ZhXShX

中学数学丛书

线性代数初步

萧竞择

湖北人民出版社

ZHONGXUE SHUXUE CONGSHU

ZHONGXUE SHUXUE CONGSHU

中学数学丛书

线性代数初步

萧 竞 择

湖 北 人 民 出 版 社

内 容 提 要

本书在中学数学的基础上，介绍线性代数的一些基本理论和基本演算方法．全书共分四章：n 阶行列式、线性方程组、矩阵运算以及向量空间与线性变换．有关内容作了适当拓宽和加深。

本书叙述简明，例题丰富，适合中学生自学，同时，亦可供中学数学教师教学时参考。

中学数学丛书

线性代数初步

萧竞择

•

湖北人民出版社出版　湖北省新华书店发行

黄冈县印刷厂印刷

787×1092毫米32开本　7.25印张　160,000字

1983年2月第1版　1983年2月第1次印刷

印数：1—17,500

统一书号：7106·1653　定价：0.60元

编 者 的 话

为了帮助广大中学生学习数学基础知识，一九八一年秋，湖北人民出版社委托我们湖北省暨武汉市数学学会推荐介绍作者，组织编写了《逻辑代数初步》、《线性代数初步》、《概率统计初步》、《微积分初步》四本小册子，分别介绍中学数学教材中有关高等数学的初步知识．这一工作，得到大中学校教师的热情支持，并希望以中学生为主要对象，编辑出版一套《中学数学丛书》．根据读者的要求和老师们的意见，出版社约请我会在此基础上主编一套《中学数学丛书》．我们认为，这个工作是很有意义的．于是，发动高等院校及中学的广大数学教师以及教学研究工作者共同讨论，决定了二十几个选题，结合湖北人民出版社已组稿的四种，制定了《中学数学丛书》选题计划．

《中学数学丛书》的编写，围绕中学数学教学大纲和全国统编数学教材，从中学生的学习实际出发，对中学数学知识适当作了拓宽和加深．编写这套丛书的目的，是为了帮助中学生巩固基础知识，加强基本训练，熟练掌握基本技能，培养分析和解决数学问题的能力，提高学习质量．

参加这套丛书编写的，有大专院校的老师和教学研究工作者，以及教学经验丰富的中学教师．编写中充分注意中学生的实际，考虑到他们的实际水平和接受能力，力求写得深入浅出，通俗易懂，使一般水平的学生都能看懂，且学有所得．

《中学数学丛书》共计三十余册，多数小册子内容是和教材相对应的，几本综合性的小册子，是为了帮助同学们掌握数学概念，学会分析与归纳，寻找解题途径并掌握较好的解题方法而编写的.丛书中每本小册子既相对独立又互相联系.同学们既可系统阅读,也可以根据自己的情况有选择地使用.学习中哪一方面比较薄弱，哪一方面存在疑难，便可选择其中的有关部分阅读.另外，丛书各册编有丰富的练习题、复习题，并附有答案与提示，丛书对教师教学亦有一定的参考作用.

这套丛书出版以后，欢迎读者提出批评与建议，以便我们组织力量进一步修改再版，把这套丛书编好.同时，希望读者对进一步编好中学生课外读物提出宝贵意见.

湖北省暨武汉市数学学会

一九八二年五月

前　言

编写本书的目的，是在中学数学的基础上，介绍线性代数的一些基本理论和基本演算方法．全书共分四章：n 阶行列式、线性方程组、矩阵运算以及向量空间与线性变换．前两章是中学代数内容的推广和深化，也是线性代数中最基本的内容；第三章矩阵运算是数学本身以及应用科学的一个很重要的工具；第四章是介绍向量空间与线性变换的一些最基本的理论和计算方法．

