论和一元微积分,下册内容为无穷级数和多元微积分

本书可作为高等院校理工科教师和学生在学习数学分析习题课方面的教材或参考书,也可以作为研究生入学考试和其他人员的数学分析辅导书

序

数学教育本质上是一种素质教育。学习数学的目的,不仅仅在于学到一些数学的概念、公式和结论,更重要的,是要了解数学的思想方法和精神实质,真正掌握数学这门学科的精髓。只有这样,所学的数学知识才不致沦为一大堆僵死的教条,变得似乎毫无作用,相反,能做到触类旁通,在现实世界中提出的种种问题面前显示出无穷无尽的威力,终生受用不尽。

要做到这一点,单靠教师把课讲好是远远不够的。只有调动学生学习的积极性和主动性,促使他们自觉地接受经常、充分而又严格的数学训练,才能使他们真正走近数学,取得切身的体会,从而加深对数学的理解。这些数学训练的内容,在大学学习阶段,包括复习课文、做习题、阅读参考书、相互切磋、讨论班报告以及参加与数学有关的实践活动等等,其中,在认真复习的基础上做好习题,是和课堂教学联系最直接与紧密、同时也最利于经常实施和长期坚持的一项重要数学训练。多讲不如多练,对数学这样一门注重思考的学科,情况更是如此。老师讲课再好,多媒体等先进教学手段用得再五彩缤纷,也代替不了学生自己的思考和领悟。只有通过严格的训练,使学生手脑并用,才能启迪心智,推动思维,使认识不断深入。

由于解题在训练数学思维方面的极端重要性,更由于对学生的解题(至少在初期阶段)必须进行必要的指引,长期以来,对一些大学基础数学课程都开设了相应的习题课,并安排老师精心指导。实践证明,这对保证和提高教学质量是一个颇有成效的培养方式。然而也毋庸讳言,近些年来这一个重要的教学环节在一部分学校中却有明显削弱的趋势:老师布置的习题在数量及质量两方面都降低了要求;老师批改作业只是象征性的,有的甚至干脆不改,简单地公布一个标准答案了事;习题课不少已名存实亡,有的干脆已经取消;极个别的学校甚至将数学课程的考试也采用了TOEFL考试的方式等等。这样做的结果,在硕士研究生的入学考试中也已经可以很清楚地看得出来:有些平时学习成绩“优秀”的学生、甚至一些免试直升的优等生,对一些基本概念和重要基础理论的似是而非的回答,对一些基本运算的生疏和迟疑,往往使主考老师大失所望,更使他们本人入学后的深造面临重重的困难。所有这些都,不能不使众多的有识之士深表忧虑和关切。

就数学分析这样的课程来说,一方面,它是一门重要的大学基础课程,很多后继课程都以它为基础,可视为它的延伸、深化和应用,而它的基本概念、思想和方法更是无所不在。因此,牢固地掌握它的基本内容,熟练地运用它的基本方法,透彻地理解它的基本思想,是打开大学阶段数学学习局面的关键。另一方面,为了帮助学生掌握学习的主动权,尽快实现由初等数学阶段进入高等数学阶段的飞跃,作为学生最早面对的一门高等数学课程,它在培养学生养成思考的习惯、

提高理解的能力等方面,更负有重大的启蒙责任.正因为如此,上好数学分析的课程,做好数学分析的习题,努力提高数学分析习题课的质量,就具有特别重要的意义.前辈数学大师苏步青教授告诉我们他曾做过一万道微积分的习题,他能得心应手地在微分几何的前沿领域作出举世瞩目的重大贡献,与他通过这样严格的训练所打下的坚实基础、所培养的顽强毅力以及所积累的对数学思想的洞察是分不开的.

现在的这一本书,是在作者们长期从事与指导习题课教学的基础上,为加强数学分析习题课建设而认真撰写的教材与课外读物.它的着眼点,不是像现在充斥市面的各种各样的习题解答那样,消极地为老师或学生提供一些习题的解答,而是利用习题课这种教学形式,引导学生深入理解课程内容,启发学生深入思考,扩大学生知识视野,力求使学生达到举一反三、由小见大、由表及里的境界,较快地熟悉高等数学的思想方法,迈步走进高等数学的广阔天地.对于学生,这是一本富于启发性且颇有新意的辅导读物;对于担任数学分析授课或习题课的老师,更是一本独具特色且不可多得的参考书籍.在已经出版了大量似曾相识的数学分析教材之后,本书以其鲜明的特色、新颖的视角和丰富的内容,给我们以耳目一新的感受.它的出版,对帮助广大教师提高习题课的教学质量,对推动学生自觉重视解题的训练,均可望带来积极的影响,很值得庆贺,特为之序.

