中学基础知识概要

数学

四川人民出版社

中学基础知识概要

数　　学

四川人民出版社

一九八一年·成都

中学基础知识概要 数 学

四川人民出版社出版　　　重庆新华印刷厂印刷
四川省新华书店重庆发行所发行

开本787×1092毫米1/32 印张 14.375　字数310千
1981年1月第1版　　　1981年1月第1次印刷
印数：1—203,200册

书号：7118·510　　　　定价：0.99元

出版者的话

为了帮助广大青年系统地复习和掌握中学各科基础知识，为升入高等学校或就业作好准备，我们出版了这套中学各科基础知识概要，供大家使用。它不但对缺乏教师指导的往届高中毕业生是适用的，对于应届高中毕业生复习也有一定的参考价值。

这套概要是根据全日制十年制学校中学各科教学大纲（试行草案）和现行教材编写的，包括政治、语文、历史、地理、英语、数学、物理、化学、生物等。内容系统，重点突出，简明扼要，文字通俗，对帮助青年学生系统复习和掌握中学各科基础知识，提高分析问题和解决问题的能力是有益处的。

本书由刘明福、刘积全、罗介玲、刘志国、聂洪泽同志编写。由于时间仓促，书中缺点错误在所难免。我们热忱欢迎读者批评指正。

一九八〇年十月

目　　录

代　　数

平面几何

立体几何

平面解析几何

三　角

代　　数

代数学是用字母代表数来研究数的运算和规律的科学，它把许多实际问题归结为代数方程(组)．在近代数学中，代数学研究已由数扩大到其它一些对象．本书只讲在现行中学数学范围内的数、代数式、方程、函数等几个主要部分．逻辑代数虽然已纳入现行中学课本里，但在我省只有个别学校教了这一部分，所以暂缺．

第一章　数

数是数学中主要的也是基本的概念之一．本章主要概述实数、复数的概念、性质及运算．

一　实　　数

1．实数的有关概念

(1) 有理数　整数和分数统称有理数．任一个有理数都可用$\frac{q}{p}$表示(p，q为互质整数，且$p\neq0$)．

(2) 无理数　无限不循环小数叫无理数．

(3) 实数与数轴

有理数和无理数统称实数．

规定了原点、方向和长度单位的直线叫数轴．实数和数

轴上的点是一一对应的。在数轴上表示的两个实数，右边的实数总比左边的实数大。

(4) 相反数与绝对值

若a是实数，$-a$与a互为相反数(0的相反数是0)；$|a|$叫a的绝对值，$|a|=\begin{cases} a & \text{当}a\geqslant 0\text{时，} \\ -a & \text{当}a<0\text{时。} \end{cases}$

2. 实数的运算

(1) 四则运算法则

运算 \ 法则 \ 原数	同号		异号	
	符号	绝对值	符号	绝对值
加	保持原号	相加	同绝对值较大者	相减（大-小）
减	减去一个数等于加上它的相反数，然后按加法作。			
乘	+	相乘	-	相乘
除	+	相除	-	相除

(2) 乘方、开方运算法则

I. 乘方运算

$a^n=\overbrace{a\cdot a\cdot\cdots a}^{n\text{个}}$。其中$a$叫底数，$n$叫指数，$a^n$叫幂。

当$a=0$时，$a^n=0$；　　当$a>0$时，$a^n>0$；

当$a<0$时，n为偶数，$a^n>0$，

n为奇数$a^n<0$。

Ⅱ. 开方运算

若$x^n=a$，则x叫做a的n次方根(n为正整数)．求一个数的方根的运算，叫开方。a叫被开方数，n叫根指数。

在实数范围内，正数的奇次方根是一个正数，负数的奇次方根是负数．正数的偶次方根是互为相反数的两个数．负数不能开偶次方。

正数的正的方根叫算术根，零的算术根是零。

在$a\geqslant 0$时，$\sqrt[n]{a}$表示算术根.

当n是偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}a\ (a\geqslant 0),\\-a\ (a<0).\end{cases}$

正数a的偶次方根的负值用$-\sqrt[n]{a}$表示。

3。实数的运算定律

(1) 交换律　$a+b=b+a$；$ab=ba$。

(2) 结合律　$(a+b)+c=a+(b+c)$；$(ab)c=a(bc)$。

(3) 分配律　$a(b+c)=ab+ac$。

4。运算顺序

先算第三级运算（乘方、开方），再算第二级运算（乘、除），最后算第一级运算（加、减）．如果有括号，就先算括号里面的．同级运算从左至右．

例1　计算$\left(3\frac{1}{3}\right)^2+\left|(-6.5)\div\frac{13}{4}\right|+(-2)^4\div[(-2)^3+2]$。

解　原式 $=\frac{100}{9}+\left|-\frac{13}{2}\times\frac{4}{13}\right|+16\div(-8+2)$

$$=11\frac{1}{9}+2-2\frac{6}{9}=10\frac{4}{9}.$$

说明：小数、分数混合运算，有时将小数化成分数较为方便.

