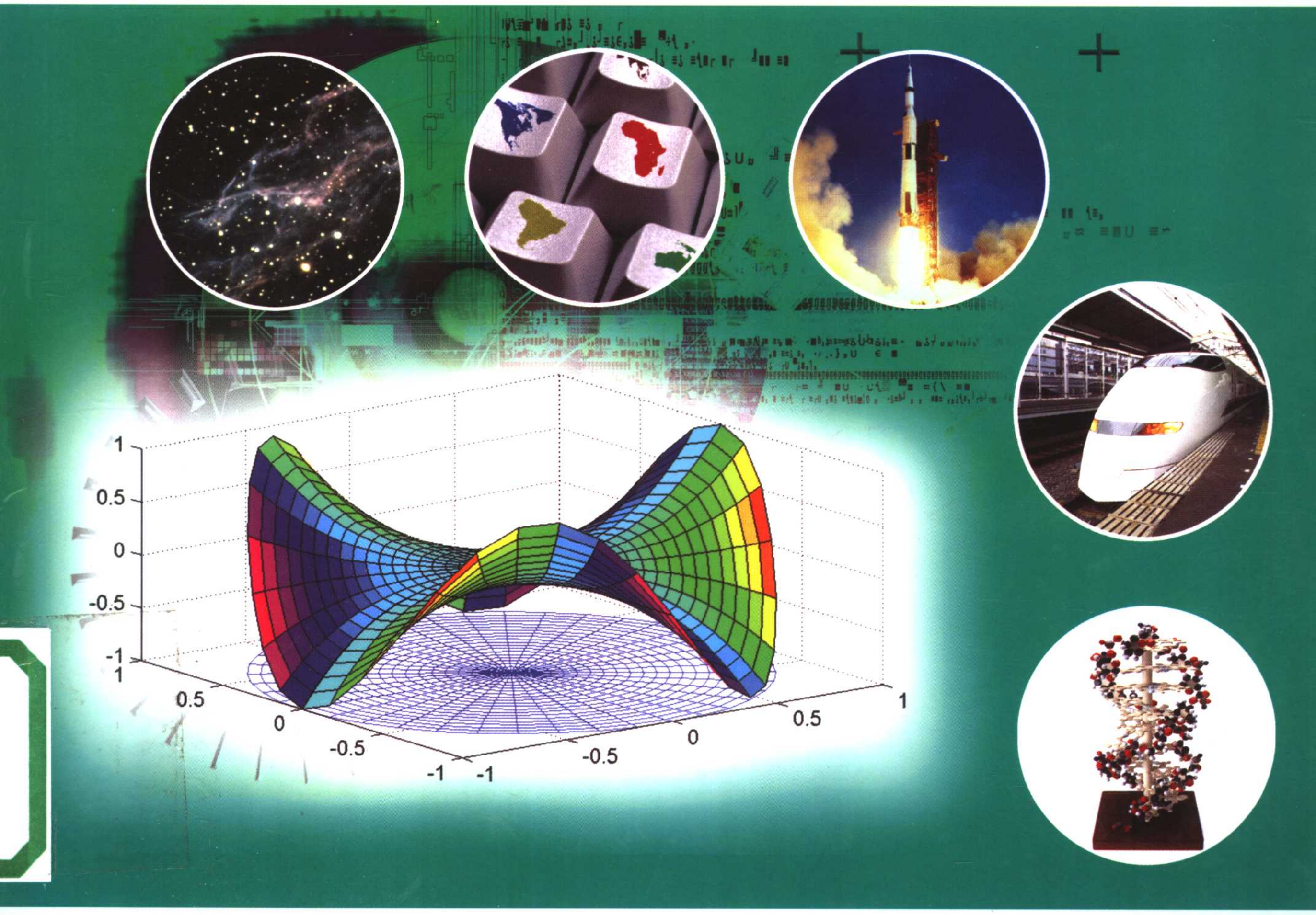
高等学校理工科规划教材

工科微积分

GONGKE WEIJIFEN

（下 册）

大连理工大学应用数学系/组编



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

高等学校理工科规划教材

工科微积分

（下册）

大连理工大学应用数学系　组编

主编　曹铁川

编者　（以编写章节先后排序）
曹铁川　张海文　庞丽萍
金光日　李　林　蒋志刚

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

工科微积分(下册) / 曹铁川主编 . —大连 : 大连理工大学出版社,
2005.2
ISBN 7-5611-2685-9

Ⅰ.工… Ⅱ.曹… Ⅲ.微积分—高等学校—教材 Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 098116 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市凌水河 邮政编码:116024
电话:0411-84708842 传真:0411-84701466 邮购:0411-84707961
E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn
大连业发印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:185mm×260mm 印张:15.5 字数:356 千字
印数:1 ~4 000
2005 年 2 月第 1 版 2005 年 2 月第 1 次印刷

