华章数学译丛

3

Functional Analysis

(Second Edition)

泛函分析（原书第2版）

（美） Walter Rudin 著

刘培德 译

机械工业出版社
China Machine Press

华 章 数 学 译 丛

3

Functional Analysis

(Second Edition)

泛函分析（原书第2版）

（美）Walter Rudin 著

刘培德 译

机械工业出版社
China Machine Press

本书是泛函分析的经典教材。作为 Rudin 的分析学经典著作之一，本书秉承了内容精练、结构清晰的特点。第 2 版新增的内容有 Kakutani 不动点定理、Lamonosov 不变子空间定理以及遍历定理等。另外，还适当增加了一些例子和习题。

本书可供高等院校数学专业高年级学生和研究生以及教师参考使用。

图书在版编目（CIP）数据

泛函分析（原书第 2 版）/（美）鲁丁（Rudin, W.）著；刘培德译. 一北京：机械工业出版社，2004. 8

（华章数学译丛）

书名原文：Functional Analysis, Second Edition

ISBN 7-111-14405-8

Ⅰ. 泛…　Ⅱ. ①鲁…　②刘…　Ⅲ. 泛函分析一高等学校一教材　Ⅳ. O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 042179 号

机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街 22 号　邮政编码　100037）

责任编辑：蒋　祎

北京牛山世兴印刷厂印刷 · 新华书店北京发行所发行

2004 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

787mm×1092mm　1/16 · 21.25 印张

印数：0001～5000 册

定价：35.00 元

凡购本书，如有倒页、脱页、缺页，由本社发行部调换

本社购书热线：（010）68326294

前　言

泛函分析是一门学科，它研究某些拓扑代数结构以及能够把关于这些结构的知识应用于解析问题的方法．

关于这门学科的一本好的入门教科书应该包含它（即拓扑向量空间一般理论）的公理系统的介绍，至少应该讲解某些具有一定深度的专题，应该包括对于其他数学分支的有价值的应用．我希望这本书符合这些准则．

这门学科是庞大的，而且正在迅速发展（［4］的第一卷中的参考文献就有 96 页，还只到 1957 年）．为了写一本中等规模的书，有必要选择某些领域而舍弃其他的方面．我充分意识到，几乎任何一个看过目录的行家将会发现见不到他或者她（和我）所喜爱的某些专题，而这似乎是不可避免的．写成一本百科全书并不是我的目的，我想写一本书能够为进一步的探索打开通道．

因此，本书略去了拓扑向量空间一般理论中的许多更深奥的专题．例如，没有关于一致空间，关于 Moore-Smith 收敛性，关于网和滤子的讨论．完备性概念仅仅出现在度量空间的内容中．囿空间没有提到，桶空间也没有．虽然提到了共轭性，但不是以最一般的形式出现的．向量值函数的积分是作为一种工具论述的，我们将重点放在连续的被积函数上，其值在 Fréchet 空间中．

然而，第一部分的材料对于具体问题的几乎所有应用是足够的．这其实就是这门课程应该强调的：抽象和具体二者之间紧密的相互作用不仅是整个这一学科最有用的方面而且也是最迷人的地方．

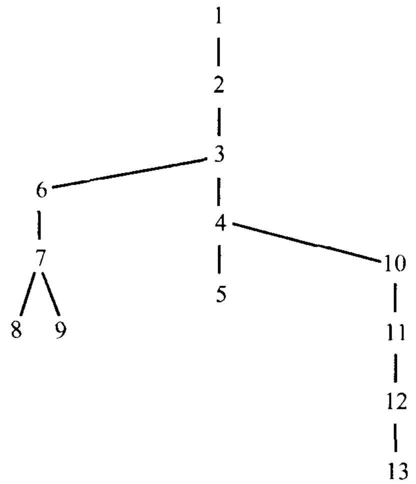
这里对于材料的取舍还具有以下特色．一般理论绝大部分是在没有局部凸性的假设下叙述的．紧算子的基本性质是从 Banach 空间的共轭理论导出的．第 5 章里关于端点存在性的 Krein-Milman 定理有着多种形式的应用．广义函数理论和 Fourier 变换是相当详尽的，并且（以很简短的两章）应用于偏微分方程的两个问题和 Wiener 的 Tauber 定理及其两个应用中．谱定理是从 Banach 代数理论（特别地，从交换 B^*-代数的 Gelfand-Naimark 特征）导出的；这也许不是最简捷的方法，但却是容易的．相当详细地讨论了 Banach 代数中的符号演算，对合与正泛函也是如此．