为了便于读者自学，在每章和每节的开头都扼要地把要解决的问题明确提出，目的是使读者先了解一个梗概；同时也注意了前后的衔接，便于读者理解知识的发展和深化．其次在写法上，对某些概念的引入和方法的说明，都尽可能写得直观具体一些；同时比较注意代数与几何之间的联系，目的是为了便于理解，这样做既联系了几何，也丰富了线性代数的内容．再者，为了读者及时理解和掌握这些内容，在每一节的后面，都附有一定数量的习题，一般难度不大；为了概括本章的基本内容和方法，在每章之后都有小结；每章后面的复习题，难度要大一点，这对培养分析问题和解决问题的能力是有好处的．

本书可作为高中学生的课外读物，具有高中程度的读者也可自学．

限于个人的业务水平和教学经验，书中缺点和错误在所难免，希望读者批评指正．

编　者

一九八二年三月

目　录

第一章 n阶行列式

线性方程组是线性代数的重要组成部分，而行列式是研究线性方程组的工具．在中学代数里，已学过用二(三)阶行列式求解具有二(三)个未知数、二(三)个一次方程的线性方程组．一般具有 n 个未知数、n 个一次方程的线性方程组是否也能这样求解？n 阶行列式就是根据这个需要产生的．本章讨论三个问题：(1) n 阶行列式概念的形成；(2) 它的最基本的性质及计算方法；(3) 怎样利用它去解线性方程组．

我们在讨论中所使用的一切表示数的文字，如果不特别声明，指的都是复数．

§1. 二(三)阶行列式

二(三)阶行列式的概念及其应用，在中学代数里已经介绍过，现在小结如下：

一次方程又叫做**线性方程**；一次方程组又叫做**线性方程组**．

含两个未知数、两个一次方程的二元线性方程组的一般形式是：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{①}$$

式中未知数的系数 a_{ij} 附有两个下标 i、j，写在字母 a 的右下

角．第一个下标 i 指明这个系数所在方程的号码；第二个下标 j 指明它是哪一个未知数的系数．

当 $D\neq 0$ 时，(1) 有唯一解：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D} \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}, \end{cases} \qquad ②$$

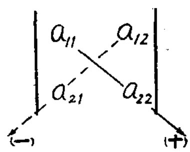
其中

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad ③$$

叫做**二阶行列式**，a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 叫做此二阶行列式的**元素**．这四个元素排成二行二列．$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 叫做**二阶行列式的展开式**．二阶行列式可以按下图展开：



而 $D_i\,(i=1,2)$ 是把 D 中的 a_{1i} 和 a_{2i} 分别用 b_1 和 b_2 代替而得到的，即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_3 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

当 $D=0$，但 D_1，D_2 中至少有一个不等于零时，①无解．

当 $D=D_1=D_2=0$ 时，①有无穷多解．

类似地，含三个未知数、三个一次方程的三元线性方程组的一般形式是：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \quad ④$$

当 $D\neq 0$ 时，④有唯一解：

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D} \\ x_3 = \dfrac{D_3}{D}, \end{cases} \quad ⑤$$

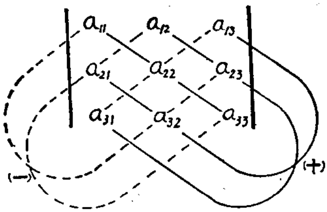
其中

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad ⑥$$

叫做三阶行列式，a_{11}，a_{12}，a_{13}，a_{21}，a_{22}，a_{23}，a_{31}，a_{32}，a_{33} 叫做此三阶行列式的元素．这九个元素排成三行 三列．$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$ **叫做三阶行列式的展开式．**三阶行列式可以按下图展开：



而 $D_i(i=1,2,3)$ 是把 D 中的 a_{1i}, a_{2i} 和 a_{3i} 分别用 b_1，b_2 和 b_3 代替而得到的，即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

当 $D=0$，但 D_1，D_2，D_3 中至少有一个不等于零时，④无解.

当 $D=D_1=D_2=D_3=0$ 时，④无解或有无穷多解.

例如

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2+x_3=2 \\ x_1+x_2+x_3=3 \end{cases}$$

没有解，而

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+2x_2+2x_3=1 \\ \qquad\quad x_2+x_3=0 \end{cases}$$

有无穷多解.