李大潜

2003年4月3日

前 言

本书是以适应多层次需要和具有多种用途为指导思想编写的数学分析习题课教材。

首先,本书的直接目的是为上数学分析习题课的教师和学生同时提供服务。为此在书中对于基本例题和基本方法作了比较详细的讲解,特别注重如何帮助初学者入门和逐步提高(例如 §1.3、§1.4 节和 2.1.3 小节),按照难度的不同层次收入相当数量的习题,并在每一章的最后一节总结学习要点。对许多经典性的内容采取比较新颖的证明和分析方法,在例题和习题的选取中也力求创新,改变过去微积分学教程和吉米多维奇习题集一统天下的传统格局。在编写中非常重视一题多解和前后呼应,并对学生中常见的典型错误进行分析。此外,特别为教师提供的服务还有在 1.1 节中对组织习题课教案的意见,在第二章末尾的数列极限的习题课教案,以及每一章后对习题课的建议等。

其次,本书可作为学生在解题和扩大知识领域方面的参考书。我们不赞成像工厂生产标准化产品那样来开展教学工作。千人一面的做法不可能造就具有高度创造性的人才。能力的培养不可能离开解题的训练。学生根据自己的情况,做一些有难度的课外题是非常必要的。本书所收入的习题按照其难度和灵活性大致分为练习题和参考题。每节末有练习题,每章末有参考题(一般有两组)。这样安排是为了帮助初学者逐步提高分析问题和解决问题的能力。此外,本书对于教材中的一系列问题作了较深入的讨论,还包括了一些提高部分的内容,例如第二章的迭代生成数列,第五章的 Li-Yorke 混沌,第八章和第十一章的凸函数和不等式中的部分材料等。它们既是课程内容的自然延伸,又是进一步学习的起跳板。本书与一般教科书不同的另一特点是,文中有大量的引用,其中除了书末的参考文献外,还有国内外与数学分析有关的杂志上的大量教学研究论文。我们认为这种旁征博引对读者是有益的。

学生对较难的题一时做不出是十分正常的现象。建议学生要学会将问题记在心里经常思考。如能通过自己的不懈努力做出一道较难的题,那才是真正的收获。若能持之以恒,自己的能力和素质就会有切实的提高。不要养成急于从书本上或他人处寻找现成解答的习惯。这样看似省力,实际上往往转身就忘,反而失去了很好的学习机会。来得快则去得更快。没有经过自己的努力,即使将现成答案放在面前,也往往不知所云,一无所得。本书不附习题解答就是出于以上考虑。为了对读者提供帮助,书中附有较多的注解,经常指出有关例题和习题的意义、与其他题的联系等。书中对所有参考题均给出提示,集中放在书末。但请注意,该提示中指出的方法未必高明,更不一定是惟一的方法。

本书也可作为考研的复习教材。就我们所见,许多学生在考研前对课程的基

本内容已遗忘甚多,面对茫茫题海不知所措.本书可以帮助他们对基本内容和方法进行复习,然后通过数量并不很大的习题训练得到较快的提高.

本书还可作为已经学过一般高等数学的读者进一步提高的进修教材.本书在许多基本方法的讲解上较为细致,起点不高,对自学比较合适.

苏州大学数学系长期以来非常重视数学分析的习题课建设.1987-1989年由吴茂庆和卫瑞霞编写的习题课教材,分上、中、下三册,在数学分析教学中起了重要的作用;但由于当时只油印了几十份,仅供上习题课的青年教师使用,目前已很难得到,而十年以来的形势发展很需要一套全新的习题课教材,并供广泛得多的读者使用,这便是编写本书的由来.本书从1998年底开始编写,并经多次试用和征求同行的意见,逐步形成现在的面貌.当然,数学分析习题课教材的建设是一个长期积累的过程,不可能毕其功于一役.希望本书的编写能够起到承前启后的作用,使数学分析习题课的教学质量得到稳步的提高.