我假定读者熟悉测度理论和 Lebesgue 积分理论（包括像 L^p 空间的完备性的知识），全纯函数的某些基本性质（如 Cauchy 定理的一般形式和 Runge 定理）以及与这两个分析问题并行的基础拓扑知识．另外一些拓扑知识简要地收在附录 A 中，除了什么是同态之类的知识外，几乎不需要什么代数背景．

历史性的参考文献汇集在附录 B 中．其中一些是关于初始来源的，一些是较近时期的书、文章或者可以从中找到进一步参考文献的阐述性文章．当然还有许

多条目根本没有提供文献．当缺少具体的参考文献时，绝不意味着我意欲将那些成果攫为己有．

大部分应用放在第 5、8、9 章．有些在第 11 章和 250 多个习题里．许多习题备有提示．章与章之间的内在联系指示在下面图表里．



包含在第 5 章应用中的大多数内容都能在前 4 章结束之前讲述．所需要的理论背景建立之后，立即将它们插入早先的课文中想必是一种好的教学方法．但是，为了不打乱书中理论的叙述，我代之以在第 5 章开头简短地指出每个问题需要的背景，这就使得必要时容易尽早学习它们的应用．

在第 1 版中，第 10 章的很大部分用于处理 Banach 代数中的微分．20 年前（还有现在）这些材料看上去是有意思的和具有发展余地的，但似乎还没有取得进展，因此我删除了这些内容．另一方面，我加入了一些容易融入现有课文的论述：von Neumann 的平均遍历定理，算子半群的 Hille-Yosida 定理，两个不动点定理，Bonsall 关于闭图像定理的出人意外的应用，Lomonosov 的引人注目的不变子空间定理．我还重写了某些章节以便阐明某些细节．此外还缩短和简化了某些证明．

这些改动的多数源于几位朋友和同事的十分热心的建议．我特别要提到的是 J. Peters 和 R. Raimi，他们详细地写出了对于第 1 版的评述．还有第 1 版的俄文译者，他加入了不少与课文有关的脚注．我感谢他们所有人！

W. Rudin

关 于 作 者

除“泛函分析”（第 2 版）之外，W. Rudin 还是另外两本书——“数学分析原理”、“实分析与复分析”的作者．它们已被翻译为总共 13 种文字．写完“数学分析原理”时，他是马萨诸塞技术研究所的 C. L. E. Moore 导师，刚好是在他得到杜克大学博士学位两年之后．稍后，他在罗切斯特大学教书．现在是 Wisconsin-Madison 大学 Vilas 研究教授．

Rudin 博士的研究主要涉及调和分析与复分析．关于这些专题他已经完成了三本研究著作：“群上的 Fourier 分析”、“多圆柱中的函数论”以及“C^n 单位球中的函数论”．

特殊符号表

符号之后的数码是解释它们意义的章节号。

空　间

$C(\Omega)$	1.3
$H(\Omega)$	1.3
C_K^{∞}	1.3
$N(\Lambda)$	1.16
R^n	1.19
C^n	1.19
X/N	1.40
L^r	1.43
$\mathscr{D}_K$	1.46
$C^{\infty}(\Omega)$	1.46
$\mathrm{Lip}\alpha$	第 1 章习题 22
l^p	第 2 章习题 5
X^*	3.1
X_w	3.11
l^{∞}	第 3 章习题 4
$\mathscr{B}(X,Y)$	4.1
X^{**}	4.5
$M^{\perp}$	4.6,12.4
${}^{\perp}N$	4.6
$N(T)$	4.11
$R(T)$	4.11
H^1	5.19
$\mathscr{D}$	6.1
$\mathscr{D}(\Omega)$	6.2
$\mathscr{D}'(\Omega)$	6.7
$\mathscr{S}_n$	7.3
$C_0(R^n)$	7.5
$\mathscr{S}_n'$	7.11
$C^{(p)}(\Omega)$	7.24
T^n	8.2
H^s	8.8
$\widetilde{H}(A_{\Omega})$	10.26
$A(U^n)$	11.7
$\mathrm{rad}A$	11.8
$\hat{A}$	11.8
H	12.1
$L^{\infty}(E)$	12.20
$\mathscr{D}(T)$	13.1
$\mathscr{G}(T)$	13.1
$\mathscr{D}_f$	13.23

