弹性动力学的几个专题

王其申 著

TANXING DONGLIXUE DE JIGE ZHUANTI

合肥工业大学出版社

弹性动力学的几个专题

TANXING DONGLIXUE DE JIGE ZHUANTI

王其申 著

合肥工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

弹性动力学的几个专题/王其申著．—合肥：合肥工业大学出版社，2005.12
ISBN 7-81093-332-9

Ⅰ．弹… Ⅱ．王… Ⅲ．弹性动力学—文集 Ⅳ．O347-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 134005 号

弹性动力学的几个专题

王其申 著 责任编辑 疏利民 责任校对 方 丹

出 版	合肥工业大学出版社	版 次	2005 年 12 月第 1 版
地 址	合肥市屯溪路 193 号	印 次	2005 年 12 月第 1 次印刷
邮 编	230009	开 本	787×1092 1/16
电 话	总编室：0551－2903038	印 张	13 字 数 316 千字
	发行部：0551－2903198	发 行	全国新华书店
网 址	www.hfutpress.com.cn	印 刷	合肥现代印务有限公司
E-mail	press@hfutpress.com.cn	纸 张	山东光华纸业集团有限公司

ISBN 7-81093-332-9/O·24 定价：26.00 元

自　　序

近年来，我所在的学校提出了“稳定、拓展、上层次”的发展方针，作为学校的一员，我为学校近年来的发展步伐所鼓舞，也想为学校的进一步发展尽绵薄之力。思虑再三，决定汇编这本论文集，既是作为展示学校整体发展实力的一个细胞，也是对自己的一种激励。

（一）

我的科研之路平凡而不平坦。尽管青少年时期也曾有过种种的幻想，尽管我也曾为中学名校的尖子生，也曾就读于名牌大学，但上个世纪那场“轰轰烈烈”的“革命”中断了我的学业，8年的中教生涯使我离科研前沿越来越远。在“科学的春天”里，已过而立之年的我有幸重回母校，在被人们戏称为“回炉班”的进修班中才修完了大学本科的主要课程。正当我在为此而庆幸的时候，命运之神又给了我双重打击。新婚不久的前妻染上了“不死的癌症”——类风湿性关节炎，先是关节强直，生活不能自理，继而瘫痪在床，日常生活全靠我来护理，这样的生活延续了20年；我的双眼患有先天性白内障，由于长期生活的艰辛，就在回炉班期间视力下降到左眼0.1和右眼0.01。就在我极度苦闷之际，是恩师——北京大学力学系的王大钧教授给我引了路，在他多次动员而我终未能去就读他的研究生的情况下，为我设计了后来的科研之路：偏重理论、偏重数学。在回炉班没有毕业论文任务的情况下，他带我做了可以算得上做毕业论文的工作，教我查文献，指导我如何一步一步地做科研；在我回到家乡的这所地方性师范院校从教后，又不失时机地给我寄来资料和最新出版物，指导我选定科研课题；在我形成论文初稿后，逐字逐句地审阅，甚至帮我改正错别字；在我为生活而迷茫的时候，给我压担子，指方向；为了扩大我的视野，多次资助我出席国内、国际学术会议。……正是有了恩师的指引，我的科研才有了一点点成绩，可以说，这本论文集本身就包含了恩师的心血，值此文集出版之际，我最要说的就是：谢谢恩师。

（二）

这本文集收录了我20年来的主要科研成果，分为4个专题，共计收录了28篇专题学术论文，全部在国内外公开出版物上发表过。其中第一专题“弹性结构振动的定性性质”和第二专题“弹性结构振动的反问题”基本上是在王大钧教授指导下完成的；第三专题“特征值的包含定理”早期也曾得到过恩师的指导，只有第四专题“泛复变函数方法在力学与物理中的应用”完全是个人的独立工作。有关这些专题研究的价值，笔者在此不敢自吹自擂，相信读者自有公正的评价。

需要说明的是，文集中收录的论文包括本人独撰的论文14篇，作为第一作者的论文13篇。出于对合作者的尊重，对所有合著的论文，我都在该文的第一页下方做了注释。至于收入本文集的唯一一篇本人仅为第二作者的论文，其理由也在该部分的序言和该首页的下方做了说明。

文集并未包含作者的全部学术论文，本人作为第二作者及排名更后的论文理所当然地没有收入，作者在教学研究领域和近几年在声学领域的一些成果，由于难以纳入这本文集的专题之下也未收入。