本书分上、下两册出版.上册的内容为极限理论和一元微积分,下册的内容为无穷级数和多元微积分.

为简明起见,正文内只设命题与例题,并在每一章节内分别依次编号.例如,例题2.1.5就是第二章第一节的第五个例题.命题一般是有独立存在价值的定理或结论.有的例题很重要,实际上也可以作为命题.这里没有绝对的界线.

在几年的编写和试用过程中,得到了兄弟院校和本校许多同行的关心和帮助,并尽可能地吸取了他们对几次初稿的宝贵意见;上海交通大学的沐定夷教授承担了全书的审阅,其中包括几年来的每次修改稿,提出了许多重要意见和建议;在本书的编写中利用了很多参考文献,其中包括教科书、习题课教材、习题集和对数学分析中许多课题和方法的研究性材料;本书的排版采用天元和 $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ 系统,并得到了华东师范大学陈志杰教授的多次热情帮助;本书的编写得到了教育部“国家理科基地创建名牌课程项目”和苏州大学数学系的资助;本书的出版得到了高等教育出版社理工分社的大力支持,特别是得益于高级策划王瑜和责任编辑薛春玲的辛勤工作和热情指导;对于以上种种帮助,在此一并致以深切的感谢.

本书编写组的成员是谢惠民、恽自求、易法槐和钱定边.极限和一元微积分的执笔人是谢惠民,一元积分学和无穷级数的执笔人是恽自求和谢惠民,多元微积分的执笔人是易法槐和钱定边.此外上册的数列极限习题课教案和对习题课的多数建议是由钱定边提供的.

由于编者水平所限,在目前的版本中必然还会有许多错误和不妥之处,这完全是执笔人的问题.本书的许多新的设想和特点也还不成熟.我们恳切地希望读者对本书批评指正,提出进一步改进的宝贵意见,以利于本书今后的修正.

数学分析习题课教材编写组

2003年2月

附: 上册内容简介

这里将分章介绍本书上册正文中的部分内容. 建议读者广泛使用书末的两个索引, 即中文名词索引和外文名词索引, 从中可以查到许多在目录上不易寻找到的材料.

第一章为引论. §1.3 节介绍了一系列初等不等式, 其中特别是平均值不等式在书中将多次应用. 在 §1.4 节中对两个逻辑符号 \forall 和 \exists 的由来和用处作了详细的讲解. 这都是在一般教科书中不可能花很多篇幅来介绍的内容.

第二章为数列极限. 在 2.1.3 小节中对适当放大法作详细讨论. 例题 2.2.1 在一般教科书中是少见的. §2.2 节中提前引入无穷级数, 并对调和级数的发散性给出多个证明. §2.5 节用两个通俗问题引入数 e . §2.6 节对于迭代生成的数列介绍了“蛛网工作法”, 总结出具有相当普遍性的两条规律.

第三章为实数系的基本定理. 除了单调有界数列的收敛定理是上一章的主要工具外, 在这一章中分节详细介绍其余 5 个基本定理的内容、证明和应用. 对区间套定理的“凝聚”特点作了细致的分析. 凝聚定理的证明依赖于一般教科书中不常见的“任何数列必有单调子列”的结论. 用三分法证明 Cauchy 收敛准则仅见于 [41]. Lebesgue 数的存在性证明是易法槐提出的. 介绍了上、下极限的三种不同视角, 还包括它们在多个方面的应用. 在 3.7.2 小节举出用本章定理一题多解的例题.

第四章为函数极限. 其中 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 的证明取自**数学的实践与认识**上的论文. 对于使用等价量代换法中的常见错误进行了分析, 指出了正确使用了两条规则.

第五章为连续函数. 其中除了对基本定理作细致的处理外, 还在 §5.6 节介绍了混沌, 作为第二章中迭代生成数列的现代发展. 为了理解这些最新发展所需的知识只限于连续性和上、下极限的概念.

第六章为导数与微分. 其中对几个基本结果采用了 [17] 中的处理方法. 对于一阶微分的形式不变性作了详细讨论.

