GAOZHONGSHUXUEJINGBIAN

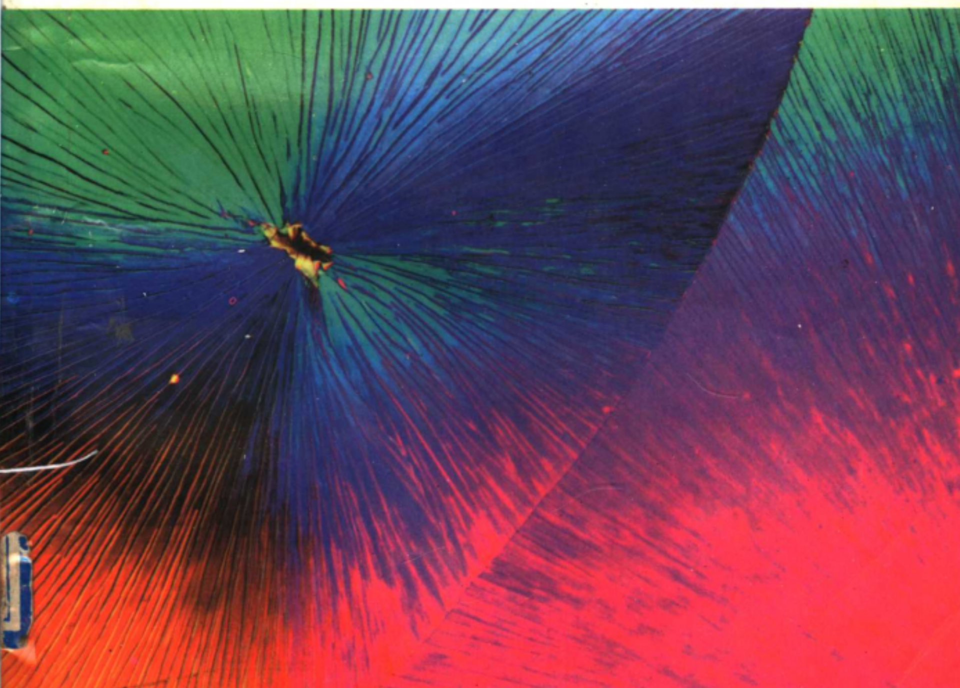
B

高二用

高中数学精编

解析几何

浙江教育出版社



高中数学精编

解析几何

（高二用）

丁宗武　许纪传　钱孝华
谢玉兰　江焕棣　陶敏之

浙江教育出版社

高中数学精编

解析几何

丁宗武　许纪传　钱孝华

谢玉兰　江焕棣　陶敏之

浙江教育出版社出版　辽宁人民出版社重印

辽宁省新华书店发行　赤峰印刷集团公司印刷

开本 787×1092　1/32　印张 6.5　字数 130,000

1997 年 5 月第 2 版　1997 年 6 月沈阳第 6 次印刷

ISBN 7－5338－2540－3/G・2532

定价：5.70 元

说　明

《高中数学精编》自1981年出版至今，深受全国中学生和数学教师的欢迎。该套丛书强调基础知识，突出基本技能，重视数学各分科之间的横向联系和综合运用，选题新颖、灵活、典型，知识点和解题技巧覆盖面广，并充分与教学进度同步。

由于近年来教材以及高中会考、高考的要求和难度等的不断变化，我们在广泛听取读者意见的基础上，紧扣现行教材，兼顾会考、高考要求，对原套丛书又作了修订。

本书每个单元设A,B两组题，每章结束设C组题。其中A组题属基本要求；B组题难度略有提高并带一定的综合性；C组题综合性强，难度大，供学有余力的学生使用。

编　者

1996年11月

目　　录

第一章　直线

一、有向线段、定比分点

【典型题型和解题技巧】

1. 两点距离公式的应用.

两点 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$的距离是

$$|PQ|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

特别地,点 $P(x,y)$和原点 $O(0,0)$的距离是

$$|PO|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

例 1　如图 1,在 y 轴上求一点 P,使得点 P 和点 $A(-2,5)$,$B(1,-4)$等距离.

