SHU XUE FEN XI

山东教育出版社

数学分析

上册

责任编辑：孙永大

封面设计：于　锋

数 学 分 析

上 册

李庆春　王修德　石平绥　温锡九　等编

山东教育出版社

1989年·济南

前　　言

本书是根据高等师范专科学校二、三年制数学专业数学分析教学大纲编写的．全书分上、下两册．上册的主要内容有极限理论和一元函数微积分，下册的主要内容有级数理论和多元函数微积分．

在本书的编写过程中，为了体现师范专科教学的特点，我们注意做到以下几点：

第一，合理地安排体例及格式，力求纲目醒目，主线清晰，层次分明，论述条理．

第二，贯彻"少而精"原则，加强基本知识、基础理论和基本技能技巧训练的教学．力求突出重点，分散难点．

第三，尽可能做到直观易懂与严密处理相结合．力求深入浅出，文字简练，通俗易懂，便于自学．在引入概念时，尽量做到由直观到抽象，由具体到一般，既讲清概念的实际背景，又深刻揭示其涵义．在讲定理证明和公式推导时，尽量做到贯彻启发式，注意分析定理和公式的来龙去脉，引导学生先从几何直观上推想出结论，然后在理论上加以严谨地论证．

第四，尽量联系中学教材和中学教学的实际．通过数学分析的精确严密的概念教学和严谨的推理论证教学，培养学生的抽象思维和逻辑推理能力；通过数学分析知识运用的教学，解决在中学数学中许多没有解决的问题，从而使学生能

深刻地理解和把握中学数学中的有关的基本概念和理论，以便能居高临下地处理中学数学教材.

第五，顾及到师专数学专业不设“计算数学”课，加强了近似计算的内容，如方程的近似解法，函数值的计算，定积分的近似计算等.

第六，为了便于初学者接受，将实数与极限理论中一些定理的论证适当移后，而这些定理仍按原顺序提出并应用.这样分两步教学，既分散了难点，又保持了数学分析的系统性.

关于本书的使用兹作以下几点说明:

（1）本书全部内容可以在300学时左右讲完，上册154学时（讲授106学时，习题课48学时）；下册146学时（讲授102学时，习题课44学时）.

（2）书中带*号的内容，可根据教学的实际情况选用.

（3）书中每节都配有一个习题.各章配有总复习题.要求学生会作全部的习题，总复习题供学习有余力的学生选用.

本书的编者还有（以姓氏笔画为序）：于秀云、王兆志、尹秀贤、卞瑞玲、冯强、刘思学、朱殿利、迟象利、李平、李重辉、李益中、杨位雪、杨鸣岐、杜彪、杜永安、宋金堂、房景洲、张守田、张润庠、姜天权、姜曰华、赵玉民、赵玉松、胡耀圻、彭步端等同志.

在编写本书过程中，承蒙魏远、王常藩、尹克山、杨熙泉、许大庆等同志的大力支持和帮助，特此致谢.

编　者

1989年

目　　录

第一章　函　　数

函数是数学中最重要最基本的概念之一．它不但在数学中处于非常重要的地位，而且在其它自然科学、工程技术、甚至社会科学中都被广泛的应用．函数几乎是现代数学每一分支的研究对象，是数学分析的主要研究对象，可以说数学分析就是研究函数的．本章在读者已有函数知识的基础上，对函数进行较系统的复习和整理，并介绍一些新知识．

§1·1　实数概述

数学分析是在实数范围内研究函数的．为此我们在讨论函数之前，先对实数的概念及性质加以概略地叙述．

一、实数概念

在中学数学就知道，所有整数和分数统称为有理数．换句话说，凡能表示为形如$\frac{p}{q}$（p，q为整数，$q>0$）的数，称为有理数．它可以表示成有限十进小数或无限十进循环小数，如$\frac{1}{5}=0.2$，$\frac{1}{3}=0.333\cdots$．而有限十进小数可写成以0或以9为循环节的无限十进循环小数，如$0.2=0.200\cdots=0.199\cdots$．因此可以说任一有理数都能表示为无限十进循

环小数。

由于存在着不能表示为分数形式的数，如$\sqrt{2}$、π 等，因而导出无理数。我们把无限十进不循环小数称为无理数。

有理数与无理数统称为实数。任一实数都可以表示为无限十进小数。

在本书中，如无特别声明，数都是指的实数。全体实数所组成的集合简称为实数集，记为R。

二、实数的性质

1．有序性　任意两个实数a、b，必满足下述三个关系之一（三歧性）：

$$a>b，a=b，a<b。$$

2．封闭性　对任意两个实数施行加、减、乘、除(除数不为0)运算后仍得实数，即实数对加、减、乘、除四则运算是封闭的。

3．稠密性　任意两个不相等的实数之间一定存在有理数，也一定存在无理数，即实数集具有稠密性。

4．连续性　我们知道，任意两个有理数之间存在无限多个有理数。但有理数之间还有“空隙”，它和数轴上的点不能建立一一对应关系。例如我们可以在数轴上画出表示$\sqrt{2}$的点，但$\sqrt{2}$不是有理数。而实数集R不但稠密且实数间无“空隙”　就是说它和连续不断的数轴上的点有着一一对应的关系。这直观地表明，实数集区别于有理数集具有连续性。正由于实数与数轴上的点一一对应，所以在今后的叙述中，将把“实数a”与“数轴上的点a”看作有相同的含