责任编辑:范业婷 责任校对:李雁南
封面设计:宋 蕾

定 价:22.80 元

目　录

第5章 向量代数与空间解析几何

VECTORS AND ANALYTIC GEOMETRY IN SPACE

向量是对自然界和工程技术中存在着的既有大小又有方向的一类量的概括和抽象。作为重要的数学工具，向量代数在许多领域里都有广泛的应用。

解析几何的基本思想是用代数方法研究几何问题。空间直角坐标系的建立，把空间的点与三元有序数组对应起来，空间曲面和曲线与三元方程和方程组对应起来，空间向量及其运算的几何形式与坐标形式对应起来。正是这种形与数的结合，使几何目标得以用代数方法达到，反过来，代数语言又得以几何解释而变得直观。现代计算机技术的发展，使形与数结合的数学方法在科学研究、工程技术乃至影视艺术等领域得到了淋漓尽致的发挥。

向量代数与空间解析几何既是独立的知识体系，同时又是学习多元函数微积分的必要准备。

本章先引进向量的概念，并结合实际背景给出向量的运算。接着通过空间直角坐标系的建立，对向量及其运算用坐标法进行量化处理。在空间解析几何部分，又以向量为工具着重讨论平面和空间直线方程。在曲面方程中，着重讨论柱面、旋转曲面及锥面，并用截痕法研究二次曲面的图形。

5.1 向量及其运算

5.1.1 向量的概念

在现实生活中，我们遇到的量常可以分为两种类型。一类量在取定测量单位之后，用一个实数就可以表示出来，如长度、体积、温度、质量、能量等，这类量称为**数量**或**标量**(scalar)。另一类量不仅有大小，而且还带有方向，例如描述一个物体的运动速度，只指出速度的大小还不够，还要同时指出速度的方向才算完整。类似的量还很多，如力、位移、加速度、力矩、电场强度等。像这样既有大小又有方向的量，称之为**矢量**或**向量**(vector)。

向量通常用有向线段表示，有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向。以 A 为起点，B 为终点所表示的向量记作 $\boldsymbol{AB}$。向量还常用黑体字母或加箭头的字母表示，如 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a},\vec{b},\vec{F}$ 等。向量的大小称为向量的**模**(norm)，记作 $|\boldsymbol{AB}|$，$|\boldsymbol{a}|$，$|\vec{a}|$ 等。

在实际问题中遇到的具体向量，有时与起点有关，有时与起点无关，在数学上只讨论与起点无关的向量，即所谓**自由向量**，也就是只考虑向量的大小和方向这两方面的属性，而不考虑它的起点在何处。因而本教材中的向量可以任意作平行移动，只要平移后能完全重合的向量都认为是相等的。设有向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，如果它们的模相等，方向相同，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$。

模等于 1 的向量称为**单位向量**(unit vector)。模等于 0 的向量称为**零向量**(zero vector)，记作 $\boldsymbol{0}$ 或 $\vec{0}$，零向量的方向可以看做是任意的，即可根据情况任意指定。与向量 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**，记作 $-\boldsymbol{a}$。

若将向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 平移，使它们的起点重合，则表示它们的有向线段的夹角 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角(见图 5-1)，记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$。

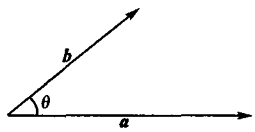


图 5-1

若两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角等于 0 或 π，即它们的方向相同或相反，则称 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ **平行**，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$。因为相互平行的向量经平移后可以位于同一直线上，故又称两平行的向量**共线**。若 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角等于 $\frac{\pi}{2}$，则称 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ **垂直**或**正交**，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$。