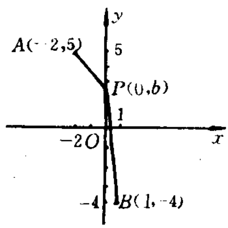
解:设点 $P(0,b)$,则有

$\sqrt{4+(b-5)^2}=\sqrt{1+(b+4)^2}$,

平方得 $b^2-10b+29=b^2+8b+17$,

即　$18b=12$,　$\therefore b=\dfrac{2}{3}$.

故点 P 的坐标为 $P(0,\dfrac{2}{3})$.



(图 1)

例 2　已知:$f(x)=\sqrt{1+x^2}$,

求证:$|f(a)-f(b)|\leqslant|a-b|$.

证明:如图 2,设 $A(1,a)$,$B(1,b)$,

则$f(a)=\sqrt{1+a^2}=|AO|$,$f(b)=\sqrt{1+b^2}=|BO|$,

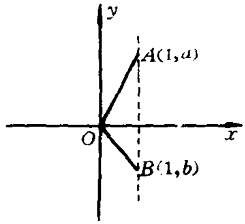
$|a-b|=|AB|$.

在$\triangle AOB$中，由$||AO|-|BO||<|AB|$，

即得$|f(a)-f(b)|<|a-b|$.

又当$a=b$时，$|OA|=|OB|$，$|a-b|=0$，

故有$|f(a)-f(b)|=|a-b|$.



（图 2）

综上所述，便得$|f(a)-f(b)|\leqslant|a-b|$.

2. 定点分比的应用.

在应用有向线段的定比分点时，应该注意两点：

(1) 公式的“逆用”.

例 3 如图 3，已知两点$A(4,1)$和$B(-1,3)$，求线段AB和y轴交点M的坐标.

解：设点$M(0,y_0)$，

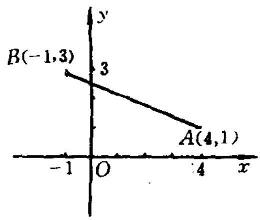
$\dfrac{AM}{MB}=\lambda$，则

由定比分点公式得

$0=\dfrac{4+\lambda(-1)}{1+\lambda}$，$\therefore\lambda=4$，于是

$y_0=\dfrac{1+4\times3}{1+4}=\dfrac{13}{5}$.

即点M的坐标是$M(0,\dfrac{13}{5})$.



（图 3）

(2) 注意利用平面几何知识.

例 4 如图 4，已知$A(5,-1)$，$B(-1,7)$，$C(1,2)$，求$\triangle ABC$中$\angle A$的平分线AD的长.

解：$\because|AB|=\sqrt{(1+5)^2+(7+1)^2}=10$，

$|AC|=\sqrt{(5-1)^2+(2+1)^2}=5$.

则由 $\lambda=\frac{|BD|}{|CD|}=\frac{|AB|}{|AC|}=2$，

设点 $D(x_0,y_0)$，则

$x_0=\frac{-1+2\times1}{1+2}=\frac{1}{3}$，

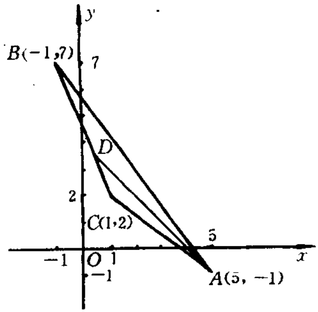
$y_0=\frac{7+2\times2}{1+2}=\frac{11}{3}$，

即 $D(\frac{1}{3},\frac{11}{3})$，于是

$|AD|$

$=\sqrt{(5-\frac{1}{3})^2+(-1-\frac{11}{3})^2}$

$=\frac{14}{3}\sqrt{2}$.



(图 4)

注意 以上例2、例4都结合运用了平面几何的知识，在学习解析几何时，要尽可能地发掘出所给图形的几何性质，以简化解题.

【训练题】

(A)

1. 已知两点 $A(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 和 $B(\cos2\alpha,\sin2\alpha)$，则 AB 的长为 (　　)

(A) $2\sin\frac{\alpha}{2}$. 　　(B) $2|\sin\frac{\alpha}{2}|$.

