

● SHU XUE FEN XI

● 山东教育出版社

数学 分析

● 上册

责任编辑：孙永大

封面设计：于 锋

数 学 分 析

上 册

李庆春 王修德 等编
石平绥 温锡九

山东教育出版社

1989年·济南

前 言

本书是根据高等师范专科学校二、三年制数学专业数学分析教学大纲编写的。全书分上、下两册。上册的主要内容有极限理论和一元函数微积分，下册的主要内容有级数理论和多元函数微积分。

在本书的编写过程中，为了体现师范专科教学的特点，我们注意做到以下几点：

第一，合理地安排体例及格式，力求纲目醒目，主线清晰，层次分明，论述条理。

第二，贯彻“少而精”原则，加强基本知识、基础理论和基本技能技巧训练的教学。力求突出重点，分散难点。

第三，尽可能做到直观易懂与严密处理相结合。力求深入浅出，文字简练，通俗易懂，便于自学。在引入概念时，尽量做到由直观到抽象，由具体到一般，既讲清概念的实际背景，又深刻揭示其涵义。在讲定理证明和公式推导时，尽量做到贯彻启发式，注意分析定理和公式的来龙去脉，引导学生先从几何直观上推想出结论，然后在理论上加以严谨地论证。

第四，尽量联系中学教材和中学教学的实际。通过数学分析的精确严密的概念教学和严谨的推理论证教学，培养学生的抽象思维和逻辑推理能力；通过数学分析知识运用的教学，解决在中学数学中许多没有解决的问题，从而使学能

深刻地理解和把握中学数学中的有关的基本概念和理论，以便能居高临下地处理中学数学教材。

第五，顾及到师专数学专业不设“计算数学”课，加强了近似计算的内容，如方程的近似解法，函数值的计算，定积分的近似计算等。

第六，为了便于初学者接受，将实数与极限理论中一些定理的论证适当移后，而这些定理仍按原顺序提出并应用，这样分两步教学，既分散了难点，又保持了数学分析的系统性。

关于本书的使用兹作以下几点说明：

(1) 本书全部内容可以在300学时左右讲完，上册154学时（讲授106学时，习题课48学时）；下册146学时（讲授102学时，习题课44学时）。

(2) 书中带*号的内容，可根据教学的实际情况选用。

(3) 书中每节都配有一个习题，各章配有总复习题，要求学生作全部的习题，总复习题供学习有余力的学生选用。

本书的编者还有（以姓氏笔画为序）：于秀云、王兆志、尹秀贤、卞瑞玲、冯强、刘思学、朱殿利、迟象利、李平、李重辉、李益中、杨位雪、杨鸣岐、杜彪、杜永安、宋金堂、房景洲、张守田、张润庠、姜天权、姜曰华、赵玉民、赵玉松、胡耀圻、彭步端等同志。

在编写本书过程中，承蒙魏远、王常藩、尹克山、杨熙泉、许大庆等同志的大力支持和帮助，特此致谢。

编 者

1989年

目 录

第一章 函数	(1)
§1.1 实数概述.....	(1)
一、实数概念(1)二、实数的性质(2)三、绝对值(3)四、区间(4)五、邻域(5)习题1.1(6)	
§1.2 函数概念.....	(7)
一、常量与变量(7)二、函数的定义(8)	
三、函数的表示法(12) 习题1.2(15)	
§1.3 几种特殊类型的函数.....	(17)
一、有界函数(17)二、单调函数(19)三、奇函数与偶函数(19)四、周期函数(21)习题1.3(22)	
§1.4 函数的运算.....	(23)
一、四则运算(23)二、复合函数(24)三、反函数(26)习题1.4(30)	
§1.5 初等函数.....	(31)
一、基本初等函数(31)二、初等函数(37)习题1.5(38)	
复习题一.....	(39)
第二章 数列极限	(41)
§2.1 数列极限概念.....	(41)
一、数列概念(41)二、数列极限概念(42)三、验证数列极限(46)习题2.1(49)	
§2.2 收敛数列的性质与运算.....	(51)