算　子

D^{α}	1.46
T^*	4.10,13.1
I	4.17
R_s	5.12
L_s	5.12
τ_s	5.19
δ_x	6.9
Λ_f	6.11
Λ_{μ}	6.11
τ_x	6.29
D_{α}	7.1
$P(D)$	7.1
D_t^k	7.24
Δ	8.5
∂	第 8 章习题 8
$\bar{\partial}$	第 8 章习题 8
M_x	10.2
S_L	第 10 章习题 2
S_R	第 10 章习题 2
V	13.7

数论函数与符号

其他符号

目　录

第一部分　一般理论

第1章　拓扑向量空间

引论

1.1　分析学家们研究的许多问题主要的并不是涉及单个对象的，如一个函数、一个测度或一个算子，而是处理一大类这种对象．在这方面出现的大多数有价值的类实际上是具有实数域或者复数域的向量空间．由于极限过程在每个解析问题里(明显地或隐蔽地)起作用，毫不奇怪，这些向量空间都配备有度量，或者至少是拓扑，它承担了构成这个空间的对象之间的某些自然的联系．实现这一点的最简单和最重要的途径是引进一个范数，所得到的结构(定义在下面)称为赋范向量空间或赋范线性空间，或者简单地称为赋范空间．

在整个这本书中，术语向量空间将指在复数域 C 或者实数域 R 上的向量空间，为了完整起见，详细定义在1.4节中给出．

1.2　赋范空间　向量空间 X 称为赋范空间，如果对于每个 $x\in X$ 对应有一个非负实数 $\|x\|$，叫做 x 的范数，使得 3

(a)对于 X 中所有 x，y，$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$，

(b)若 $x\in X$，α 是标量，$\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$，

(c)若 $x\neq 0$，$\|x\|>0$.

"范数"一词也用于表示把 x 映射为 $\|x\|$ 的函数．

每个赋范空间可以看作一个度量空间，其中 x 和 y 之间的距离 $\mathrm{d}(x,y)$ 是 $\|x-y\|$，d 的有关性质是：

(ⅰ)对于所有 x 和 y，$0\leqslant \mathrm{d}(x,y)<\infty$，

(ⅱ)$\mathrm{d}(x、y)=0$ 当且仅当 $x=y$，

(ⅲ)对于所有 x，y，$\mathrm{d}(x,y)=\mathrm{d}(y,x)$，

(ⅳ)对于所有 x，y，z，$\mathrm{d}(x,z)\leqslant \mathrm{d}(x,y)+\mathrm{d}(y,z)$.

在任何度量空间中，中心在 x 半径为 r 的开球是集合

$$B_r(x)=\{y:\mathrm{d}(x,y)<r\}.$$

特别地，如果 x 是赋范空间，集合

$$B_1(0)=\{x:\|x\|<1\}\text{和}\ \bar{B}_1(0)=\{x:\|x\|\leqslant 1\}$$

分别是 X 的开单位球和闭单位球．

为了表明度量空间的一个子集是开的，必须并且只须它是开球的并(可以是空集)，由此得到一个拓扑(见1.5节)．如果度量像上面那样由范数得来，容易

验证向量空间运算(加法和数乘)关于这个拓扑是连续的.

Banach 空间是赋范空间，它在由范数定义的度量中是完备的，这指的是每个 Cauchy 序列是收敛的.

