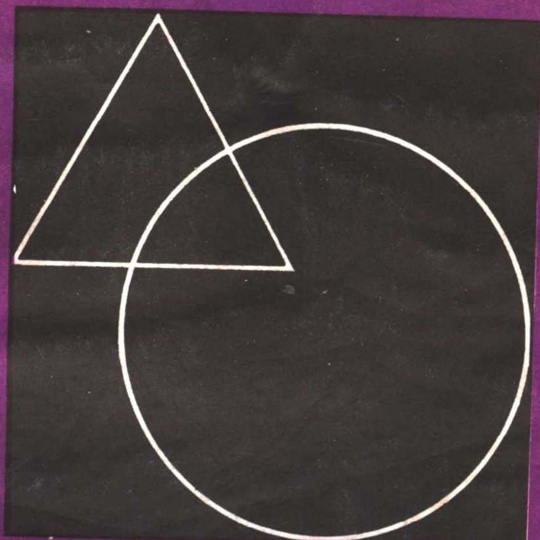
初中数学

巧解200题



CHUZHONG SHUXUE
QIAOJIE ERBAI TI

辽宁少年儿童出版社

初 中 数 学

巧 解 200 题

李 锦 韬
王 守 勋 编著
于 连 琪

辽宁少年儿童出版社
1986 · 沈阳

初　中　数　学
巧 解200 题
李锦韬　王守勋　于连琪　编著

辽宁少年儿童出版社出版
（沈阳市南京街6段1里2号）
锦西印刷厂印刷　辽宁省新华书店发行
开本787×1092毫米1/32·印张4·字数80,000
1986年5月第1版　1986年5月第1次印刷
印数1—60,500

统一书号：7289·85　定价：0.51元

目　录

一、分解因式

1.　$x^3-ax^2-2ax+a^2-1$。

解：原式$=a^2-(x^2+2x)a+x^3-1$

$=a^2-[(x-1)+(x^2+x+1)]a+(x-1)(x^2+x+1)$

$=[a-(x-1)][a-(x^2+x+1)]$

$=(-x+a+1)(-x^2-x+a-1)$

$=(x-a-1)(x^2+x-a+1)$。

说明：将原式整理成关于a的二次三项式，再用二次三项式的分解方法分解，充分发挥十字相乘法的作用。

2.　$(xy+1)(x+1)(y+1)+xy$。

解：原式$=(xy+1)[(xy+1)+(x+y)]+xy$

$=(xy+1)^2+(x+y)(xy+1)+xy$

$=(xy+1+x)(xy+1+y)$

$=(xy+x+1)(xy+y+1)$。

说明：将原式变换为关于$(xy+1)$的二次三项式，再用十字相乘法分解。

3.　$3x^2-6\sqrt{3}x+8$。

解：设　$y=\sqrt{3}x$，则$y^2=3x^2$。

原式$=y^2-6y+8$

$= (y-2)(y-4)$

$= (\sqrt{3}x-2)(\sqrt{3}x-4)$。

说明：所给多项式为非整系数二次三项式，虽可用十字相乘法分解，但比较困难；因此，可通过换元将原式化为整系数二次三项式。

4． $(x^2+3x-3)(x^2+3x+4)-8$。

解：设 $y = x^2+3x+\frac{1}{2}$，

原式 $= \left(y-\frac{7}{2}\right)\left(y+\frac{7}{2}\right)-8$

$= y^2-\frac{49}{4}-8$

$= y^2-\frac{81}{4}$

$= \left(y-\frac{9}{2}\right)\left(y+\frac{9}{2}\right)$

$= \left(x^2+3x+\frac{1}{2}-\frac{9}{2}\right)\left(x^2+3x+\frac{1}{2}+\frac{9}{2}\right)$