（三）

科学的道路是漫长的，我在这条道路上已经走过了20多年，虽有一点成绩，但与众多的同行相比，相距甚远。出版这本文集的目的，更在于向众多的同行请教。如果能够得到诸位同行尤其是大师级的同行的指教，笔者不胜感激！

（四）

本文集的出版得到安庆师范学院学科专业建设基金的资助，在此表示诚挚的感谢！

作　者

2005年8月28日于安庆

目　录

自序

第一专题　弹性结构振动的定性性质

第二专题　弹性结构振动的反问题

第一专题

弹性结构振动的定性性质

研究结构的固有振动的定性性质具有重要的理论意义和应用价值。首先，定性性质的理论是讨论振动反问题的基础，在这类问题中利用频率和模态数据确定结构的物理参数；其次，利用定性性质的理论可有助于判断频率和模态的真伪。

在这一部分中，收录了笔者作为第一作者或独撰的学术论文共 9 篇，其中发表在国家核心期刊上的论文 5 篇。该部分着重研究了任意支承条件下的杆和梁的离散系统刚度矩阵以及相应连续系统格林函数的振荡特性，导出了这些系统频谱的离散性和相间性；证明了位移模态和应变模态的充分必要条件；修正了梁的正系统的定义；验证了离散系统刚度矩阵和相应连续系统格林函数之间的极限关系；阐明了由离散系统刚度矩阵的符号振荡性直接导出相应连续系统格林函数振荡性的极限过渡法。此外，也汇集了均匀各向同性弹性圆柱体的各种振动模式以及边界参数变动对梁的频率和模态的影响。

各向同性弹性圆柱体的固有振动

摘　要　本文以严密的数学形式导出了各向同性弹性圆柱体固有振动方程的通解，在侧面自由的边条件下证明了通解与历史上已有的 Pochhammer 解的一致性。在此基础上全面给出了圆柱体振动问题的各种可能的振型和相应的频率方程。

关键词　圆柱体　固有振动　侧面自由　振型　频率方程

一　引　言

关于各向同性弹性圆柱体的固有振动的问题，早在 1876 年，Pochhammer 即在文献[1]中进行了研究，给出了方程的一组解（以下简称 Po－解）。随后出现的各种文献资料都没有超出 Po－解的范围，只是在频率分析、振型分析、有限元分析及其他近似解法等方面作了大量工作。鉴于 Po－解的导出过程并无严格的数学依据，本文从分离变量法入手，首先导出了各向同性弹性圆柱体固有振动方程组的通解，证明了在圆柱侧面自由边条件下通解化为 Po－解；在此基础上，对圆柱固有振动问题进行了全面系统的振型分析和频率分析。

二　基本方程组及其通解

各向同性弹性圆柱体固有振动方程是[2,3]

$$\rho \ddot{\boldsymbol{u}} = (\lambda + 2\mu)\,\text{grad div}\,\boldsymbol{u} - \mu\,\text{rot rot}\,\boldsymbol{u} \tag{2.1}$$

在柱坐标 r、θ、z 下，它的分量形式是

$$\begin{cases} \rho \ddot{u}_r = (\lambda + 2u)\dfrac{\partial \varepsilon_0}{\partial r} - \dfrac{2\mu}{r}\dfrac{\partial \omega_z}{\partial \theta} + 2\mu \dfrac{\partial \omega_\theta}{\partial z} \\ \rho \ddot{u}_\theta = (\lambda + 2u)\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \varepsilon_0}{\partial \theta} - 2\mu \dfrac{\partial \omega_r}{\partial z} + 2\mu \dfrac{\partial \omega_z}{\partial r} \\ \rho \ddot{u}_z = (\lambda + 2u)\dfrac{\partial \varepsilon_0}{\partial z} - \dfrac{2\mu}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\omega_\theta) + \dfrac{2\mu}{r}\dfrac{\partial \omega_r}{\partial \theta} \end{cases} \tag{2.2}$$

式中 ρ 是柱体材料的密度，$\boldsymbol{u} = (u_r, u_\theta, u_z)$，是位移矢量，$\lambda$、$\mu$ 是弹性常数，“·”表示对时间的微商，而