例2　设x是任意实数，化简$\frac{\sqrt{(x-2)^2}}{x-2}+\frac{|x-1|}{x-1}$，$(1<x<2)$.

解　$\because\ 1<x<2$,

$\therefore\ x-2<0$　且　$x-1>0$.

$\therefore\ \sqrt{(x-2)^2}=2-x,\quad |x-1|=x-1,$

故　原式 $=\frac{2-x}{x-2}+\frac{x-1}{x-1}=(-1)+1=0.$

例3　证明$\sqrt{2}$是无理数.

证明　假设$\sqrt{2}$是有理数，那么$\sqrt{2}$可以表示成分数，即

$\sqrt{2}=\frac{n}{m}$(其中m．n是自然数，且m、n互质)

$\therefore\ 2=\frac{n^2}{m^2},\quad n^2=2m^2,$

n^2是偶数，n也是偶数，设$n=2p$.

那么　$m^2=2p^2$

$\therefore$　m也是偶数.

这样，m、n都是偶数，与m、n互质的假设矛盾.

所以$\sqrt{2}$不是有理数，而是无理数.

二 复 数

1. 复数的有关概念和性质

(1) 虚数单位 i 的性质

Ⅰ. $i^2=-1$.

Ⅱ. 能和实数一起，按照四则运算的法则进行计算.

Ⅲ. i的乘方具有周期性.

$i^{4n+1}=i$, $i^{4n+2}=-1$, $i^{4n+3}=-i$, $i^{4n}=1$, (n是整数).

(2) 复数的有关概念

Ⅰ. 数的系统表

- 复数 $(a+bi)$
  - 实数（当$b=0$）
    - 有理数
      - 整数
        - 正整数（自然数）
        - 零
        - 负整数
      - 分数
        - 正分数
        - 负分数
        - ——可化为
          - 有限小数
          - 无限循环小数
    - 无理数
      - 正无理数
      - 负无理数
      - ——即无限不循环小数
  - 虚数（当$b\neq0$）
    - 纯虚数（当$a=0$）
    - 非纯虚数（当$a\neq0$）

Ⅱ. 实部与虚部　实数a、b分别叫做复数$a+bi$的实部与虚部.

Ⅲ. 复数的相等　我们规定：两个复数相等，当且仅当它们的实部与虚部分别相等. 即

$$a+bi=c+di \Longleftrightarrow a=c,\ b=d.$$

特别地　$a+bi=0 \Longleftrightarrow a=0,\ b=0$.

两个复数，如果都是实数，可以比较它们的大小；如果

不全是实数，就不能比较它们的大小.

IV. 复平面，实轴和虚轴

复数$a+bi$可以用坐标平面内的点Z来表示，这个点的横坐标是a，纵坐标是b（图1-1）. 这个坐标平面叫做复平面. 表示实数的点都在x轴上，x轴叫做实轴. 表示纯虚数的点都在y轴上(不包括原点)，除原点外，y轴叫虚轴. 每个复数与复平面上的点一一对应.

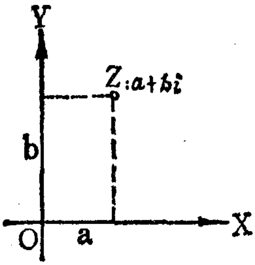

图 1-1

V. 共轭复数　若两个复数的实部相等，虚部互为相反数时，这两个复数称为共轭复数(当虚部不等于零时也叫共轭虚数). 复数Z的共轭复数用$\overline{Z}$表示. 显然，Z和$\overline{Z}$对称于实轴.

(3) 复数的向量表示

I. 向量　既有大小又有方向的量叫做向量. 向量可以用有向线段来表示，线段长短表示向量的大小，线段的方向表示向量的方向.

长度相等方向相同的向量，不论起点在那里都认为是相等的向量. 因此，向量可以平移.

长度为零的向量(方向不确定)叫做零向量. 规定所有的零向量相等.

II. 复数的向量表示　设Z点表示复数$a+bi$，我们把原点O与Z点的连结线看成是从O指向Z点的向量，记作$\overrightarrow{OZ}$（图1-2）.

复数集除与复平面内的点集一一对应外，也与复平面内

所有从原点出发的向量所组成的集合之间也是一一对应的。

Ⅲ. 复数的绝对值(复数的模)

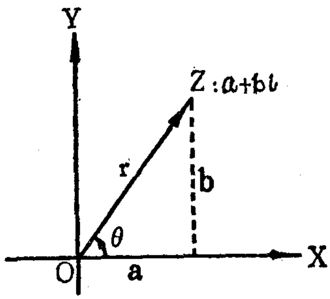

图 1-2

图 1-2 中的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的长度r叫做复数$a+bi$的模(或绝对值)。记作 $|a+bi|$。容易从图中看出 $|a+bi|=r=\sqrt{a^2+b^2}$。