习题2.2(61)	
§2.3 数列极限的存在条件.....	(63)
一、单调有界法则(63)二、数列极限的柯西准则(67)习题2.3(71)	
复习题二.....	(72)
第三章 函数极限	(75)
§3.1 函数极限概念.....	(75)
一、 $ x \rightarrow +\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限(75)二、 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限(79)三、函数在点 x_0 的单侧极限(86)习题3.1(89)	
§3.2 函数极限的定理.....	(90)
一、函数极限的性质与运算(90)二、复合函数极限的运算法则(95)三、函数极限与数列极限的关系(99)四、函数极限的柯西准则(101)习题3.2(104)	
§3.3 无穷小量与无穷大量.....	(106)
一、无穷小量(106)二、无穷小量阶的比较(109)三、无穷大量(112)习题3.3(116)	
复习题三.....	(117)
第四章 函数的连续性	(120)
§4.1 连续性概念.....	(120)
一、函数在一点的连续性(120)二、间断点及其分类(124)三、区间上的连续函数(126)习题4.1(128)	
§4.2 连续函数的性质及运算.....	(130)
一、连续函数的局部性质和四则运算 (130)	

二、复合函数的连续性(130)	三、闭区间上连续函数的性质(132)	四、反函数的连续性(139)
习题4·2(142)		
§4·3 初等函数的连续性…………… (143)		
一、基本初等函数的连续性(143)		
二、初等函数的连续性(146)		
习题4·3(148)		
复习题四…………… (149)		
第五章 导数与微分…………… (151)		
§5·1 导数概念…………… (151)		
一、实例(151)		
二、导数的定义(153)		
三、单侧导数(157)		
四、导函数(159)		
五、导数的几何意义(162)		
习题5·1(164)		
§5·2 求导法则及导数公式…………… (166)		
一、导数的四则运算(167)		
二、反函数的导数(170)		
三、复合函数的导数(174)		
四、初等函数的导数(179)		
习题5·2(183)		
§5·3 隐函数与参数方程所表示函数的求导法…………… (187)		
一、隐函数的求导法(187)		
二、参数方程所表示函数的求导法(191)		
习题5·3(195)		
§5·4 微分…………… (197)		
一、微分概念(197)		
二、微分的运算法则(202)		
三、微分的应用(203)		
习题5·4(206)		
§5·5 高阶导数与高阶微分…………… (208)		
一、高阶导数(208)		
二、高阶微分(216)		
习题5·5(217)		
复习题五…………… (219)		

第六章 微分学基本定理与导数应用	(222)
§6·1 中值定理.....	(222)
一、洛尔定理(222) 二、拉格朗日定理(226)	
三、柯西定理(230) 习题6·1(233)	
§6·2 罗比达法则.....	(234)
一、 $\frac{0}{0}$ 型不定式(235) 二、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式(239)	
三、其它型不定式(242)习题6·2(246)	
§6·3 泰勒公式.....	(247)
一、泰勒多项式(247) 二、泰勒公式(248)	
三、常用的几个展开式(253) 四、泰勒公式的应用(256) 习题6·3(259)	
§6·4 函数的单调性与极值.....	(260)
一、函数单调性判别法(260) 二、极值的判别法(264) 三、最大值与最小值的求法(268)	
习题6·4(273)	
§6·5 函数图象的讨论.....	(275)
一、曲线的凸性(275) 二、拐点(278) 三、曲线的渐近线(281) 四、函数图象的讨论(284)	
习题6·5(287)	
§6·6 方程的近似解.....	(288)
一、弦位法(290) 二、切线法(292) 习题6·6(294)	
复习题六.....	(294)
第七章 极限与连续性 (续)	(298)
§7·1 实数的基本定理.....	(298)
一、单调有界定理(298) 二、区间套定理(300)	

三、数列柯西收敛准则(302)	四、确界存在定理(304)
五、聚点定理(309)	六、有限复盖定理(314)
习题7·1(317)	
§7·2 闭区间上连续函数性质的证明	(319)
习题7·2(324)	
复习题七	(324)
第八章 不定积分	(326)
§8·1 不定积分概念与基本积分公式	(326)
一、原函数与不定积分概念(326)	二、基本积分公式(329)
三、不定积分的线性运算法则(331)	习题8·1(333)
§8·2 分部积分法与换元积分法	(334)
一、分部积分法(335)	二、换元积分法(338)
习题8·2(344)	
§8·3 有理函数的积分	(347)
一、有理函数的分解(347)	二、有理函数的积分(351)
习题8·3(357)	
§8·4 可化为有理函数的积分	(358)
一、 $\int R(\sin x, \cos x)dx$ 型的积分(358)	二、 $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ 型的积分(361)
三、 $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ 型的积分(363)	习题8·4(366)
复习题八	(367)
第九章 定积分	(369)
§9·1 定积分概念	(369)