(C) $2\cos\frac{\alpha}{2}$. 　　(D) $2|\cos\frac{\alpha}{2}|$.

2. 若 x 轴上的点 M 到原点及点 $(5,-3)$ 的距离相等，则 M 的坐标是(　　)

(A) $(-2,0)$. 　　(B) $(1,0)$.

(C) $(1.5,0)$. 　　(D) $(3.4,0)$.

3. 已知两点 $P(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$Q(\cos\beta,\sin\beta)$，则 $|PQ|$ 的最大值

是(　　)

(A) $\sqrt{2}$.　　(B) 2.　　(C) 4.　　(D) 不存在.

4. 若点 P 分有向线段$\overline{P_1P_2}$的比 $\lambda=\dfrac{P_1P}{PP_2}$,则下列结论中,正确的是(　　)

(A) λ 恒大于零.

(B) 若 $\lambda<0$,且 $\lambda\neq-1$,则点 P 必在$\overline{P_1P_2}$的延长线上.

(C) 若 $\lambda=-1$,则点 P 与 P_2重合.

(D) 若 $\lambda=0$,则点 P 与 P_1重合.

5. 若点 P 分有向线段$\overline{AB}$之比为$\dfrac{1}{3}$,则 B 点分有向线段$\overline{AP}$的比为(　　)

(A) $\dfrac{4}{3}$.　　(B) $\dfrac{3}{4}$.　　(C) $-\dfrac{4}{3}$.　　(D) $-\dfrac{3}{4}$.

6. 已知两点 $A(m,-n)$,$B(-m,n)$,又点 C 分$\overline{AB}$的比为-2,那么点 C 的坐标为(　　)

(A) $(-3m,3n)$.　　(B) (m,n).

(C) $(3m,3n)$.　　(D) $(-m,n)$.

7. 已知两点 $P(-1,-6)$和 $Q(3,0)$,延长 QP 到 A,使 $|AP|=\dfrac{1}{3}|PQ|$,那么点 A 的坐标为(　　)

(A) $(-\dfrac{7}{3},-8)$.　　(B) $(0,\dfrac{9}{2})$.

(C) $(\dfrac{2}{3},-2)$.　　(D) $(-\dfrac{2}{3},2)$.

8. 已知点 $P(4,-9)$与点 $Q(-2,3)$,则 y 轴与直线 PQ 的交点分有向线段$\overline{PQ}$所成的比为(　　)

(A) $\dfrac{1}{3}$.　　(B) $\dfrac{1}{2}$.　　(C) 2.　　(D) 3.

9. 直线上有 A,B,C 三点,如果 B 分有向线段$\overline{AC}$的比为$-\dfrac{1}{2}$,

则（　　）

（A）B 是线段 AC 的中点.

（B）A 是线段 BC 的中点.

（C）C 是线段 AB 的中点.

（D）B 是线段 AC 的三等分点.

10. $\triangle ABC$ 中，已知 $A(2,3)$，$B(8,-4)$，重心 $G(2,-1)$，则 C 点的坐标为（　　）

（A）$(-4,2)$.　　（B）$(-4,-2)$.

（C）$(4,-2)$.　　（D）$(4,2)$.

11. （1）已知两点 $A(1,5)$ 和 $B(x,2)$ 的距离为5，则 B 点的横坐标是______；

（2）若点 M 在 y 轴上，且和点 $(-4,-1)$，$(2,3)$ 等距离，则 M 的坐标是______；

（3）若点 Q 与点 $P_1(0,1)$，$P_2(7,2)$ 及 x 轴等距离，则点 Q 的坐标是______.

12. （1）若点 $P(x,1)$ 在 $A(2,-4)$，$B(5,11)$ 这两点的连线上，则 $x=$______；

（2）连接 $A(4,1)$ 和 $B(-2,4)$ 两点的直线，和 x 轴交点的坐标是______，和 y 轴交点的坐标是______；

（3）已知点 P_1，P_2，P_3 共线，且 $\frac{P_1P_3}{P_3P_2}=-\frac{2}{3}$，则 $\frac{P_1P_2}{P_3P_1}=$______；

（4）已知 $A(4,2)$，$B(-6,-4)$，$C(x,-2\frac{4}{5})$ 三点共线，则 C 点分有向线段 $\overline{AB}$ 的比 $\lambda=$______，$x=$______；

（5）已知点 $A(3,-4)$ 与 $B(-1,2)$，点 P 在直线 AB 上，且 $|PA|=2|PB|$，则 P 点坐标是______；

（6）已知点 P 分有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 的比为 λ.