$= (x^2+3x-4)(x^2+3x+5)$

$= (x+4)(x-1)(x^2+3x+5)$。

说明：$x^2+3x+\frac{1}{2}$ 是 x^2+3x-3 与 x^2+3x+4 的平均值，本题解题方法为平均值代换法。

5． $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$。

解：$(x+1)(x+7)=x^2+8x+7$，

$(x+3)(x+5)=x^2+8x+15$，

设 $y=x^2+8x+11$，

原式 $=(y-4)(y+4)+15$

$=y^2-16+15$

$=y^2-1$

$=(y-1)(y+1)$

$=(x^2+8x+10)(x^2+8x+12)$

$=(x+4-\sqrt{6})(x+4+\sqrt{6})(x+2)(x+6)$。

6. $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12)-3x^2$。

解：$(x+5)(x+12)=x^2+17x+60$，

$(x+6)(x+10)=x^2+16x+60$，

设 $x^2+16x+60=y$，

原式 $=4(y+x)y-3x^2$

$=4y^2+4xy-3x^2$

$=(2y+3x)(2y-x)$

$=(2x^2+35x+120)(2x^2+31x+120)$

$=2\left(x+\dfrac{35-\sqrt{265}}{4}\right)\left(x+\dfrac{35+\sqrt{265}}{4}\right)(2x+15)$

$(x+8)$。

7. (1) $2x^2+7xy+3y^2+9x+2y-5$；

(2) $x^2+xy-6y^2+x+13y-6$；

(3) $2x^2+xy-6y^2+2x+11y-4$。

解：(1) 由 $2x^2+7xy+3y^2=(2x+y)(x+3y)$，

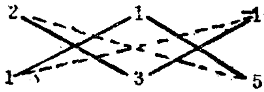
令原式中 $x=0$，则得 $3y^2+2y-5$，

$3y^2+2y-5=(y-1)(3y+5)$，且$2\times5+1\times(-1)=9$，

则原式$=(2x+y-1)(x+3y+5)$。

说明：二元二次多项式的因式分解，一般多采用待定系数法，但过程较繁琐；本题分两次使用十字相乘法，可简便分解二元二次多项式。其草式为

$$\begin{array}{ccc} 2 & & 1 \\ & \times & \\ 1 & & 3 \end{array} \quad 及 \quad \begin{array}{ccc} 1 & & -1 \\ & \times & \\ 3 & & 5 \end{array}$$

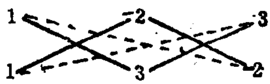
可连写为 ，上下两行即为所求因式的系数。故原式$=(2x+y-1)(x+3y+5)$。

(2) $x^2+xy-6y^2=(x-2y)(x+3y)$

令原式中 $x=0$，得 $-6y^2+13y-6$，

而$-6y^2+13y-6=(-2y+3)(3y-2)$，且$1\times(-2)+1\times3=1$，

则原式$=(x-2y+3)(x+3y-2)$。

［注：草算式为 ］

(3) $2x^2+xy-6y^2=(x+2y)(2x-3y)$

令原式中 $x=0$，得 $-6y^2+11y-4=(2y-1)(-3y+4)$，

且 $1\times4+2\times(-1)=2$，

所以原式$=(x+2y-1)(2x-3y+4)$。

8. $x^3+y^3+z^3-3xyz$.

解：设　$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)[k(x^2+y^2+z^2)+l(xy+yz+zx)]$，

比较两边x^3系数，得　$k=1$；

又令　$x=1,y=1,z=0$，得　$l=-1$；

则原式$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$.

说明（1）可分解的三次多项式，必有一个因式是一次的；又因为原式是关于x、y、z的轮换对称式，则其分解后的因式也是关于x、y、z的轮换对称式，由以上两点，设原式$=(x+y+z)[k(x^2+y^2+z^2)+l(xy+yz+zx)]$.

（2）本题的分解结果是常常有用的.

9. $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$.

解：由$c-a=-[(a-b)+(b-c)]$，

得　$(c-a)^3=-[(a-b)+(b-c)]^3$，

故原式$=(a-b)^3+(b-c)^3-[(a-b)^3+(b-c)]^3$

$=-3(a-b)(b-c)[(a-b)+(b-c)]$

$=3(a-b)(b-c)(c-a)$.

另解：利用第8题结果：

$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$，

当　$x+y+z=0$时，$x^3+y^3+z^3=3xyz$.

由　$(a-b)+(b-c)+(c-a)=0$，可立得

$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a)$

10. $(1+x+x^2+x^3)^2-x^3$.