第七章为微分中值定理. 对于 Fermat 定理, Rolle 定理和 Lagrange 中值定理都采用了不同于一般书中的新的证明方法. 根据沐定夷的建议, 提出并证明了 Taylor 多项式的最优性.

第八章为微分学的应用. 这里分 7 个专题作介绍. §8.4 和 §8.5 节对于凸函数以及凸性在证明不等式中的应用有丰富的材料, 其中包括大量练习题. 作图题中收入了燕尾突变的例题.

第九章为不定积分. 对于第二换元法作出一个严格证明(取自美国数学月刊上的论文). 对于求有理函数的不定积分举出两种比较灵活的计算方法(其中之一来自 [68]).

第十章为定积分. 不正面介绍零测度概念而给出关于 Riemann 可积充要条件的 Lebesgue 定理的证明 [7]. 对积分第一中值定理的中值可以在开区间中取到的结论作出证明(与 [52, 56] 类似). 计算定积分的例题 10.4.1 是较新的. 在利用对称性计算定积分方面利用了 [48] 的分析, 这比传统的说法更为透彻, 列举了较多的例题, 并通过例题 10.4.8 和后面的例题 12.3.1 与广义积分计算相联系.

第十一章为积分学的应用. 在几何应用中推荐用 Green 公式的一个特例 [42]. §11.2 节与 §8.4 和 §8.5 节呼应, 为凸函数和不等式提供了丰富的内容. 对于积分估计给出了较多的例题. Wallis 公式的证明虽然是传统的, 但具有新的视角. Stirling 公式采用 [7] 中比较严格的证明. 改写了 Niven 对于 π 的无理性的证明.

第十二章为广义积分. 对 Dirichlet 判别法的必要性给出证明. 采用较新的方法计算概率积分. 对于无穷限广义积分收敛时被积函数在无穷远处的性质作了详细讨论.

由于篇幅所限, 本书没有介绍插值多项式的丰富内容, 在数值积分方面也未作详细介绍, 但仍收入了关于近似计算的许多材料. 从收敛数列的数列速度出发, 正式引入算法的阶, 讨论了对圆周率的多种算法, 对数 e 的两种近似计算的比较, 方程求根的不同算法等.

目 录

序	1
前言	3
第一章 引论	1
§1.1 关于习题课教案的组织	1
§1.2 书中常用记号	2
§1.3 几个常用的初等不等式	3
1.3.1 几个初等不等式的证明 (3) 1.3.2 练习题 (7)	
§1.4 逻辑符号与对偶法则	9
第二章 数列极限	12
§2.1 数列极限的基本概念	12
2.1.1 基本定义 (12) 2.1.2 思考题 (13)	
2.1.3 适当放大法 (14) 2.1.4 例题 (15)	
2.1.5 练习题 (17)	
§2.2 收敛数列的基本性质	17
2.2.1 思考题 (18) 2.2.2 例题 (18)	
2.2.3 判定数列发散的方法 (21) 2.2.4 练习题 (25)	
§2.3 单调数列	26
2.3.1 例题 (26) 2.3.2 练习题 (30)	
§2.4 Cauchy 命题与 Stolz 定理	31
2.4.1 基本命题 (31) 2.4.2 例题 (35) 2.4.3 练习题 (37)	
§2.5 自然对数的底 e 和 Euler 常数 γ	37
2.5.1 与数 e 有关的两个问题 (38)	
2.5.2 关于 e 的基本结果 (38) 2.5.3 Euler 常数 γ (43)	
2.5.4 例题 (44) 2.5.5 练习题 (45)	
§2.6 由迭代生成的数列	46
2.6.1 例题 (46) 2.6.2 单调性与几何方法 (49)	
2.6.3 练习题 (52)	
§2.7 对于教学的建议	53
2.7.1 学习要点 (53) 2.7.2 补充例题 (54) 2.7.3 参考题 (55)	
第一组参考题 (55) 第二组参考题 (57)	
§2.8 关于数列极限的一组习题课教案	60
2.8.1 第一次习题课 (60) 2.8.2 第二次习题课 (62)	
2.8.3 第三次习题课 (63) 2.8.4 第四次习题课 (65)	