* 本文原载于《安庆师范学院学报》（自然科学版），1984 年第 1 期。

$$\varepsilon_0 = \operatorname{div} \boldsymbol{u} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= (\omega_r, \omega_\theta, \omega_z) = \operatorname{rot} \boldsymbol{u}/2 \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}, \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial (ru_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right]\end{aligned} \tag{2.4}$$

对(2.1)式两边取散度，由于 $\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega} = 0$，我们有

$$\rho\ddot{\varepsilon}_0 = (\lambda + 2\mu)\ \nabla^2 \varepsilon_0 \tag{2.5}$$

利用分离变量法，不难求得

$$\varepsilon_0 = -A\frac{\rho p^2}{\lambda + 2\mu}\mathrm{J}_m(hr)\cos(m\theta + \theta_0)\cos(\alpha z + \beta)\mathrm{e}^{ipt} \tag{2.6}$$

式中

$$h^2 = \frac{\rho p^2}{\lambda + 2\mu} - \alpha^2 \tag{2.7}$$

而 A 是积分常数，p 是圆频率，由于周期性可知 m 必为整数，α 则由端面条件来决定。

再对(2.1)式两边取旋度，由于 $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varepsilon_0 = 0$，我们有

$$\rho\ddot{\boldsymbol{\omega}} = -\mu \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega} = -\mu(\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{\omega} - \nabla^2\boldsymbol{\omega})$$

因

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{u} = 0 \tag{2.8}$$

故有

$$\rho\ddot{\boldsymbol{\omega}} = \mu\ \nabla^2\boldsymbol{\omega} \tag{2.9}$$

这是个矢量方程，它的 Z 向(轴向)方程是

$$\rho\omega_z = \mu\ \nabla^2\omega_z \tag{2.10}$$

相应的分离变量形式的解是

$$2\omega_z = Bk^2\mathrm{J}_{m'}(kr)\sin(m'\theta + \theta_1)\cos(\alpha_1 z + \beta_1)\mathrm{e}^{ipt} \tag{2.11}$$

式中

$$k^2 = \frac{\rho p^2}{\mu} - \alpha_1{}^2 \tag{2.12}$$

其余各量意义同前，只是 m'、α_1 是独立于 m、α 的本征值。(2.9)式的径向分量式是

$$\rho\ddot{\omega}_r = \mu\left(\nabla^2\omega_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial\omega_\theta}{\partial\theta} - \frac{\omega_r}{r^2}\right)$$

由(2.8)式

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \omega_\theta}{\partial \theta} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\omega_r) - \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \tag{2.13}$$

故有

$$\rho r\ddot{\omega}_r = \mu\left[r\,\nabla^2\omega_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\omega_r) + 2\frac{\partial \omega_z}{\partial z} - \frac{\omega_r}{r}\right] = \mu\left[\nabla^2\left(r\omega_r + 2\frac{\partial \omega_z}{\partial z}\right)\right] \tag{2.14}$$

为了消去 $2\frac{\partial \omega_z}{\partial z} = -Bk^2\alpha_1 J_{m'}(kr)\sin(m'\theta+\theta_1)\sin(\alpha_1 z+\beta_1)e^{ipt}$ 的非齐次项，我们可令

$$r\omega_r = f_1(r,\theta,z,t) + f_2(r,\theta,z,t)$$

不难验证，相应于上述非齐次项的特解是：

$$2f_2 = -B\alpha_1 r\frac{\mathrm{d}J_{m'}(kr)}{\mathrm{d}r}\sin(m'\theta+\theta_1)\sin(\alpha_1 z+\beta_1)e^{ipt}$$

而 f_1 满足齐次方程

$$\rho\ddot{f}_1 = \mu\,\nabla^2 f_1$$

于是解得：

$$2f_1 = -C\frac{\rho p^2}{\mu}m''J_{m''}(k'r)\sin(m''\theta+\theta_2)\sin(\alpha_2 z+\beta_2)e^{ipt}$$

式中

$$k'^2 = \frac{\rho p^2}{\mu} - \alpha_2{}^2 \tag{2.15}$$

这样，我们得到

$$\begin{aligned}2\omega_r = &-C\frac{\rho p^2}{\mu}\frac{m''}{r}J_{m''}(k'r)\sin(m''\theta+\theta_2)\sin(\alpha_2 z+\beta_2)e^{ipt}\\ &-B\alpha_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}J_{m'}(kr)\sin(m'\theta+\theta_1)\sin(\alpha_1 z+\beta_1)e^{ipt}\end{aligned} \tag{2.16}$$