1.3 许多熟知的函数空间是 Banach 空间. 让我们仅提及几种类型：紧空间上的连续函数的空间；常见的出现于积分理论中的 L^p 空间；最接近欧氏空间的 Hilbert 空间；可微函数的某些空间；从一个 Banach 空间到另一个 Banach 空间的连续线性映射的空间；Banach 代数. 所有这些都将出现在今后的课文中.

但是也有许多重要的空间不能纳入这种框架. 这里是一些例子：

4 (a) $C(\Omega)$，欧氏空间 R^n 中某个开集 Ω 上定义的所有连续复函数的空间.

(b) $H(\Omega)$，在复平面的某个开集 Ω 中定义的所有全纯函数的空间.

(c) C_K^∞，在 R^n 上无穷可微并且在某一固定的具有非空内部的紧集 K 外为 0 的所有复函数的空间.

(d)在广义函数理论中用到的测试函数的空间，以及广义函数自身所成的空间.

正像后面将要看到的那样，这些空间所取的自然拓扑不能由范数导出. 像赋范空间一样，它们也是拓扑向量空间的例子. 拓扑向量空间这一概念渗透于整个泛函分析.

在简单地说明了我们的动机之后，这里是一些详细的定义. 随后(在 1.9 节中)还将罗列第一章的某些结果.

1.4 向量空间 字母 R 和 C 将总是分别表示实数域和复数域. 现在，用 Φ 代表 R 或 C. 一个标量是标量域 Φ 的一元. Φ 上的向量空间是一个集合 X，它的元素称为向量，其中定义有两个运算，加法和标量乘法，它们具有下列熟知的代数性质：

(a)每一对向量 x 和 y 对应一向量 $x+y$，使得

$$x+y=y+x \quad \text{并且} \quad x+(y+z)=(x+y)+z;$$

X 包含惟一的向量 0(零向量或 X 的原点)使得对于每个 $x\in X$ 有 $x+0=x$；并且对于每个 $x\in X$ 对应惟一的向量 $-x$ 使得 $x+(-x)=0$.

(b)每一对(α, x)，其中 $\alpha\in\Phi$，$x\in X$，对应一向量 αx 使得

$$1x=x, \quad \alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x,$$

并且两个分配律

$$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y, \quad (\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$$

成立.

当然符号 0 也用于表示标量域中的 0 元.

实向量空间是 $\Phi=R$ 的向量空间；复向量空间是 $\Phi=C$ 的向量空间. 在任何一个关于向量空间的命题里，若标量域没有明确提及，则理解为应用于这两种情

5 况.

如果 X 是向量空间，$A\subset X$，$B\subset X$，$x\in X$ 并且 $\lambda\in\Phi$，我们采用下列记号：

$$x+A=\{x+a:a\in A\},$$
$$x-A=\{x-a:a\in A\},$$
$$A+B=\{a+b:a\in A,b\in B\},$$
$$\lambda A=\{\lambda a:a\in A\}.$$

特别地(取 $\lambda=-1$)，$-A$ 表示 A 中元素的所有加法逆元构成的集合．

注意：在这种规定下，可能出现 $2A\neq A+A$(习题 1).

集合 $Y\subset X$ 称为 X 的子空间，若 Y 自身是一个向量空间(当然，关于同样的运算). 容易验证这种情况出现当且仅当 $0\in Y$ 并且对于所有标量 α 和 β，

$$\alpha Y+\beta Y\subset Y.$$

集合 $C\subset X$ 称为是**凸的**，若

$$tC+(1-t)C\subset C(0\leqslant t\leqslant 1).$$

换句话说，若 $x\in C$，$y\in C$ 并且 $0\leqslant t\leqslant 1$，要求 C 包含，$tx+(1-t)y$.

集合 $B\subset X$ 称为是**均衡的**，若对于每个 $\alpha\in\Phi\,|\,\alpha\,|\leqslant 1$，$\alpha B\subset B$.