一、实例(369)	二、定积分的定义(373)	习题9·1(377)
§9·2	可积条件	(378)
一、可积的必要条件(378)	二、小和与大和(379)	三、可积的充要条件(386)
四、可积函数类(388)	习题9·2(390)	
§9·3	定积分的性质	(391)
习题9·3(399)		
§9·4	定积分的计算	(400)
一、微积分学基本定理(401)	二、分部积分法与换元积分法(405)	习题9·4(411)
§9·5	定积分的近似计算	(413)
一、矩形法(414)	二、梯形法(415)	三、抛物线法(416)
习题9·5(422)		
复习题九		(423)
第十章	定积分的应用	(426)
§10·1	定积分在几何中的应用	(426)
一、微元法(426)	二、平面图形的面积(427)	三、平面曲线的弧长(434)
四、已知截面面积函数的立体体积(439)	五、旋转体的侧面积(444)	习题10·1(447)
§10·2	定积分在物理中的应用	(449)
一、函数平均值(449)	二、静力矩与重心(452)	三、液体压力(455)
四、变力作功(456)	五、转动惯量(459)	习题10·2(462)
复习题十		(464)

第一章 函 数

函数是数学中最重要最基本的概念之一。它不但在数学中处于非常重要的地位，而且在其它自然科学、工程技术、甚至社会科学中都被广泛的应用。函数几乎是现代数学每一分支的研究对象，是数学分析的主要研究对象，可以说数学分析就是研究函数的。本章在读者已有函数知识的基础上，对函数进行较系统的复习和整理，并介绍一些新知识。

§1.1 实数概述

数学分析是在实数范围内研究函数的。为此我们在讨论函数之前，先对实数的概念及性质加以概略地叙述。

一、实数概念

在中学数学就知道，所有整数和分数统称为有理数。换句话说，凡能表示为形如 $\frac{p}{q}$ （ p, q 为整数， $q > 0$ ）的数，称为有理数。它可以表示成有限十进小数或无限十进循环小数，如 $\frac{1}{5} = 0.2$ ， $\frac{1}{3} = 0.333\cdots$ 。而有限十进小数可写成以0或以9为循环节的无限十进循环小数，如 $0.2 = 0.200\cdots = 0.199\cdots$ 。因此可以说任一有理数都能表示为无限十进循

环小数。

由于存在着不能表示为分数形式的数，如 $\sqrt{2}$ 、 π 等，因而导出无理数。我们把无限十进不循环小数称为无理数。

有理数与无理数统称为实数。任一实数都可以表示为无限十进小数。

在本书中，如无特别声明，数都是指的实数。全体实数所组成的集合简称为实数集，记为 R 。

二、实数的性质

1. 有序性 任意两个实数 a 、 b ，必满足下述三个关系之一（三歧性）：

$$a > b, a = b, a < b.$$

2. 封闭性 对任意两个实数施行加、减、乘、除（除数不为0）运算后仍得实数，即实数对加、减、乘、除四则运算是封闭的。

3. 稠密性 任意两个不相等的实数之间一定存在有理数，也一定存在无理数，即实数集具有稠密性。

4. 连续性 我们知道，任意两个有理数之间存在无限多个有理数。但有理数之间还有“空隙”，它和数轴上的点不能建立一一对应关系。例如我们可以在数轴上画出表示 $\sqrt{2}$ 的点，但 $\sqrt{2}$ 不是有理数。而实数集 R 不但稠密且实数间无“空隙”就是说它和连续不断的数轴上的点有着一一对应的关系。这直观地表明，实数集区别于有理数集具有连续性。正由于实数与数轴上的点一一对应，所以在今后的叙述中，将把“实数 a ”与“数轴上的点 a ”看作有相同的含