最后，由(2.13)式不难求得

$$\begin{aligned}2\omega_\theta = &-C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}J_{m''}(k'r)\cos(m''\theta+\theta_2)\sin(\alpha_2 z+\beta_2)e^{ipt}\\ &-B\frac{\alpha_1 m_1}{r}J_{m'}(kr)\cos(m'\theta+\theta_1)\sin(\alpha_1 z+\beta_1)e^{ipt}\end{aligned} \tag{2.17}$$

以(2.6)、(2.11)、(2.16)、(2.17)式代入方程组(2.2)并对 t 积分，立即得到：

$$\begin{cases} u_1 = \left\{A\dfrac{\mathrm{dJ}_m(hr)}{\mathrm{d}r}\cos(m\theta+\theta_0)\cos(\alpha z+\beta)+B\dfrac{m'}{r}\mathrm{J}_{m'}(kr)\cos(m'\theta+\theta_1)\cos(\alpha_1 z+\beta_1)+\right. \\ \qquad\qquad \left. C\alpha_2\dfrac{\mathrm{dJ}_{m''}(k'r)}{\mathrm{d}r}\cos(m''\theta+\theta_2)\cos(\alpha_2 z+\beta_2)\right\}\mathrm{e}^{ipt} \\ u_\theta = \left\{-A\dfrac{m}{r}\mathrm{J}_m(hr)\sin(m\theta+\theta_0)\cos(\alpha z+\beta)-B\dfrac{\mathrm{dJ}_{m'}(kr)}{\mathrm{d}r}\sin(m'\theta+\theta_1)\cos(\alpha_1 z+\beta_1)\right. \\ \qquad\qquad \left. -C\dfrac{\alpha_2 m''}{r}\mathrm{J}_{m''}(k'r)\sin(m''\theta+\theta_2)\cos(\alpha_2 z+\beta_2)\right\}\mathrm{e}^{ipt} \\ u_z = \{-A\alpha\mathrm{J}_m(hr)\cos(m\theta+\theta_0)\sin(\alpha z+\beta) \\ \qquad\qquad +Ck'^2\mathrm{J}_{m''}(k'r)\cos(m''\theta+\theta_2)\sin(\alpha_2 z+\beta_2)\}\mathrm{e}^{ipt} \end{cases} \tag{2.18}$$

这就是各向同性弹性圆柱体固有振动方程组的通解，这里 A、B、C 是积分常数，它由初始条件来决定；J_m、$\mathrm{J}_{m'}$、$\mathrm{J}_{m''}$ 都是贝塞尔函数；m、m'、m'' 及 α、α_1、α_2 是各自独立的本征值。

三　频率方程

在导出圆柱固有振动方程的通解以后，下面我们来证明，在圆柱侧面自由的边条件下，$m=m'=m''$，$\theta_0=\theta_1=\theta_2$，$\alpha=\alpha_1=\alpha_2$，$\beta=\beta_1=\beta_2$，从而解式(2.18) 化为 Po－解。

圆柱侧面自由的边条件是

$$\sigma_{rr}\big|_{r=a}=\sigma_{r\theta}\big|_{r=a}=\sigma_{rz}\big|_{r=a}=0$$

这里 a 是圆柱半径，以 $\boldsymbol{u}$ 的表达式代入，并记 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\mathrm{J}_m(hr)\big|_{r=a}$ 为 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\mathrm{J}_m(ha)$ 等等，则有

$$\begin{aligned} &Af_{11}(a)\cos(m\theta+\theta_0)\cos(\alpha z+\beta)+Bf_{12}(a)\cos(m'\theta+\theta_1)\cos(\alpha_1 z+\beta_1) \\ &\qquad +Cf_{13}(a)\cos(m''\theta+\theta_2)\cos(\alpha_2 z+\beta_2)=0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} &Af_{21}(a)\sin(m\theta+\theta_0)\cos(\alpha z+\beta)+Bf_{22}(a)\sin(m'\theta+\theta_1)\cos(\alpha_1 z+\beta_1) \\ &\qquad +Cf_{23}(a)\sin(m''\theta+\theta_2)\cos(\alpha_2 z+\beta_2)=0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} &Af_{31}(a)\cos(m\theta+\theta_0)\sin(\alpha z+\beta)+Bf_{32}(a)\cos(m'\theta+\theta_1)\sin(\alpha_1+\beta_1) \\ &\qquad +Cf_{33}(a)\cos(m''\theta+\theta_2)\sin(\alpha_2 z+\beta_2)=0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