称向量空间 X 是 **n 维的**($\dim X=n$)，若 X 有**基** $\{u_1,\ \cdots,\ u_n\}$. 这意味着每个 $x\in X$ 有惟一表达式

$$x=\alpha_1u_1+\cdots+\alpha_nu_n(\alpha_i\in\Phi).$$

如果对于某个 n，$\dim X=n$，称 X 具有**有限维数**．若 $X=\{0\}$，则 $\dim X=0$.

例　若 $X=C$(标量域 C 上的一维向量空间)，其均衡集是 C，空集 $\varnothing$ 和每个以 0 为中心的圆盘(开的或闭的). 如果 $X=R^2$(标量域 R 上的二维向量空间)，则有更多的均衡集；任何一个中点在(0，0)的线段都是．关键在于，尽管明显地 C 和 R^2 等同，但从它们的向量空间结构方面考虑，二者是完全不同的．

1.5　拓扑空间　一个**拓扑空间**是一个集合 S，其中指定了一个(称为**开集**的)子集族 τ，具有下列性质：S 是开的，$\varnothing$ 是开的，任何两个开集之交是开的并且每 6
个开集族的并是开的．这种集族 τ 称为 S **上的拓扑**．当有必要明确这一点的时候，相应于拓扑 τ 的拓扑空间将记为$(S,\ \tau)$而不用 S.

若 S 和 τ 如上所述，这里是一些将要用到的标准术语：

集合 $E\subset S$ 是**闭的**，当且仅当它的余集是开的．E 的**闭包** $\bar{E}$ 是包含 E 的所有闭集的交．E 的**内部** E°是 E 的一切开子集的并．一个点 $p\in S$ 的**邻域**是包含 p 的任一开集．$(S,\ \tau)$是 Hausdorff 空间以及 τ 是 **Hausdorff 拓扑**，若 S 中不同的点有不相交的邻域．集合 $K\subset S$ 是**紧的**，若 K 的每个开复盖具有有限子复盖．一个集族 $\tau'\subset\tau$ 是 τ 的**基**，若 τ 的每个元素(即每个开集)是 τ' 的某些元素的并．一个点 $p\in S$ 的邻域族 Γ 是在 p 点的**局部基**，若 p 的每个邻域包含 Γ 的一个元．

容易验证，若 $E\subset S$ 并且 σ 是所有交集 $E\cap V(V\in\tau)$的族，则 σ 是 E 上的拓扑，我们称这一拓扑是 E 从 S **诱导的拓扑**．

若拓扑 τ 是由度量 d 诱导的(见 1.2 节)，我们说 d 和 τ 彼此是**相容的**．

Hausdorff 空间 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于一点 $x\in X$（或者 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$），若 x 的每个邻域包含除有限多个以外的所有 x_n.

1.6 拓扑向量空间 假设 τ 是向量空间 X 上的拓扑，使得

(a) X 的每一点是闭集，并且

(b) 向量空间运算关于 τ 是连续的.

在这些条件下，τ 称为 X 上的*向量拓扑*，X 称为*拓扑向量空间*.

(a)的更确切的叙述是：对于每个 $x\in X$，以 x 为惟一元素的集合 $\{x\}$ 是闭集.

在许多课本里把(a)从拓扑向量空间的定义里略去. 由于几乎在每个应用中(a)是满足的，而且大多数有意义的定理要求(a)作为它的前提，看来最好是把它包括在公理内.（定理 1.12 说明(a)和(b)一起意味着 τ 是 Hausdorff 拓扑.）

根据定义，所谓加法是*连续的*是指笛卡儿乘积 $X\times X$ 到 X 中的映射

7

$$(x,y)\to x+y$$

是连续的：若 $x_i\in X$，$i=1$、2，并且 V 是 x_1+x_2 的邻域，则存在 x_i 的邻域 V_i 使得

$$V_1+V_2\subset V.$$

类似地，标量乘法是连续的是指 $\Phi\times X$ 到 X 中的映射

$$(\alpha,x)\to \alpha x$$

是连续的：若 $x\in X$，α 是标量并且 V 是 αx 的邻域，则对于某个 $r>0$ 和 x 的某个邻域 W，只要 $|\beta-\alpha|<r$，就有 $\beta W\subset V$.