① 若 P 在线段 P_1P_2内，则 $\lambda\in$ ______，

② 若 P 在线段 P_1P_2的延长线上，则 $\lambda\in$ ______，

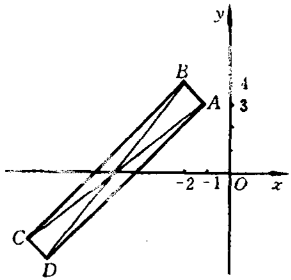
③ 若 P 在线段 P_2P_1的延长线上，则 $\lambda\in$ ______.

13. (1) 已知同一直线上三点 $A(x,5)$，$B(-2,y)$，$C(1,1)$满足 $|BC|=2|AC|$，求 x,y 的值；

(2) 在△ABC 中，已知顶点的坐标为 $A(3,1)$，AB 的中点为 $D(2,4)$，△ABC 的重心为 $G(3,4)$，求顶点 B，C 的坐标.

14. (1) 在等腰直角△ABC 中，已知 $\angle ABC=90°$，点 A、B 的坐标是 $A(1,0)$，$B(3,1)$，求顶点 C 的坐标；

(2) 在矩形 $ABCD$ 中，已知顶点 $A(-1,3)$，$B(-2,4)$，其对角线的交点在 x 轴上（如图），求顶点 C，D 的坐标.



（第14(2)题）

(B)

15. 以 $E(3,-5)$，$F(2,2)$，$G(-5,1)$为顶点的三角形的外心坐标是(　　)

(A) $(0,0)$.　　(B) $(-1,0)$.

(C) $(-1,-2)$.　　(D) $(2,-1)$.

16. 已知一个平行四边形的三个顶点是$(4,2)$，$(5,7)$，$(-3,4)$，则第四个顶点不可能是(　　)

(A) $(12,5)$.　　(B) $(-2,9)$.

(C) $(-4,-1)$.　　(D) $(3,7)$.

17. 已知两点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,P 是直线 AB 上一点,且 $\dfrac{AP}{AB}=\lambda$,则点 P 的坐标为(　　)

(A) $\left(\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$.　　(B) $\left(\dfrac{x_2+\lambda x_1}{1+\lambda},\dfrac{y_2+\lambda y_1}{1+\lambda}\right)$.

(C) $(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)$.

(D) $(\lambda x_2+(1-\lambda)x_1,\lambda y_2+(1-\lambda)y_1)$.

18. 连接直角三角形的直角顶点和斜边的两个三等分点,所得两条线段的长分别是 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2})$,则斜边的长为(　　)

(A) $\dfrac{4}{3}$.　　(B) $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$.　　(C) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.　　(D) $\sqrt{5}$.

19. (1) 已知点 $A(3,4)$,$B(1,2)$,直线 AB 上的点 P 满足 $\left|\dfrac{AP}{AB}\right|=\dfrac{1}{3}$,则点 P 的坐标为________;

(2) 已知 $A(-1,2)$,$B(1,1)$,$C(-1,-1)$是$\triangle ABC$ 的三个顶点,延长 AB 至 P,使 B 为 AP 的中点,延长 CP 至 Q,使 P 为 CQ 的中点,则 Q 点坐标为______;

(3) 已知$\triangle ABC$ 的三边的中点分别为$(2,-1)$,$(-1,4)$,$(-2,2)$,则$\triangle ABC$ 的重心坐标为______.

20. (1) 已知$\triangle ABC$ 的三个顶点是 $A(4,1)$,$B(7,5)$和 $C(-4,7)$,求此三角形内角$\angle BAC$ 的平分线的长;

(2) 已知$\triangle ABC$ 的三边长 $BC=a$,$CA=b$,$AB=c$,又三顶点的坐标为 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$C(x_3,y_3)$,求$\triangle ABC$ 内心的坐标.