其中：

$$f_{11}(a)=-\frac{\rho p^2\lambda}{\lambda+2\mu}\mathrm{J}_m(ha)+2\mu\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{J}_m(ha)}{\mathrm{d}a^2}$$

$$f_{12}(a)=2\mu m'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\frac{\mathrm{J}_{m'}(ka)}{a}\qquad f_{13}(a)=2\mu\alpha_2\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{J}_{m''}(k'a)}{\mathrm{d}a^2}$$

$$f_{21}(a)=m\left[\frac{2}{a}\frac{\mathrm{dJ}_m(ha)}{\mathrm{d}a}-\frac{2\mathrm{J}_m(ha)}{a^2}\right]\qquad f_{22}(a)=\frac{m'^2}{a^2}\mathrm{J}_{m'}(ka)+a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(\frac{1}{a}\frac{\mathrm{dJ}_{m'}(ka)}{\mathrm{d}a}\right)$$

$$f_{23}(a)=\alpha_2 m''\left[\frac{2}{a}\frac{\mathrm{dJ}_{m''}(k'a)}{\mathrm{d}a}-\frac{2\mathrm{J}_{m''}(k'a)}{a^2}\right]$$

$$f_{31}(a)=-2\alpha\frac{\mathrm{dJ}_m(ha)}{\mathrm{d}a}\qquad f_{32}(a)=-\frac{\alpha_1 m'}{a}\mathrm{J}_{m'}(ka)\qquad f_{33}(a)=(k'^2-\alpha_2^2)\frac{\mathrm{dJ}_{m''}(k'a)}{\mathrm{d}a}$$

为了证明我们的结论，我们首先指出以下几点事实：

(1)(2.18) 式对一切 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 和 $0\leqslant z\leqslant l$ 都成立；

(2) 矩阵 $\{f_{ij}(a)\}_{3\times3}$ 具有这样两条性质：

性质 1　它的每一列中三个元素不同时为 0*。

事实上，矩阵的每一个元素都可以改写成 J_m 与 $\mathrm{dJ}_m/\mathrm{d}a$ 的线性组合，如果它的某一列三个元素同时为 0，则必有 $\mathrm{J}_m=\mathrm{dJ}_m/\mathrm{d}a=0$，这与贝塞尔函数的性质矛盾。

性质 2　当 $m=m'=m''$，$\alpha=\alpha_1=\alpha_2$ 时，矩阵的每两列是线性无关的。**

这可由以下事实来证明，即用数值解法不难验证 $\begin{vmatrix} f_{11} & f_{1j}\\ f_{21} & f_{2j}\end{vmatrix}$ 与 $\begin{vmatrix} f_{11} & f_{1j}\\ f_{31} & f_{3j}\end{vmatrix}$ $(j=2.3)$ 以及 $\begin{vmatrix} f_{12} & f_{13}\\ f_{22} & f_{23}\end{vmatrix}$ 与 $\begin{vmatrix} f_{12} & f_{13}\\ f_{32} & f_{33}\end{vmatrix}$ 没有公共根。

从这些事实出发，即可证明我们的结论。首先我们证明 $m=m'=m''$，我们用反证法。

假如结论不真，则可分为两种情况：

情况一：m、m'、m'' 各不相同。

此时，m、m'、m'' 中至少有一个不为 0，不妨设 $m\neq0$，因：

$$\cos(m'\theta+\theta_1)=\cos\left(\theta_1-\frac{m'}{m}\theta_0\right)\cos m'\left(\theta+\frac{\theta_0}{m}\right)-\sin\left(\theta_1-\frac{m'}{m}\theta_0\right)\sin m'\left(\theta+\frac{\theta_0}{m}\right)$$

$$\cos(m''\theta+\theta_2)=\cos\left(\theta_2-\frac{m''}{m}\theta_0\right)\cos m''\left(\theta+\frac{\theta_0}{m}\right)-\sin\left(\theta_2-\frac{m''}{m}\theta_0\right)\sin m''\left(\theta+\frac{\theta_0}{m}\right)$$