解：设　$y=1+x+x^2$，

原式$=(y+x^3)^2-x^3$

$=y^2+2yx^3+x^6-x^3$

$=y^2+2yx^3+x^3(x-1)(x^2+x+1)$

$=y^2+2yx^3+x^3(x-1)y$

$=y(y+2x^3+x^4-x^3)$

$=(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3+x^4)$。

说明：用y代换$1+x+x^2$的目的是使恒等变换过程中式子简化，并便于找出规律。

二、化简或求值

11. 已知 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

求 $\frac{1+x}{1+\sqrt{1+x}}+\frac{1-x}{1-\sqrt{1-x}}$。

解：$\because\ x=\frac{\sqrt{3}}{2}$，　$\therefore\ 2x=\sqrt{3}$，

$$\frac{1+x}{1+\sqrt{1+x}}=\frac{2+2x}{2+2\sqrt{1+x}}=\frac{2+2x}{2+\sqrt{4+2(2x)}}$$

$$=\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{4+2\sqrt{3}}}=\frac{2+\sqrt{3}}{2+(\sqrt{3}+1)}=\frac{3+\sqrt{3}}{6},$$

$$\frac{1-x}{1-\sqrt{1-x}}=\frac{2-2x}{2-2\sqrt{1-x}}=\frac{2-2x}{2-\sqrt{4-2(2x)}}$$

$$=\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}=\frac{2-\sqrt{3}}{2-(\sqrt{3}-1)}=\frac{3-\sqrt{3}}{6},$$

$$\therefore\frac{1+x}{1+\sqrt{1+x}}+\frac{1-x}{1-\sqrt{1-x}}$$

$$=\frac{3+\sqrt{3}}{6}+\frac{3-\sqrt{3}}{6}=1.$$

说明：本题解法巧在将 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 化为 $2x=\sqrt{3}$，再将

所求式配出$2x$后求其值，一些类似题可采用这种办法。

12. 已知 $3x=1$，

求 $\dfrac{2(1+2\sqrt{x})}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}$。

解：$\dfrac{1+2\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{3}(1+2\sqrt{x})}{\sqrt{3}(1-\sqrt{x})}=\dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{3x}}{\sqrt{3}-\sqrt{3x}}$

$=\dfrac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{5+3\sqrt{3}}{2}$，

则 $\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}=\dfrac{2}{5+3\sqrt{3}}=3\sqrt{3}-5$，

所以 $\dfrac{2(1+2\sqrt{x})}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}$

$=2\times\dfrac{5+3\sqrt{3}}{2}-(3\sqrt{3}-5)$

$=10$。

13. 已知 $x=2+\sqrt{3}$，求

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+8\text{的值。}$$

解：∵ $2+\sqrt{3}$与$2-\sqrt{3}$互为倒数，

∴ $x+\dfrac{1}{x}=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$，

∴ 原式$=4^2-4\times4+8=8$。

说明：$\sqrt{2}+1$与$\sqrt{2}-1$；$2+\sqrt{3}$与$2-\sqrt{3}$；$3+2\sqrt{2}$与$3-2\sqrt{2}$等互为倒数，这种关系的熟练应

用，常能起巧解作用.

14. 求$\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$的值.

解：设 $x=\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$，

则 $x^2=(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}})^2$，

整理得$x^2=6$，

$\therefore\ x=\pm\sqrt{6}$（$-\sqrt{6}$不合题意，故舍去）。

得原式$=\sqrt{6}$.

说明：此题如采用$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$求法较繁，且不易得到正确答案，如将求值问题整个用字母替换求解，则思路简捷，解题明快，别具一格.

15. 已知 $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，

求 $x^5+x^4-10x^3-10x^2+2x+1$.

解：由 $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，

则 $x^2=5-2\sqrt{6}$，

$5-x^2=2\sqrt{6}$，

由 $(5-x^2)^2=(2\sqrt{6})^2$，

得 $x^4-10x^2+1=0$.