二、直线的方程

（一）点斜式和斜截式

【典型例题和解题技巧】

1．直线斜率的求法.

一般地说，求直线斜率有三种方法：

（1）利用定义 $k=\operatorname{tg}\alpha$.

当已知直线的倾斜角为 $\alpha(\alpha\neq\frac{\pi}{2})$ 时，可直接利用定义求直线的斜率，即 $k=\operatorname{tg}\alpha$；

（2）利用“两点式”.

如果已知直线过两点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ $(x_1\neq x_2)$，那么可利用公式 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，来求直线的斜率；

（3）利用直线的“斜截式”方程.

如果直线 l 的方程以一般式给出，即

$$ax+by+c=0 \quad (b\neq 0),$$

那么，将 l 的方程化为斜截式，即

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b},$$

就可以得到直线 l 的斜率为 $-\frac{a}{b}$.

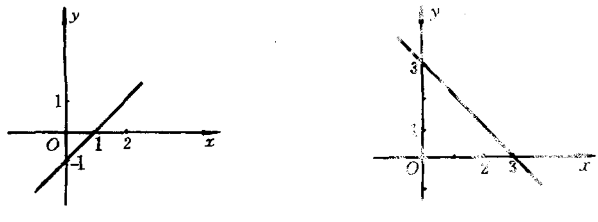
例1 已知直线 l 过点 $P(2,1)$，且与两轴围成等腰直角三角形，求直线 l 的方程.

解： 如图5，此时直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$，l 的斜率为 $k_1=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$，$k_2=\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}=-1$，

故直线 l 的方程为

$y-1=1\cdot(x-2)$ 或 $y-1=-1\cdot(x-2)$，即

$x-y-1=0$ 或 $x+y-3=0$.



(1)　　　　　　　　(2)

(图5)

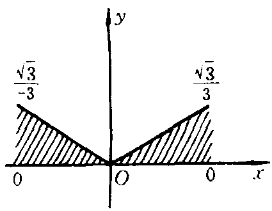
例2　已知直线 l 的方程为 $x\sin\theta-\sqrt{3}y+2=0$，当 θ 在实数范围内变动时，求 l 的倾斜角的取值范围.

解：　由已知得

$$y=\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}x+\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

设直线 l 的倾斜角为 α，则

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right].$$



(图6)

如图6，易知倾斜角 α 的取值范围是 $[0,\frac{\pi}{6}]\cup[\frac{5\pi}{6},\pi)$.

注意：(1) 所有的直线都有倾斜角，倾斜角的取值范围是 $[0,\pi)$.

(2) 并非所有的直线都有斜率，与 x 轴垂直的直线就不存在斜率.

2. “k”参数.

在直线的“点斜式”方程和“斜截式”方程中，都有直线的斜

率 k，为了求直线的方程，常常需要确定它的斜率，此时，我们可以把 k 作为未知数引入待定.

例3 直线 l 过定点 $A(-2,3)$，且与两轴围成的三角形面积为4，求直线 l 的方程.

解： 显然，l 不与两轴垂直，设直线的方程为

$$y-3=k(x+2).$$

令 $x=0$，得 $y=2k+3$，令 $y=0$，得 $x=-\frac{3}{k}-2$，于是直线 l 在两轴上的截距分别为 $-\frac{3}{k}-2$ 和 $2k+3$.

根据题意，得 $\frac{1}{2}\left|(2k+3)(-\frac{3}{k}-2)\right|=4$，

即 $(2k+3)(\frac{3}{k}+2)=\pm 8$.

若 $(2k+3)(\frac{3}{k}+2)=8$，化简得 $4k^2+4k+9=0$，

故 $k\in\varnothing$；

若 $(2k+3)(\frac{3}{k}+2)=-8$，化简得 $4k^2+20k+9=0$，

故 $k_1=-\frac{1}{2}$，$k_2=-\frac{9}{2}$，所求直线 l 的方程为

$x+2y-4=0$ 和 $9x+2y+12=0$.