由三角函数的正交性，以 $\cos m\left(\theta+\frac{\theta_0}{m}\right)$ 乘以(3.1) 式两边并对 θ 由 0 至 2π 积分得到

$$Af_{11}(a)\cos(\alpha z+\beta)=0$$

同理有

$$Af_{21}(a)\cos(\alpha z+\beta)=0\qquad Af_{31}(a)\sin(\alpha z+\beta)=0$$

由矩阵 $\{f_{ij}(a)\}$ 的性质 1 和 z 的任意性，可以推得 $A=0$，同理可以推得 $B=C=0$，这与 A、B、C 不全为 0 矛盾。

情况二：m、m'、m'' 中有两个相等，不妨设 $m=m'\neq m''$；

---

* 有三种例外：(1) $m=\alpha=0$；(2) $m'=0$；(3) $\alpha_2=0$。这时，相应的列的三元素可以同时为零，但这不影响我们的结论。

** 以上两条性质在 $k'=0$ 时是例外，但在 $k'=0$ 时方程的解已不再含贝塞尔函数，必须另加讨论，但不会给出新的结果。

此时，如果 $m \neq 0$，则以 $\cos(m\theta+\theta_0)$ 乘以(17.1)式两边并对 θ 积分有

$$Af_{11}(a)\cos(\alpha z+\beta)+Bf_{12}(a)\cos(\alpha_1 z+\beta_1)\cos(\theta_1-\theta_0)=0 \tag{3.4}$$

同理有

$$Af_{21}(a)\cos(\alpha z+\beta)+Bf_{22}(a)\cos(\alpha_1 z+\beta_1)\cos(\theta_1-\theta_0)=0 \tag{3.5}$$

$$Af_{31}(a)\sin(\alpha z+\beta)+Bf_{32}(a)\sin(\alpha_1 z+\beta_1)\cos(\theta_1-\theta_0)=0 \tag{3.6}$$

又以 $\sin(m\theta+\theta_0)$ 乘以(3.1)式两边并积分可得

$$Bf_{12}(a)\cos(\alpha_1 z+\beta_1)\sin(\theta_1-\theta_0)=0 \tag{3.7}$$

同理有

$$Bf_{22}(a)\cos(\alpha_1 z+\beta)\sin(\theta_1-\theta_0)=0 \tag{3.8}$$

$$Bf_{32}(a)\sin(\alpha_1 z+\beta_1)\sin(\theta_1-\theta_0)=0 \tag{3.9}$$

如果 $\theta_1 \neq \theta_0$，鉴于它们是初相位，不妨设 $|\theta_1-\theta_0|<\pi$，于是 $\sin(\theta_1-\theta_0)\neq 0$，由(3.7)式－(3.9)式和矩阵 $\{f_{ij}\}$ 的性质1即得 $B=0$，再由(3.4)式－(3.6)式可得 $A=0$，而由(3.1)式－(3.3)式得 $C=0$，这同样是矛盾的。

如果 $\theta_1=\theta_0$，则(3.4)式－(3.6)式成为

$$\begin{cases} Af_{11}(a)\cos(\alpha z+\beta)+Bf_{12}(a)\cos(\alpha_1 z+\beta_1)=0 \\ Af_{21}(a)\cos(\alpha z+\beta)+Bf_{22}(a)\cos(\alpha_1 z+\beta_1)=0 \\ Af_{31}(a)\sin(\alpha z+\beta)+Bf_{32}(a)\sin(\alpha_1 z+\beta_1)=0 \end{cases} \tag{3.10}$$

这时，如果 $\alpha\neq\alpha_1$，完全类似地讨论给出 $A=B=C=0$，从而矛盾，如果 $\alpha=\alpha_1$，此时必有 $\beta=\beta_1$（证明见后），于是消去公因子后与矩阵 $\{f_{ij}(a)\}$ 的性质2矛盾。

如果 $m=m'=0$，(3.1)式－(3.3)式成为

$$\begin{cases} Af_{11}(a)\cos(\alpha z+\beta)\cos\theta_0+Cf_{13}(a)\cos(\alpha_2 z+\beta_2)\cos(m''\theta+\theta_2)=0 \\ Bf_{22}(a)\cos(\alpha_1 z+\beta)\sin\theta_1+Cf_{23}(a)\cos(\alpha_2 z+\beta_2)\sin(m''\theta+\theta_2)=0 \\ Af_{31}(a)\sin(\alpha z+\beta)\cos\theta_0+Cf_{33}(a)\sin(\alpha_2 z+\beta_2)\cos(m''\theta+\theta_2)=0 \end{cases} \tag{3.11}$$