第三章 实数系的基本定理	67
§3.1 确界的概念和确界存在定理	67
3.1.1 基本内容 (67) 3.1.2 例题 (67) 3.1.3 练习题 (69)	
§3.2 闭区间套定理	70
3.2.1 基本内容 (70) 3.2.2 例题 (71) 3.2.3 练习题 (72)	
§3.3 凝聚定理	73
3.3.1 基本内容 (73) 3.3.2 例题 (73) 3.3.3 练习题 (74)	
§3.4 Cauchy 收敛准则	74
3.4.1 基本内容 (74) 3.4.2 基本命题 (75) 3.4.3 例题 (76)	
3.4.4 压缩映射原理 (77) 3.4.5 练习题 (79)	
§3.5 覆盖定理	80
3.5.1 基本内容 (80) 3.5.2 例题 (81) 3.5.3 练习题 (83)	
§3.6 数列的上极限和下极限	83
3.6.1 基本定义 (83) 3.6.2 基本性质 (84) 3.6.3 例题 (88)	
3.6.4 练习题 (91)	
§3.7 对于教学的建议	92
3.7.1 学习要点 (92) 3.7.2 一题多解 (93) 3.7.3 参考题 (95)	
第一组参考题 (95) 第二组参考题 (96)	
第四章 函数极限	97
§4.1 函数极限的定义	97
4.1.1 函数极限的基本类型 (97)	
4.1.2 函数极限的其他类型 (98) 4.1.3 思考题 (98)	
4.1.4 例题 (99) 4.1.5 练习题 (102)	
§4.2 函数极限的基本性质	103
4.2.1 基本性质 (103) 4.2.2 基本命题 (104)	
4.2.3 思考题 (107) 4.2.4 例题 (107) 4.2.5 练习题 (109)	
§4.3 两个重要极限	110
4.3.1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (110) 4.3.2 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ (111)	
4.3.3 例题 (112) 4.3.4 练习题 (114)	
§4.4 无穷小量、有界量、无穷大量和阶的比较	114
4.4.1 记号 o, O 与 \sim (115) 4.4.2 思考题 (117)	
4.4.3 等价量代换法 (119) 4.4.4 练习题 (121)	
§4.5 对于教学的建议	122
4.5.1 学习要点 (122) 4.5.2 参考题 (122)	

第五章 连续函数	124
§5.1 连续性概念	124
5.1.1 内容提要 (124) 5.1.2 思考题 (125)	
5.1.3 例题 (125) 5.1.4 练习题 (128)	
§5.2 零点存在定理与介值定理	129
5.2.1 定理的证明 (129) 5.2.2 例题 (132)	
5.2.3 练习题 (133)	
§5.3 有界性定理与最值定理	134
5.3.1 定理的证明 (135) 5.3.2 例题 (136)	
5.3.3 练习题 (136)	
§5.4 一致连续性与 Cantor 定理	137
5.4.1 内容提要 (137) 5.4.2 思考题 (138)	
5.4.3 Cantor 定理的证明 (138) 5.4.4 例题 (139)	
5.4.5 练习题 (142)	
§5.5 单调函数	143
5.5.1 基本性质 (143) 5.5.2 练习题 (146)	
§5.6 周期 3 蕴涵混沌	146
5.6.1 动力系统的基本概念 (147)	
5.6.2 Li-Yorke 的两个定理 (148)	
§5.7 对于教学的建议	152
5.7.1 学习要点 (152) 5.7.2 参考题 (153)	
第一组参考题 (153) 第二组参考题 (154)	
第六章 导数与微分	157
§6.1 导数及其计算	157
6.1.1 内容提要 (157) 6.1.2 思考题 (158)	
6.1.3 例题 (159) 6.1.4 练习题 (166)	
§6.2 高阶导数及其他求导法则	167
6.2.1 高阶导数计算 (167) 6.2.2 隐函数求导法 (171)	
6.2.3 参数方程求导法 (174) 6.2.4 练习题 (176)	
§6.3 一阶微分及其形式不变性	177
6.3.1 基本概念 (177) 6.3.2 微分与近似计算 (177)	
6.3.3 一阶微分的形式不变性 (179) 6.3.4 练习题 (180)	
§6.4 对于教学的建议	181
6.4.1 学习要点 (181) 6.4.2 参考题 (181)	
第一组参考题 (181) 第二组参考题 (183)	