【训练题】

(A)

21. 过点 $P(2,3)$ 与 $Q(1,5)$ 的直线 PQ 的倾斜角为（　　）

(A) arctg 2.　　(B) arctg (-2).

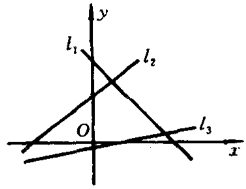
(C) $\frac{\pi}{2}+$arctg 2.　　(D) $\pi-$arcctg 2.

22. 若图中的直线 l_1, l_2, l_3 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3，则有（　　）

(A) $k_1<k_2<k_3$.　　(B) $k_3<k_1<k_2$.

(C) $k_3<k_2<k_1$.

(D) $k_1<k_3<k_2$.



（第22题）

23. 若直线 l 的倾斜角是连接(3，−5)，(0，−9)两点的直线倾斜角的2倍，则 l 的斜率是(　　)

(A) $\frac{24}{25}$.　　(B) $\frac{8}{3}$.

(C) $-\frac{7}{25}$.　　(D) $-\frac{24}{7}$.

24. 若三点 $A(3,1)$，$B(-2,b)$，$C(8,11)$在同一条直线上，则实数 b 等于(　　)

(A) 2.　　(B) 3.　　(C) 9.　　(D) −9.

25. 直线 $ax+by=ab(a>0,b<0)$的倾斜角是(　　)

(A) $\mathrm{arctg}(-\frac{a}{b})$.　　(B) $\mathrm{arctg}\,\frac{a}{b}$.

(C) $\pi-\mathrm{arctg}\,\frac{a}{b}$.　　(D) $\frac{\pi}{2}+\mathrm{arctg}\,\frac{a}{b}$.

26. 过点(1，2)，且与原点距离最大的直线方程是(　　)

(A) $x+2y-5=0$.　　(B) $2x+y-4=0$.

(C) $x+3y-7=0$.　　(D) $x-2y+3=0$.

27. (1) 过点 $A(-1,2)$且倾斜角正弦值为$\frac{3}{5}$的直线方程是________；

(2) 已知点 $P(6,a)$在过两点 $A(-1,3)$，$B(5,-2)$的直线上，则 a 的值等于________；

(3) 过点(2，−1)且倾斜角比直线 $x-3y+4=0$的倾斜角大45°的直线方程是________；

(4) 已知点 $P(2,-4)$，$Q(0,8)$，则线段 PQ 的垂直平分线方程为________；

(5) 已知直线 l 过点(3，−1)，且与两轴围成一个等腰直角

三角形，则 l 的方程为________________.

(B)

28. 已知直线 $y=\frac{1}{2}x+b$ 与 x 轴、y 轴的交点分别为 A,B，如果 $\triangle AOB$ 的面积（O 为原点）小于等于1，那么 b 的取值范围是（　　）

(A) $b\geqslant -1$.　　(B) $b\leqslant 1$ 且 $b\neq 0$.

(C) $-1\leqslant b\leqslant 1$ 且 $b\neq 0$.　　(D) $b\leqslant -1$ 或 $b\geqslant 1$.

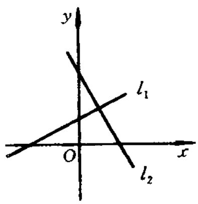
29. 已知点 M 是直线 $l:2x-y-4=0$ 与 x 轴的交点，把直线 l 绕点 M 逆时针方向旋转45°，则得到的直线方程是（　　）

(A) $3x+y-6=0$.　　(B) $3x-y+6=0$.

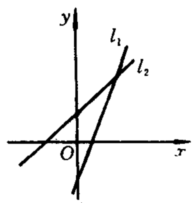
(C) $x+y-2=0$.　　(D) $x-3y-2=0$.

30. 已知直线 l_1 的方程是 $ax-y+b=0$，l_2 的方程是 $bx-y-a=0$（$ab\neq 0, a\neq b$），则下列各示意图形中，正确的是（　　）

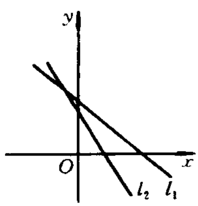
(A)



(B)



(C)



(D)