义，而不加区别。

5．阿基米德（Archimedes）性　对任何两个正实数a与b，必存在自然数n，使

$$na>b，或\frac{b}{n}<a.$$

由此可知，对任何正实数x，必有非负整数n，使得$n\leqslant x<n+1$。

三、绝对值

实数a的绝对值（记为$|a|$）定义为

$$|a|=\begin{cases} a, a\geqslant 0, \\ -a, a<0. \end{cases}$$

在数轴上，$|a|$表示点a到原点的距离；$|x-a|$表示点x到点a的距离。

绝对值有以下性质：

1）$|a|=|-a|\geqslant 0$，当且仅当$a=0$时$|a|=0$。

2）$|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$。

3）$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}(b\neq 0)$。

4）$|a|<h$等价于$-h<a<h$；$|a|\leqslant h$等价于$-h\leqslant a\leqslant h$。

5）$|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$，通常称为三角形不等式。

我们来证明性质5），其他请读者自己证明。

先证右半不等式，根据定义，有

$$-|a|\leqslant a\leqslant|a|,\quad -|b|\leqslant b\leqslant|b|.$$

相加后，得

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant(|a|+|b|),$$

或 $$|a+b|\leqslant|a|+|b|. \tag{1}$$

将(1)中b改为$-b$后，(1)仍成立．由$|-b|=|b|$，得

$$|a-b|\leqslant|a|+|b|.$$

于是 $$|a\pm b|\leqslant|a|+|b|.$$

再证左半不等式．由$|a|=|a-b+b|$，根据(1)式，有

$$|a|=|a-b+b|\leqslant|a-b|+|b|.$$

从而 $$|a|-|b|\leqslant|a-b|. \tag{2}$$

将(2)中b改为$-b$后，(2)仍成立，得

$$|a|-|b|\leqslant|a+b|.$$

于是 $$|a|-|b|\leqslant|a\pm b|.$$

综合以上两步，性质5)得证

不等式$|a+b|\leqslant|a|+|b|$用得较多．利用数学归纳法，可将它推广为：

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|.$$

四、区间

在数集中，我们今后用的最多的是各种各样的区间．下面介绍区间概念．

设a，b是任意两个实数，且$a<b$．

数集$\{x|a<x<b\}$叫做开区间，记为$(a,\ b)$，即

$$(a,\ b)=\{x|a<x<b\}.$$

数集$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$叫做闭区间，记为$[a,\ b]$，即

$$[a,\ b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}.$$

数集$\{x|a\leqslant x<b\}$和$\{x|a<x\leqslant b\}$叫做半开区间，分别记为$[a, b)$和$(a, b]$，即

$$[a, b)=\{x|a\leqslant x<b\}, \quad (a, b]=\{x|a<x\leqslant b\}.$$

上述区间中的a和b叫做区间的端点．在数轴上区间表示为开线段、闭线段及半开线段(图1·1)．两个端点之间的距离$b-a$叫做区间的长度．上述区间的长度为有限数，都叫做有限区间．

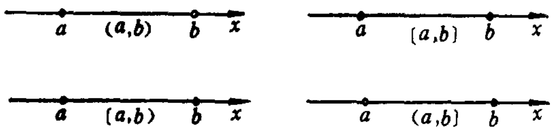

图1·1

除了有限区间外，还有无限区间．无限区间的符号及意义规定如下：

$(a, +\infty)=\{x|x>a\}$；

$[a, +\infty)=\{x|x\geqslant a\}$；

$(-\infty, a)=\{x|x<a\}$；

$(-\infty, a]=\{x|x\leqslant a\}$；

$(-\infty, +\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}=R$，即实数集．

这里要特别指出，$+\infty$和$-\infty$是两个符号，分别读作“正无穷大”和“负无穷大”．在数学分析中不把它们看作实数．

五、邻域

为了今后叙述上的方便，我们介绍特殊形式的区间——

邻域的概念。

设a为某一定数，δ为正数，数集$\{x \mid |x-a|<\delta\}$称为点a的δ邻域，记作$U(a, \delta)$，即

$$U(a, \delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}=(a-\delta, a+\delta).$$

当没有必要指明δ时，就简称为点a的某邻域，记为$U(a)$。

数集$\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$称为点$a$的空心$\delta$邻域，记作$U^{\circ}(a, \delta)$，即

$$\begin{aligned} U^{\circ}(a, \delta) &= \{x \mid 0<|x-a|<\delta\} \\ &=(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta). \end{aligned}$$

当没有必要指明δ时，就简称点a的某空心邻域，记为$U^{\circ}(a)$。

应当注意$U(a)$与$U^{\circ}(a)$的差别。

习　题　1·1

1.（1）若a为有理数而b为无理数，$a+b$是否必为无理数？若a与b都为无理数，结果如何？

（2）若a为有理数而b为无理数，ab是否必为无理数？

（3）有没有两个无理数，它们的和与积都是有理数？

2. 证明$\sqrt{2}$是无理数。

3. 指出满足下列不等式的x所在的区间：

（1）$|x-2| \leqslant 1$；　　（2）$|x-a|<\varepsilon$；

（3）$|x| \geqslant 5$；　　（4）$|x+1|>2$。

4. 求证：

（1）$|x-y| \geqslant |x|-|y|$；

（2）$\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}\ (a \geqslant 0, b \geqslant 0)$；