拓扑向量空间的子集 E 称为是*有界的*，若对于 X 中 0 点的每个邻域 V 相应地有 $s>0$ 使得对于每个 $t>s$，$E\subset tV$.

1.7 不变性 设 X 是拓扑向量空间. 与每个 $a\in X$ 和每个标量 $\lambda\neq 0$ 相联系的*平移算子* T_a 和*乘法算子* M_λ 由下式给出：

$$T_a(x)=a+x,\quad M_\lambda(x)=\lambda x\ (x\in X).$$

下面的简单命题是十分重要的：

命题 *T_a 和 M_λ 是 X 到 X 上的同胚.*

证明 向量空间公理本身就意味着 T_a 和 M_λ 是一一的，是把 X 映射到 X 上的，并且它们的逆分别是 T_{-a} 和 $M_{1/\lambda}$. 向量空间运算的连续性意味着这四个映射是连续的. 所以它们每一个都是同胚(逆映射也连续的连续映射). ■

这个命题的一个推论是每个向量拓扑 τ 是*平移不变的*(为了方便，简单地称为*不变的*)：集合 $E\subset X$ 是开的当且仅当它的每个平移 $a+E$ 是开的. 于是 τ 完全由任何一个局部基确定.

在向量空间中，术语*局部基*将总是指 0 点的局部基. 因此拓扑向量空间 X 的局部基是 0 点的一个邻域族 $\mathscr{B}$，使得 0 点的每个邻域包含 $\mathscr{B}$ 的一个元. 于是 X 的开集恰是 $\mathscr{B}$ 的元经过平移的并.

8

向量空间 X 上的度量 d 称为是不变的，若对于 X 中所有 x，y，z，

$$d(x+z,y+z)=d(x,y).$$

1.8　拓扑向量空间的类型　在下列定义中，X 总表示具有拓扑 τ 的拓扑向量空间．

(a)X 是局部凸的，若存在局部基 $\mathscr{B}$，它的元素都是凸的．

(b)X 是局部有界的，若 0 有一个有界邻域．

(c)X 是局部紧的，若 0 有一个邻域，其闭包是紧的．

(d)X 是可度量化的，若 τ 与某个度量 d 相容．

(e)X 是 F-空间，若它的拓扑 τ 是由一个完备不变度量 d 诱导的．(与 1.25 节比较．)

(f)X 是 Fréchet 空间，若 X 是局部凸 F-空间．

(g)X 是可赋范的，若 X 上存在范数使得由这一范数诱导的度量与 τ 相容．

(h)赋范空间和 Banach 空间已经定义(1.2 节)．

(i)X 具有 Heine-Borel 性质，若 X 的每个有界闭子集是紧的．

术语(e)和(f)并不是普遍采用的：在某些教科书中，局部凸性从 Fréchet 空间的定义中略去，而另一些人用 F-空间描述我们称呼的 Fréchet 空间．

1.9　这里罗列的是拓扑向量空间 X 中这些性质之间的关系．

(a)若 X 是局部有界的，则 X 有可数局部基(定理 1.15(c))．

(b)X 是可度量化的，当且仅当 X 有可数局部基(定理 1.24)．

(c)X 是可赋范的，当且仅当 X 是局部凸的和局部有界的(定理 1.39)．

(d)X 是有限维的，当且仅当 X 是局部紧的(定理 1.21，1.22)．

(e)若局部有界空间 X 具有 Heine-Borel 性质，则 X 是有限维的(定理 1.23)． 9

1.3 节中提到的空间 $H(\Omega)$ 和 C_K^∞ 是具有 Heine-Borel 性质的无穷维 Fréchet 空间(1.45 节，1.46 节)．因此它们不是局部有界的，从而不可赋范；它们还表明(a)的逆不真．

另一方面，存在不是局部凸的局部有界 F-空间(1.47 节)．

分离性

1.10　定理　*假设 K 和 C 是拓扑向量空间 X 的子集，K 是紧的，C 是闭的并且 $K\cap C=\varnothing$．则 0 有邻域 V 使得*

$$(K+V)\cap(C+V)=\varnothing$$

注意 $K+V$ 是 V 的平移 $x+V(x\in K)$ 的并．于是 $K+V$ 是包含 K 的开集．因此定理意味着包含 K 和 C 的不相交开集的存在性．

证明　我们从下面命题开始，它在其他地方也是有用的．

若 W 是 0 在 X 中的邻域，则存在 0 的对称邻域 U(在 $U=-U$ 意义下)，并

且满足 $U+U\subset W$.