第七章 微分学的基本定理	185
§7.1 微分学中值定理	185
7.1.1 基本定理 (185) 7.1.2 导函数的两个定理 (193)	
7.1.3 例题 (196) 7.1.4 练习题 (200)	
§7.2 Taylor 定理	202
7.2.1 基本定理 (203) 7.2.2 例题 (209)	
7.2.3 Euler 数与 Bernoulli 数 (214) 7.2.4 练习题 (218)	
§7.3 对于教学的建议	220
7.3.1 学习要点 (220) 7.3.2 参考题 (221)	
第一组参考题 (221) 第二组参考题 (223)	
第八章 微分学的应用	226
§8.1 函数极限的计算	226
8.1.1 L'Hospital 法则 (226)	
8.1.2 Taylor 公式与极限计算 (229) 8.1.3 练习题 (234)	
§8.2 函数的单调性	235
8.2.1 例题 (235) 8.2.2 练习题 (238)	
§8.3 函数的极值与最值	238
8.3.1 例题 (239) 8.3.2 练习题 (242)	
§8.4 函数的凸性	243
8.4.1 基本命题 (243) 8.4.2 练习题 (249)	
§8.5 不等式	250
8.5.1 例题 (250) 8.5.2 用凸性证不等式 (255)	
8.5.3 练习题 (258)	
§8.6 函数作图	260
8.6.1 例题 (261) 8.6.2 练习题 (263)	
§8.7 方程求根与近似计算	264
8.7.1 迭代算法的收敛速度 (264)	
8.7.2 Newton 求根法 (268) 8.7.3 练习题 (272)	
§8.8 对于教学的建议	272
8.8.1 学习要点 (272) 8.8.2 参考题 (274)	
第一组参考题 (274) 第二组参考题 (275)	
第九章 不定积分	278
§9.1 不定积分的计算方法	278
9.1.1 内容提要 (278) 9.1.2 思考题 (278)	
9.1.3 基本计算方法 (279) 9.1.4 例题 (281)	

9.1.5 特殊计算方法 (285)	9.1.6 练习题 (288)
§9.2 几类可积函数	289
9.2.1 有理函数的积分 (289)	
9.2.2 三角函数有理式的积分 (291)	
9.2.3 无理函数积分的例子 (293)	9.2.4 练习题 (296)
§9.3 对于教学的建议	297
9.3.1 学习要点 (297)	9.3.2 参考题 (298)
第十章 定积分	299
§10.1 定积分概念与可积条件	299
10.1.1 定积分的定义 (299)	10.1.2 可积条件 (300)
10.1.3 练习题 (304)	
§10.2 定积分的性质	306
10.2.1 积分中值定理 (306)	10.2.2 例题 (307)
10.2.3 积分号下求极限 (309)	10.2.4 练习题 (313)
§10.3 变限积分与微积分基本定理	314
10.3.1 主要命题 (314)	10.3.2 例题 (315)
10.3.3 练习题 (318)	
§10.4 定积分的计算	319
10.4.1 计算公式与法则 (319)	10.4.2 例题 (320)
10.4.3 对称性在定积分计算中的应用 (323)	
10.4.4 用递推方法求定积分 (325)	
10.4.5 积分中值定理的应用 (327)	10.4.6 练习题 (329)
§10.5 关于教学的建议	331
10.5.1 学习要点 (331)	10.5.2 参考题 (332)
第一组参考题 (332)	第二组参考题 (334)
第十一章 积分学的应用	336
§11.1 积分学在几何计算中的应用	336
11.1.1 基本公式与方法 (336)	11.1.2 例题 (337)
11.1.3 Guldin 定理 (341)	11.1.4 练习题 (343)
§11.2 不等式	344
11.2.1 凸函数不等式 (344)	
11.2.2 Schwarz 积分不等式 (346)	
11.2.3 其他著名积分不等式 (348)	
11.2.4 不等式的其他例题 (350)	11.2.5 练习题 (353)
§11.3 积分估计与近似计算	354