练　习　1·1

1. 计算三阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} \alpha^2+1 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2+1 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2+1 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$.

2. 计算三阶行列式(其中 $i=\sqrt{-1}$)：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \end{vmatrix}$, $\left(\varepsilon=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$；

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \varepsilon \\ 1 & 1 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \end{vmatrix}$, $\left(\varepsilon=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{vmatrix}$, $\left(\varepsilon=\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$.

3. 利用三阶行列式的性质，计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} (a_1+b_1)^2 & a_1^2+b_1^2 & a_1b_1 \\ (a_2+b_2)^2 & a_2^2+b_2^2 & a_2b_2 \\ (a_3+b_3)^2 & a_3^2+b_3^2 & a_3b_3 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} (a^x+a^{-x})^2 & (a^x-a^{-x})^2 & 1 \\ (b^y+b^{-y})^2 & (b^y-b^{-y})^2 & 1 \\ (c^z+c^{-z})^2 & (c^z-c^{-z})^2 & 1 \end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix}$.

4. 利用行列式解方程组:

(1) $\begin{cases} x\cos\alpha - y\sin\alpha = \cos\beta \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha = \sin\beta; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x\,\mathrm{tg}\,\alpha + y = \sin(\alpha+\beta) \\ x - y\,\mathrm{tg}\,\alpha = \cos(\alpha+\beta). \end{cases}$ $\left(\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \text{ 为整数}\right)$

(3) $\begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} + 2 = 0 \\ -\dfrac{2y}{b} + \dfrac{3z}{c} - 1 = 0 \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = 0 \end{cases}$

§2. n 阶行列式

上节说明：有了二（三）阶行列式的概念，我们可以把 $D\neq 0$ 时的线性方程组(1)及(4)的解直接用它们的系数及常数项表示出来. 因此我们自然会想到怎样把二(三)阶行列式的概念推广到一般 n 阶行列式，也利用它来表达含 n 个未知数、n 个一次方程的n元线性方程组的解. n 阶行列式就是根据这个需要产生的. 我们推广的方法是：先弄清楚二(三)阶行列式的结构规律，再根据所得到的规律来推广行列式的概念. 然后在解含 n 个未知数、n 个一次方程的 n 元线性方程组的问题中来验证它.

我们从三阶行列式的展开式⑥入手，把它的各项列表于下：

项	$a_{11}a_{22}a_{33}$	$a_{12}a_{23}a_{31}$	$a_{13}a_{21}a_{32}$	$a_{11}a_{23}a_{32}$	$a_{12}a_{21}a_{33}$	$a_{13}a_{22}a_{31}$
元素所在行的下标	1 2 3	1 2 3	1 2 3	1 2 3	1 2 3	1 2 3
元素所在列的下标	1 2 3	2 3 1	3 1 2	1 3 2	2 1 3	3 2 1
符　号	+	+	+	−	−	−

从表中可以看出下列事实：

第一，三阶行列式的每一项都是三个元素的乘积，这三个元素既位于不同的行，也位于不同的列．而且所有既位于不同的行也位于不同的列的元素的乘积(共有 $3!=6$ 个)都在行列式中出现．三阶行列式的展开式恰是这六个乘积的代数和．

第二，每一项的元素的第一个下标都是按自然顺序排列的，而第二个下标构成三个数码的一切排列．其中带正号的项的第二个下标是下面的三个排列：

$$1,\ 2,\ 3;\quad 2,\ 3,\ 1;\quad 3,\ 1,\ 2. \qquad ①$$

带负号的项的第二个下标是下面的三个排列：

$$1,\ 3,\ 2;\quad 2,\ 1,\ 3;\quad 3,\ 2,\ 1. \qquad ②$$

在上面三个数码的排列里，除了1 2 3 的数码是按自然顺序排列的以外，其余的排列中，都有较大的数码排在较小的数码的前面．例如，在排列1 3 2 里，3 比 2 大，但 3 排在 2 的前面；在 3 2 1 里，2 排在 1 的前面，3 排在 1 和 2 的前面．一般，在一个排列里，如果某一个较大的数码排在某一个较小的数码的前面，就说这两个数码构成一个反序．例如 1 3 2 有一个反序，3 2 1 有三个反序．在一个排列里出现的反序总数叫做这个排列的反序数．