这时对参数的不同情况的讨论或者给出 $A=B=C=0$ 的矛盾结果，或 A、B、C 虽不全为0，但并未超出 Po－解的范围。

综合以上情况，只能得出结论 $m=m'=m''$。同理可以得 $\alpha=\alpha_1=\alpha_2$。

更进一步，我们可以证明 $\theta_0=\theta_1=\theta_2$，分别以 $\cos(m\theta+\theta_0)$ 和 $\sin(m\theta+\theta_0)$ 乘以(3.1)式－(3.3)式的各式并积分，注意到业已证明 $m=m'=m''$，$\alpha=\alpha_1=\alpha_2$，则有

$$
\begin{cases}
Af_{11}(a)\cos(\alpha z+\beta)+Bf_{12}(a)\cos(\alpha z+\beta_1)\cos(\theta_1-\theta_0) \\
\qquad +Cf_{13}(a)\cos(\alpha z+\beta_2)\cos(\theta_2-\theta_0)=0 \\
Af_{21}(a)\cos(\alpha z+\beta)+Bf_{22}(a)\cos(\alpha z+\beta_1)\cos(\theta_1-\theta_0) \\
\qquad +Cf_{23}(a)\cos(\alpha z+\beta_2)\cos(\theta_2-\theta_0)=0 \\
Af_{31}(a)\sin(\alpha z+\beta)+Bf_{32}(a)\sin(\alpha z+\beta_1)\cos(\theta_1-\theta_0) \\
\qquad +Cf_{33}(a)\sin(\alpha z+\beta_2)\cos(\theta_2-\theta_0)=0
\end{cases}
\tag{3.12}
$$

$$
\text{及}\quad
\begin{cases}
Bf_{12}(a)\cos(\alpha z+\beta_1)\sin(\theta_1-\theta_0)+Cf_{13}(a)\cos(\alpha z+\beta_2)\sin(\theta_2-\theta_0)=0 \\
Bf_{22}(a)\cos(\alpha z+\beta_1)\sin(\theta_1-\theta_0)+Cf_{23}(a)\cos(\alpha z+\beta_2)\sin(\theta_2-\theta_0)=0 \\
Bf_{32}(a)\sin(\alpha z+\beta_1)\sin(\theta_1-\theta_0)+Cf_{33}(a)\sin(\alpha z+\beta_2)\sin(\theta_2-\theta_0)=0
\end{cases}
\tag{3.13}
$$

如果 θ_0、θ_1、θ_2 互不相等，则 $\sin(\theta_1-\theta_0)\neq 0$，$\sin(\theta_2-\theta_0)\neq 0$，由(3.13)式及矩阵 $\{f_{ij}(a)\}$ 的性质 2 推出 $B=C=0$，同时也有 $A=0$，从而矛盾；如果 θ_0、θ_1、θ_2 中只有两个相等，例如 $\theta_0=\theta_1$，则由(3.13)式推得 $C=0$，再由(3.12)式得 $A=B=0$，仍旧矛盾，这就表明 $\theta_0=\theta_1=\theta_2$，同理也有 $\beta=\beta_1=\beta_2$。这就完成了全部证明，即在圆柱侧面自由的边条件下，解式(2.18)化成Po一解。

$$
\begin{cases}
u_r=\left[A\dfrac{\mathrm{d}J_m(hr)}{\mathrm{d}r}+B\dfrac{m}{r}J_m(kr)+C\alpha\dfrac{\mathrm{d}J_m(kr)}{\mathrm{d}r}\right]\cos(m\theta+\theta_0)\cos(\alpha z+\beta)e^{ipt} \\
u_\theta=\left[-A\dfrac{m}{r}J_m(hr)-B\dfrac{\mathrm{d}J_m(kr)}{\mathrm{d}r}-C\alpha m\dfrac{J_m(kr)}{r}\right]\sin(m\theta+\theta_0)\cos(\alpha a+\beta)e^{ipt} \\
u_z=\left[-A\alpha J_m(hr)+Ck^2J_m(kr)\right]\cos(m\theta+\theta_0)\sin(\alpha z+\beta)e^{ipt}
\end{cases}
\tag{3.14}
$$