11.3.1 积分值的估计 (354)	11.3.2 积分的近似计算 (356)	
11.3.3 练习题 (359)		
§11.4 积分学在分析中的其他应用		360
11.4.1 利用定积分求数列极限 (360)		
11.4.2 Wallis 公式与 Stirling 公式 (362)		
11.4.3 Taylor 公式的积分型余项 (365)		
11.4.4 π 的无理数证明 (367)	11.4.5 练习题 (368)	
§11.5 对于教学的建议		369
11.5.1 学习要点 (369)	11.5.2 参考题 (370)	
第一组参考题 (370)	第二组参考题 (372)	
第十二章 广义积分		375
§12.1 广义积分的定义		375
12.1.1 基本定义 (375)	12.1.2 广义积分与和式极限 (377)	
12.1.3 练习题 (378)		
§12.2 广义积分的敛散性判别法		379
12.2.1 敛散性判别法 (379)	12.2.2 例题 (382)	
12.2.3 练习题 (387)		
§12.3 广义积分的计算		388
12.3.1 例题 (388)	12.3.2 几个特殊广义积分的计算 (390)	
12.3.3 练习题 (393)		
§12.4 广义积分的特殊性质		395
12.4.1 收敛无穷限积分的被积函数在无穷远处的性质 (395)		
12.4.2 练习题 (397)		
§12.5 关于教学的建议		398
12.5.1 学习要点 (398)	12.5.2 参考题 (398)	
第一组参考题 (398)	第二组参考题 (401)	
参考题提示		403
参考文献		417
中文名词索引		419
外文名词索引		423

第一章 引 论

这一章只是一些准备工作. 读者可先浏览一下, 然后根据自己的需要来使用.

在 §1.1 节中对于如何上习题课提出一些建议. 在 §1.2 节中列出了本书中的常用记号. 在 §1.3 节中介绍几个常用的初等不等式, 供自学. 根据我们的经验, 在学期开始时如能关于初等不等式组织一次课外讲座是很合适的. 就初学者而言, 化点力气学好这一节 (包括练习题) 对今后大有好处. 这不仅因为其中的平均值不等式、三点不等式和 Cauchy 不等式是以后的常用工具, 而且还可以通过这些不等式的证明熟悉所用的方法. §1.4 节的对偶法则很重要, 也可自学.

§1.1 关于习题课教案的组织

除第二章外, 本书不提供具体的习题课教案. 附有教案的参考书已有很多, 例如 [13, 58, 62, 66] 等. 我们认为担任习题课的教师应当根据所用的具体教材、大课内容和学生的动态情况来写出自己的习题课教案. 与主讲教师所上的大课相比, 这里有更为广阔的天地可以发挥教师的创造性. 我们在下面先提出一些原则性的建议供参考, 然后从第二章起, 于每章的最后一节提出学习要点和对习题课的建议, 并附有一定难度的若干参考题供选择使用. 注意: 较难的参考题, 特别是第二组参考题, 可供学有余力的学生或考研使用, 对习题课则不尽合适.

在讨论习题课的内容之前, 需要强调指出: 上习题课的教师必须自己动手解题和选题. 随随便便从一本书上抄个题, 不明白它的来龙去脉, 就拿来作为习题课上的例题或练习题, 这不是对学生负责的做法, 效果也一定不会好. 一旦出了问题, 就会砸锅, 使自己下不了台. 以其昏昏, 怎能使人昭昭?

写教案的另一个依据则是掌握学生不断变化的具体情况, 特别是作业批改中出现的活材料. 教师认真批改作业和思考其中出现的问题是上好习题课的必要条件. 对于学习中出现的情况是不可能举尽的, 完全要靠教师的辛勤劳动和对教学内容的把握来作出正确的处理. “教无常法”在这里是非常合适的.

一、课堂提问与讨论 这方面可以参考本书中为部分章节安排的思考题. 但往往最好的材料来自习题批改和学习中出现的具体情况. 要从一开始引导学生学习数学的思维方式. 例如, 对于所提出的问题, 若回答“一定”, 则要求能给出证明; 若回答“不一定”, 则要求会举出反例. 用来推翻某个论断的例子就叫做“反例”. 要引导学生学会举例子来支持自己的观点.

二、课内例题的选取 首先应当注意, 不要将习题课变成例题讲解课, 一讲到底. 这样做的效果往往不一定好. 实际上, 不论例题的选择和讲解是怎样的如花似锦, 学生还是必须经过自己的实践才能吸收其中的营养. 这就是 Pólya 所说