$x^5+x^4-10x^3-10x^2+2x+1$

$=(x^5-10x^3+x)+(x^4-10x^2+1)+x$

$=x\cdot 0+0+x$

$=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

16. 已知 $x=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$，

求 $\frac{1}{2}x^3 - x^2 - x + 1$。

解：$x = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}+1$，$x-1=\sqrt{3}$，

则 $\frac{1}{2}x^3 - x^2 - x + 1$

$= \frac{1}{2}(x^3 - 2x^2 - 2x + 2)$

$= \frac{1}{2}[(x^3 - 2x^2 + x) - 3x + 2]$

$= \frac{1}{2}[x\cdot(x-1)^2 - 3x + 2]$

$= \frac{1}{2}[x\cdot(\sqrt{3})^2 - 3x + 2]$

$= \frac{1}{2}\times 2$

$= 1$。

17. 当 $x=\sqrt{7}-2$时，求多项式 $2x^3+9x^2+3x+5$的值。

解：由 $x=\sqrt{7}-2$，得$x+2=\sqrt{7}$，

两边平方并整理得 $x^2+4x-3=0$，用 x^2+4x-3 除原多项式，则

$2x^3+9x^2+3x+5=(x^2+4x-3)(2x+1)+5x+8$。

则当 $x=\sqrt{7}-2$时，

原式$=5(\sqrt{7}-2)+8=5\sqrt{7}-2$。

说明：此题巧用整式除法求高次多项式值的方法，当所给多项式次数较高，则用此法越显得简便得多．关键是由所给 x 值变形，求得合适的除式，且 当 x 等于已知值时除式为零，即可将求原多项式值转化为当 x 给定值时求余式的值．

18． 已知 $x=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，$y=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$，

求 $3x^2-5xy+3y^2$．

解：$x=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$，

$y=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$，

则 $x+y=10$，$xy=1$，

所以 $3x^2-5xy+3y^2$

$=3(x^2+y^2)-5xy$

$=3(x+y)^2-11xy$

$=3\times 10^2-11\times 1$

$=289$．

说明：将条件变形得 $x=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$，$y=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$，再从求证结论上思考，可将二次齐式 $3x^2-5xy+3y^2$ 用关于 $(x+y)$ 与 xy 的式子表出。所以此题巧解关键是求出 $x+y$、xy．

19． 已知 $3x^2-5x=6$，

求 $3x^3+4x^2-21x-8$．

解：$3x^3+4x^2-21x-8$

$=(3x^3-5x^2)+(9x^2-15x)-6x-8$

$=x\cdot(3x^2-5x)+3(3x^2-5x)-6x-8$

$=6x+18-6x-8$

$=10.$

20. 已知 $x^2+x=\dfrac{1}{3}$，

求 $6x^4+15x^3+10x^2$.

解：$6x^4+15x^3+10x^2$

$=(6x^4+6x^3)+(9x^3+9x^2)+x^2$

$=6x^2(x^2+x)+9x(x^2+x)+x^2$

$=6x^2\cdot\dfrac{1}{3}+9x\cdot\dfrac{1}{3}+x^2$

$=3x^2+3x$

$=3(x^2+x)$

$=3\times\dfrac{1}{3}$

$=1.$

21. 若 $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=2$，

求 $\dfrac{2x-xy-2y}{x+xy-y}$.

解：$\dfrac{2x-xy-2y}{x+xy-y}=\dfrac{\dfrac{2x-xy-2y}{xy}}{\dfrac{x+xy-y}{xy}}$

$$=\frac{\dfrac{2}{y}-1-\dfrac{2}{x}}{\dfrac{1}{y}+1-\dfrac{1}{x}}=\frac{-2\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)-1}{-\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)+1}$$

$$=\frac{-2\times2-1}{-2+1}$$

$$=5.$$

22. 已知 $x+y-2=0$，

$2y^2-y-4=0$，

求 $y-\dfrac{x}{y}$.

解：$\because$ $x+y-2=0$，$\therefore x=2-y$；

$\because$ $2y^2-y-4=0$ $\therefore$ $y^2=\dfrac{1}{2}(y+4)$；

则 $y-\dfrac{x}{y}=\dfrac{y^2-x}{y}$

$$=\frac{\frac{1}{2}(y+4)-(2-y)}{y}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}y}{y}$$

$$=\frac{3}{2}.$$

23. 已知 $\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})=3\sqrt{y}(\sqrt{x}+5\sqrt{y})$，$(x>0, y>0)$

求 $\dfrac{2x+\sqrt{xy}+3y}{x+\sqrt{xy}-y}$.

解：由已知得 $x+\sqrt{xy}=3\sqrt{xy}+15y$，