为此，注意到 $0+0=0$，并且加法是连续的，从而 0 有邻域 V_1，V_2 使得 $V_1+V_2\subset W$. 若

$$U=V_1\cap V_2\cap(-V_1)\cap(-V_2)$$

则 U 具有所要求的性质.

现在代替 W，把命题应用于 U，则得出 0 点的新的对称邻域 U 使得

$$U+U+U+U\subset W,$$

如何继续做下去是明显的.

若 $K=\varnothing$，则 $K+V=\varnothing$，定理的结论是显然的. 因此我们假定 $K\neq\varnothing$，并且考虑一点 $x\in K$. 因为 C 是闭的，x 不在 C 中，X 的拓扑是平移不变的，上面命题说明 0 有对称邻域 V_x 使得 $x+V_x+V_x+V_x$ 不与 C 相交；故 V_x 的对称性说明

10 $$(x+V_x+V_x)\cap(C+V_x)=\varnothing \tag{1}$$

因为 K 是紧的，在 K 中存在有限多个点 x_1，…，x_n 使得

$$K\subset(x_1+V_{x_1})\cup\cdots\cup(x_n+V_{x_n}).$$

令 $V=V_{x_1}\cap\cdots\cap V_{x_n}$. 则

$$K+V\subset\bigcup_{i=1}^{n}(x_i+V_{x_i}+V)\subset\bigcup_{i=1}^{n}(x_i+V_{x_i}+V_{x_i}).$$

由(1)，最后的并集里没有一项与 $C+V$ 相交，证毕. ■

因为 $C+V$ 是开集，甚至 $K+V$ 的闭包不与 $C+V$ 相交也是真的，特别地，$K+V$ 的闭包不与 C 相交. 这一点的下面特殊情况是相当有意义的，它通过取 $K=\{0\}$ 而得到.

1.11　定理　*若 $\mathscr{B}$ 是拓扑向量空间 X 的局部基，则 $\mathscr{B}$ 的每个元包含 $\mathscr{B}$ 的某一元的闭包.*

至此我们都没有用到 X 的每个点是闭集的假定. 现在我们应用它并且代替 K 和 C 把定理 1.10 用于一对不同的点，结论是这些点具有不相交的邻域，换句话说，Hausdorff 分离公理成立：

1.12　定理　*每个拓扑向量空间是 Hausdorff 空间.*

现在我们导出拓扑向量空间中闭包和内部的一些简单性质. 记号 $\overline{E}$ 和 E° 见 1.5 节. 注意点 p 属于 $\overline{E}$ 当且仅当 p 的每个邻域与 E 相交.

1.13　定理　*设 X 是拓扑向量空间.*

(a) *若 $A\subset X$ 则 $\overline{A}=\bigcap(A+V)$，其中 V 取遍 0 的所有邻域.*

(b) *若 $A\subset X$，$B\subset X$ 则 $\overline{A}+\overline{B}\subset\overline{A+B}$.*

(c) *若 Y 是 X 的子空间，则 $\overline{Y}$ 也是.*

(d) *若 C 是 X 的凸子集，则 $\overline{C}$ 和 C° 也是.*

(e) *若 B 是 X 的均衡子集，则 $\overline{B}$ 也是；若还有 $0\in B^\circ$ 则 B° 也是均衡的.*

11 (f) *若 E 是 X 的有界子集，则 $\overline{E}$ 也是.*

证明　(a)$x\in\overline{A}$ 当且仅当对于 0 的每个邻域 V，$(x+V)\cap A\neq\varnothing$，这种情况出现当且仅当对于每个这样的 V，$x\in A-V$. 因为 $-V$ 是 0 的邻域当且仅当 V 是 0 的邻域，证毕．

(b)取 $a\in\overline{A}$，$b\in\overline{B}$；设 W 是 $a+b$ 的邻域．存在 a 和 b 的邻域 W_1 和 W_2 使得 $W_1+W_2\subset W$. 因为 $a\in\overline{A}$，$b\in\overline{B}$，存在 $x\in A\cap W_1$，$y\in B\cap W_2$. 故 $x+y$ 在 $(A+B)\cap W$ 中，所以这个交非空．从而 $a+b\in\overline{A+B}$.