义，而不加区别。

5. 阿基米德 (Archimedes) 性 对任何两个正实数 a 与 b ，必存在自然数 n ，使

$$na > b, \text{ 或 } \frac{b}{n} < a.$$

由此可知，对任何正实数 x ，必有非负整数 n ，使得 $n \leq x < n+1$ 。

三、绝对值

实数 a 的绝对值 (记为 $|a|$) 定义为

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

在数轴上， $|a|$ 表示点 a 到原点的距离； $|x-a|$ 表示点 x 到点 a 的距离。

绝对值有以下性质：

1) $|a| = |-a| \geq 0$ ，当且仅当 $a=0$ 时 $|a|=0$ 。

2) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ 。

3) $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} (b \neq 0)$ 。

4) $|a| < h$ 等价于 $-h < a < h$ ； $|a| \leq h$ 等价于 $-h \leq a \leq h$ 。

5) $|a| - |b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$ ，通常称为三角形不等式。

我们来证明性质5)，其他请读者自己证明。

先证右半不等式，根据定义，有

$$-|a| \leq a \leq |a|, -|b| \leq b \leq |b|.$$

相加后, 得

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq (|a| + |b|),$$

$$\text{或} \quad |a + b| \leq |a| + |b|. \quad (1)$$

将(1)中 b 改为 $-b$ 后, (1)仍成立. 由 $|-b| = |b|$, 得

$$|a - b| \leq |a| + |b|.$$

$$\text{于是} \quad |a \pm b| \leq |a| + |b|.$$

再证左半不等式. 由 $|a| = |a - b + b|$, 根据(1)式, 有

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|.$$

$$\text{从而} \quad |a| - |b| \leq |a - b|. \quad (2)$$

将(2)中 b 改为 $-b$ 后, (2)仍成立, 得

$$|a| - |b| \leq |a + b|.$$

$$\text{于是} \quad |a| - |b| \leq |a \pm b|.$$

综合以上两步, 性质5)得证

不等式 $|a + b| \leq |a| + |b|$ 用得较多. 利用数学归纳法, 可将它推广为:

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|.$$

四、区间

在数集中, 我们今后用的最多的是各种各样的区间. 下面介绍区间概念.

设 a, b 是任意两个实数, 且 $a < b$.

数集 $\{x | a < x < b\}$ 叫做开区间, 记为 (a, b) , 即

$$(a, b) = \{x | a < x < b\}.$$

数集 $\{x | a \leq x \leq b\}$ 叫做闭区间, 记为 $[a, b]$, 即

$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}.$$

数集 $\{x|a \leq x < b\}$ 和 $\{x|a < x \leq b\}$ 叫做半开区间，分别记为 $[a, b)$ 和 $(a, b]$ ，即

$$[a, b) = \{x|a \leq x < b\}, (a, b] = \{x|a < x \leq b\}.$$

上述区间中的 a 和 b 叫做区间的端点。在数轴上区间表示为开线段、闭线段及半开线段(图1·1)。两个端点之间的距离 $b-a$ 叫做区间的长度。上述区间的长度为有限数，都叫做有限区间。

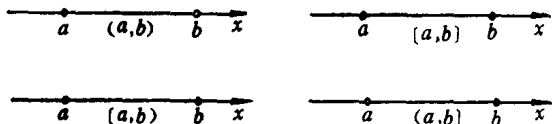


图1·1

除了有限区间外，还有无限区间。无限区间的符号及意义规定如下：

$$(a, +\infty) = \{x|x > a\};$$

$$[a, +\infty) = \{x|x \geq a\};$$

$$(-\infty, a) = \{x|x < a\};$$

$$(-\infty, a] = \{x|x \leq a\};$$

$$(-\infty, +\infty) = \{x|-\infty < x < +\infty\} = R, \text{ 即实数集.}$$

这里要特别指出， $+\infty$ 和 $-\infty$ 是两个符号，分别读作“正无穷大”和“负无穷大”。在数学分析中不把它们看作实数。

五、邻域

为了今后叙述上的方便，我们介绍特殊形式的区间——

邻域的概念.

设 a 为某一定数, δ 为正数, 数集 $\{x \mid |x-a| < \delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域, 记作 $U(a, \delta)$, 即

$$U(a, \delta) = \{x \mid |x-a| < \delta\} = (a-\delta, a+\delta).$$

当没有必要指明 δ 时, 就简称为点 a 的某邻域, 记为 $U(a)$.

数集 $\{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$ 称为点 a 的空心 δ 邻域, 记作 $U^\circ(a, \delta)$, 即

$$\begin{aligned} U^\circ(a, \delta) &= \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\} \\ &= (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta). \end{aligned}$$

当没有必要指明 δ 时, 就简称点 a 的某空心邻域, 记为 $U^\circ(a)$.

应当注意 $U(a)$ 与 $U^\circ(a)$ 的差别.

习 题 1.1

1. (1) 若 a 为有理数而 b 为无理数, $a+b$ 是否必为无理数? 若 a 与 b 都为无理数, 结果如何?

(2) 若 a 为有理数而 b 为无理数, ab 是否必为无理数?

(3) 有没有两个无理数, 它们的和与积都是有理数?

2. 证明 $\sqrt{2}$ 是无理数.

3. 指出满足下列不等式的 x 所在的区间:

$$(1) |x-2| \leq 1; \quad (2) |x-a| < \varepsilon;$$

$$(3) |x| \geq 5; \quad (4) |x+1| > 2.$$

4. 求证:

$$(1) |x-y| \geq |x| - |y|;$$

$$(2) \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (a \geq 0, b \geq 0);$$