给定任意一个排列，我们可以按以下方法计算它的反序数：看有多少数码排在 1 的前面，设为 m_1 个，那么就有 m_1 个数码与 1 构成反序；然后把 1 划去，再看有多少数码排在 2 的前面，设为 m_2 个，那么就有 m_2 个数码与 2 构成反序；再把 2 划去，计算有多少数码排在 3 的前面，如此继续下去．最后设在 n 前面有 m_n 个数码．那么这个排列的反序数等于 $m_1+m_2+\cdots+m_n$．例如，在排列 4 5 1 3 6 2 里，$m_1=2, m_2=4$，$m_3=2$；$m_4=m_5=m_6=0$．所以这个排列共有 8 个反序．

一个排列的反序数可能是偶数也可能是奇数．有偶数个反序数的排列叫做**偶排列**；有奇数个反序的排列叫做**奇排列**．在三个数码的所有六个排列中，其中①的三个排列是偶排列；②的三个排列是奇排列．从前表中可以看出，与偶排列对应的三项取正号；与奇排列对应的三项取负号．

分析一下二阶行列式也会发现有完全类似的规律．这样我们得出了二(三)阶行列式含有怎样的项以及每一项取怎样的符号的规律．我们就根据这些规律，来定义 n 阶行列式．

定义 设有 n^2 个数，把它们写成一个有 n 行 n 列的符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad ③$$

我们称③为 **n 阶行列式**，它表示所有这样乘积的代数和，每个乘积含有 n 个元素，每行一个，每列也一个，于是这些乘积都可以写成下面的形式：

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \qquad ④$$

其中行标成自然顺序，列标 j_1，j_2，…，j_n 是 1，2，…，n 的某一排列，每个这样的排列依 1，2，…，n 的顺序来比较就

有一个反序数：当这个反序数为偶数时，这项乘积取(+)号，当这个反序数为奇数时，这项乘积取(-)号.

用式子表示，就是：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1,j_2,\cdots j_n)} (-1)^{[j_1,j_2,\cdots j_n]} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \quad ⑤$$

其中符号$[j_1, j_2, \cdots j_n]$表示排列$j_1, j_2, \cdots, j_n$的反序数；符号$\sum\limits_{(j_1,j_2,\cdots j_n)}$表示要对1，2，…，$n$的所有排列取和. 因为$n$个数字1，2，…，$n$的所有排列共有$1\cdot2\cdot\cdots\cdot n=n!$个，所以$n$阶行列式共有$n!$个项.

例 1 判断乘积$a_{24}a_{41}a_{13}a_{32}a_{55}$和$a_{12}a_{24}a_{33}a_{42}a_{55}$是否是五阶行列式的项. 若是，并决定其符号.

解：将$a_{24}a_{41}a_{13}a_{32}a_{55}$写成$a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}a_{55}$，由定义可知它是五阶行列式的一项. 因$[3,4,2,1,5]=5$，故此项应取(-)号. 对$a_{12}a_{24}a_{33}a_{42}a_{55}$而言，列标的排列是2，4，3，2，5内有两个数码相同，这说明在第二列里取了两个元素a_{12}及a_{42}，不符合行列式的定义，所以它不是五阶行列式的一项.

例 2 试决定i，j，使$a_{1i}a_{23}a_{3j}a_{42}a_{54}$是五阶行列式中带正号的一项.

解：行标的排列已是1，2，3，4，5的自然顺序. 列标的排列是i，3，j，2，4. 要使此项成为五阶行列式的一项，则i，j只能在1，5中选取，即$i=1$，$j=5$或$i=5$，$j=1$. 因为$[5,3,1,2,4]=6$，所以$a_{15}a_{23}a_{31}a_{42}a_{54}$是五阶行列式中带正号的一项.

例 3 证明三角形行列式