(c)假设 α 和 β 是标量．由 1.7 节的命题，若 $\alpha\neq0$，$\alpha\overline{Y}=\overline{\alpha Y}$；若 $\alpha=0$，这两个集合显然相等．因此从(b)推出

$$\alpha\overline{Y}+\beta\overline{Y}=\overline{\alpha Y}+\overline{\beta Y}\subset\overline{\alpha Y+\beta Y}\subset\overline{Y};$$

Y 是子空间的假设在最后一个包含关系里用到．

凸集具有凸闭包以及均衡集具有均衡闭包的证明与(c)的证明如此类似，以至于我们把它从(d)和(e)里略去．

(d)因为 $C^\circ\subset C$ 并且 C 是凸的，若 $0<t<1$ 我们有

$$tC^\circ+(1-t)C^\circ\subset C.$$

左边两个集合是开的，故它们的和也是开的．因为 C 的每个开子集是 C°的子集．由此推出 C°是凸的．

(e)若 $0<|\alpha|\leqslant1$，因为 $x\to\alpha x$ 是同胚，故 $\alpha B^\circ=(\alpha B)^\circ$. 因为 B 是均衡的，所以 $\alpha B^\circ\subset\alpha B\subset B$. 但 αB°是开的，故 $\alpha B^\circ\subset B^\circ$. 若 B°包含原点，则 $\alpha B^\circ\subset B^\circ$甚至当 $\alpha=0$ 时也成立．

(f)令 V 是 0 的邻域．由定理 1.11，对于 0 的某个邻域 W，$\overline{W}\subset V$. 因为 E 有界，对于充分大的 t，$E\subset tW$. 对于这些 t 我们有 $\overline{E}\subset t\overline{W}\subset tV$. ■

1.14　定理　*在拓扑向量空间 X 中，*

(a)0 的每个邻域包含 0 的一个均衡邻域，

(b)0 的每个凸邻域包含 0 的一个均衡凸邻域．

证明　(a)假设 U 是 0 在 X 中的邻域．因为标量乘法是连续的，存在 $\delta>0$ 和 X 中 0 的邻域 V 使得只要 $|\alpha|<\delta$，$\alpha V\subset U$. 设 W 是所有集合 αV 的并，则 W 是 0 的邻域，W 是均衡的并且 $W\subset U$.

(b)假设 U 是 X 中 0 的凸邻域，设 $A=\cap\alpha U$，其中 α 遍历绝对值为 1 的标量，像(a)中那样选取 W，因为 W 是均衡的，当 $|\alpha|=1$ 时 $\alpha^{-1}W=W$；所以 $W\subset\alpha U$，于是 $W\subset A$，这意味着 A 的内部是 0 的邻域，显然 $A^\circ\subset U$. 作为凸集的交，A 是凸的，从而 A°也是．为了证明 A°是具有所要求性质的邻域，我们必须说明 A°是均衡的，为此只须证明 A 是均衡的．选取 r 和 β 使得 $0\leqslant r\leqslant1$，$|\beta|=1$，则 12

$$r\beta A=\bigcap_{|\alpha|=1}r\beta\alpha U=\bigcap_{|\alpha|=1}r\alpha U.$$

因为 αU 是包含 0 的凸集，我们有 $r\alpha U\subset\alpha U$. 于是 $r\beta A\subset A$，证明完毕． ■

定理 1.14 可以用局部基的语言重新叙述．我们称局部基 $\mathscr{B}$ 是均衡的，若它