相应的频率方程是：

$$
\begin{vmatrix}
-\dfrac{\lambda\rho p^2}{\lambda+2\mu}J_m(ha)+2\mu\dfrac{\mathrm{d}^2J_m(ha)}{\mathrm{d}a^2} & 2\mu m\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\dfrac{J_m(ka)}{a} & 2\mu\alpha\dfrac{\mathrm{d}^2J_m(ka)}{\mathrm{d}a^2} \\
m\left[\dfrac{2}{a}\dfrac{\mathrm{d}J_m(ha)}{\mathrm{d}a}-\dfrac{2J_m(ha)}{a^2}\right] & \dfrac{m^2}{a^2}J_m(ka)+a\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(\dfrac{1}{a}\dfrac{\mathrm{d}J_m(ka)}{\mathrm{d}a}\right) & \alpha m\left[\dfrac{2}{a}\dfrac{\mathrm{d}J_m(ka)}{\mathrm{d}a}-\dfrac{2J_m(ka)}{a^2}\right] \\
-2\alpha\dfrac{\mathrm{d}J_m(ha)}{\mathrm{d}a} & -\alpha m\dfrac{J_m(ka)}{a} & (k^2-\alpha^2)\dfrac{\mathrm{d}J_m(ka)}{\mathrm{d}a}
\end{vmatrix}=0
\tag{3.15}
$$

式中：

$$
h^2=\frac{\rho p^2}{\lambda+2\mu}-\alpha^2\qquad k^2=\frac{\rho p^2}{\mu}-\alpha^2
$$

四　振型分析

从(3.14)式、(3.15)式出发,可以得到圆柱体自由振动的一系列振型及相应的频率方程。首先,它当然包含人们熟悉的扭振、纵振动和横振动。

1. 扭振

当 $m=\beta=0, \theta_0=\pi/2$ 时,$u_r=u_z=0$,

$$u_\theta=-B\frac{\mathrm{dJ}_0(kr)}{\mathrm{d}r}\cos\alpha z\mathrm{e}^{ipt}=B'\mathrm{J}_1(kr)\cos\alpha z\mathrm{e}^{ipt} \tag{4.1}$$

相应的频率方程是行列式(3.15)的中心元素

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\frac{\mathrm{J}_1(ka)}{a}=0 \tag{4.2}$$

它的一个解是 $k=0$,即

$$p=\frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\quad(n=1,2,3,\cdots) \tag{4.3}$$

这时,u_θ 应由原方程重新计算可得

$$u_\theta=Br\cos\alpha z\mathrm{e}^{ipt} \tag{4.4}$$

式中波数

$$\alpha=\frac{n\pi}{l}\quad(n=1,2,\cdots) \tag{4.5}$$

这就是人们熟悉的扭转振动。

2. 纵振动

取 $m=\theta_0=0, \beta=0$ 或$\frac{\pi}{2}$,即有

$$\begin{cases}u_\theta=0\\ u_r=\left[A\dfrac{\mathrm{dJ}_0(hr)}{\mathrm{d}r}+C\alpha\dfrac{\mathrm{dJ}_0(kr)}{\mathrm{d}r}\right]\cos\alpha z\mathrm{e}^{ipt}\\ u_z=\left[-A\alpha\mathrm{J}_0(hr)+Ck^2\mathrm{J}_0(kr)\right]\sin\alpha z\mathrm{e}^{ipt}\end{cases} \tag{4.6}$$

相应的频率方程是行列式(3.15)的四角元素构成的二阶主子式:

$$\begin{vmatrix}-\lambda\dfrac{\rho p^2}{\lambda+2\mu}\mathrm{J}_0(ha)+2\mu\dfrac{\mathrm{d}^2\mathrm{J}_0(ha)}{\mathrm{d}a^2} & 2\mu\alpha\dfrac{\mathrm{d}^2\mathrm{J}_0(ka)}{\mathrm{d}a^2}\\ -2\alpha\dfrac{\mathrm{dJ}_0(ha)}{\mathrm{d}a} & (k^2-\alpha^2)\dfrac{\mathrm{dJ}_0(ka)}{\mathrm{d}a}\end{vmatrix}=0 \tag{4.7}$$

展开后,即得 Pochhammer 方程