2. 复数的表示形式

(1) 代数式：$Z=a+bi$

(2) 三角式

Ⅰ. 幅角　向量 $\overrightarrow{OZ}$ 与X轴正方向的夹角θ(图1-2)叫做复数$a+bi$的幅角，其中适合于 $0\leqslant\theta<2\pi$ 的幅角称为幅角的主值。显然有：

$$\cos\theta=\frac{a}{r},\quad \sin\theta=\frac{b}{r}。$$

Ⅱ. 复数的三角式

$$Z=a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

Ⅲ(附)　复数的指数式　$Z=re^{i\theta}$

3. 复数的运算

(1) 加减运算　用代数形式表示

$$(a_1+b_1i)\pm(a_2+b_2i)=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)i.$$

(2) 乘法运算

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)$$
$$=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$$

$$r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$
$$=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

(3) 除法运算

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

$$\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

(4) 乘方运算

用棣美弗定理：

$$z^n=[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

(5) 开方运算

复数的 n 次方根有 n 个值，它们的模都等于这个复数的模的 n 次算术根，它们的幅角分别等于这个复数的幅角与 2π 的0，1，2，…，$(n-1)$ 倍的和的 n 分之一。

复数的加、减、乘、除、乘方、开方的结果仍是复数，因此加、减、乘、除、乘方、开方运算在复数集内是永远可以实施的。而对于复数集的真子集实数集来说，加、减、乘、除、乘方在实数集内是永远可以实施的，但开方运算就只有在某种特殊情况下才可能。

例1 实数 m 取什么值，复数 $(3m-2)+(m-1)i$

(1) 对应的点位于复平面的第四象限？

(2) 为纯虚数？　　　　(3) 等于其共轭虚数？

(4) 模为 $\sqrt{17}$？

解 (1) 复数 $(3m-2)+(m-1)i$ 对应的点要在第四象限，必须且只须 $\begin{cases}3m-2>0,\\ m-1<0.\end{cases}$ 解得 $\frac{2}{3}<m<1$。

故当 $\frac{2}{3}<m<1$时，该复数对应的点位于复平面的第四象限。

(2) 复数$(3m-2)+(m-1)i$要为纯虚数，必须且只须

$$\begin{cases}3m-2=0,\\ m-1\neq 0.\end{cases} \quad \text{即 } m=\frac{2}{3}.$$

故当$m=\frac{2}{3}$时，该复数为纯虚数。

(3) 复数$(3m-2)+(m-1)i$的共轭复数为

$(3m-2)-(m-1)i$,

要 $(3m-2)+(m-1)i=(3m-2)-(m-1)i$,

必须且只须 $-(m-1)=m-1$，解得$m=1$

故当 $m=1$时，复数$(3m-2)+(m-1)i$等于它的共轭复数。

(4) 要使复数 $(3m-2)+(m-1)i$的模为$\sqrt{17}$，必须且只须$\sqrt{(3m-2)^2+(m-1)^2}=\sqrt{17}$

$(3m-2)^2+(m-1)^2=17$

$5m^2-7m-6=0$

$(5m+3)(m-2)=0$

$\therefore$ $m_1=-\frac{3}{5}$，$m_2=2$。

故当$m=-\frac{3}{5}$或$m=2$时，该复数的模为$\sqrt{17}$。

例2 计算：

(1) $\frac{3-4i}{1+2i}+(2+i^{15})-(1-\sqrt{-4})^2$;

(2) $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left|-3-4i\right|-\frac{4-8i}{1-i}$.

解 (1) 原式 $=\frac{(3-4i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}+(2-i)-(1-2i)^2$

$$=\frac{-5-10i}{5}+2-i+3+4i$$

$$=-1-2i+2-i+3+4i$$

$$=4+i;$$

(2) 原式 $=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2\right]+\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}$

$$-\frac{(4-8i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$=1+5-(2-4i)(1+i)$$

$$=6-(6-2i)$$

$$=2i.$$

例3 用复数的三角函数形式计算 $(1+i)^2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

解 $\because$ $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$,

$$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3},$$

$\therefore$ 原式 $=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^2$

$$\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$=2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$=-\sqrt{3}-i.$$

例4 在复数集内解方程 $x^3-1=0$.

解 $\because$ $x^3=1$，而$1=\cos 0+i\sin 0$，

$$\therefore \quad x=\cos\frac{0+2K\pi}{3}+i\sin\frac{0+2K\pi}{3}$$

（K取0，1，2.）

$$\therefore \quad x_1=1,\quad x_2=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$x_3=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

说明：形如$a_0x^n+a_n=0\,(a_0\neq 0)$的方程叫做二项方程. 任何二项方程都可以化成$x^n=b$的形式，因此，都可以用复数开方的方法来解.

例5 已知 $|x|-x=1-2i$，x为复数. 求x.

解 设$x=a+bi$，则$|x|=\sqrt{a^2+b^2}$，

$\therefore$ $\sqrt{a^2+b^2}-a-bi=1-2i$.

根据复数相等的定义，得

$$\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}-a=1,\\ -b=-2.\end{cases}$$

解得，$\begin{cases}a=\dfrac{3}{2},\\ b=2.\end{cases}$