因为零向量的方向可以看做是任意的，因此在具体问题中，零向量可以认为与任何向量都平行或垂直。

5.1.2 向量的线性运算

向量最基本的运算是向量的加法和向量与数的乘法，这两种运算统称为向量的线性运算。

1. 向量的加法

在力学中，求力的合成与分解用的是平行四边形法则，在物理学中出现的向量也是用

这个方法进行合成与分解。由此可以规定向量的加法运算。

设对于向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，任取一点 A，作有向线段 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{AD}=\boldsymbol{b}$。在以 AB、AD 为邻边所作的平行四边形 $ABCD$ 中，记 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{AC}$，则称向量 $\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的和(见图 5-2)，记作

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

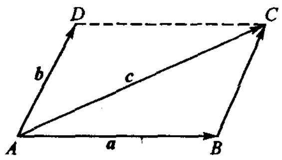


图 5-2

此规则称为向量相加的**平行四边形法则**。

求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 和的运算称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的加法。也可用下面的方法求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(图 5-3)：作有向线段 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{AC}$ 表示的向量即为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，此规则称为向量相加的**三角形法则**。从图 5-2 中可明显看出，用平行四边形法则和用三角形法则求出的 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 是一致的。当 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 平行时，用三角形法则求它们的和也是适用的。

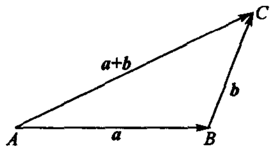


图 5-3

向量的加法满足下列运算规律：

(1)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$(交换律)；

(2)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$(结合律)。

由向量加法的平行四边形法则，交换律显然是成立的，结合律则可由图 5-4 得到验证。

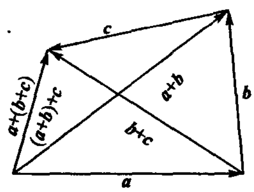


图 5-4

根据零向量、负向量的定义及加法的运算规律，立即得到

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$$

利用负向量可以规定向量的**减法**，向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的**差**为

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$$

向量的减法也可以用三角形法则表示(图 5-5)。

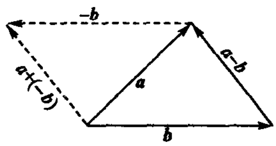


图 5-5

因为向量的加法满足交换律和结合律，所以加法可以推广至求任意有限个向量和的情况。n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 相加可写成

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$$

并容易看出只要把 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 依次首尾相接，则由 $\boldsymbol{a}_1$ 的起点到 $\boldsymbol{a}_n$ 的终点的有向线段所表示的向量即为所求的和。图 5-6 给出了$n=5$ 的情况：

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_5$$

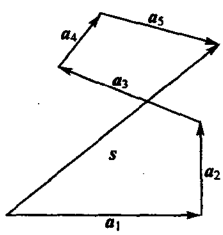


图 5-6

2. 向量与数的乘法(简称数乘)

设 $\boldsymbol{a}$ 是一向量，λ 是一实数，我们定义 $\boldsymbol{a}$ 与 λ 的**乘积**(简称**数乘**)是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$，它的方向当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同，当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反(见图 5-7)。

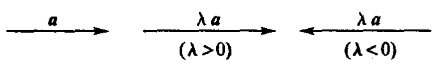


图 5-7

特别

$$1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},\ (-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$$

当 $\lambda=0$ 时

$$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$$

显然，对于任意向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 和实数 λ、μ，数乘满足下列运算规律：

(1)$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$(结合律)；

(2)$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$(对实数的分配律)；

(3)$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$(对向量的分配律)。

由向量加法和数乘的定义可以直接推出(1)、(2)。图 5-8 给出了(3)的几何解释。

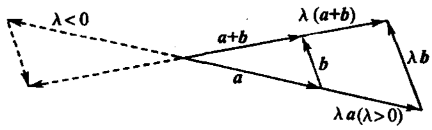


图 5-8

对于非零向量 $\boldsymbol{a}$，取 $\lambda=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}$，则向量 $\lambda\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同。注意到 $\left|\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\right|=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\cdot|\boldsymbol{a}|=1$，可见 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，记 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\boldsymbol{e}_a$，于是有

$$\boxed{\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a}$$

这说明任何非零向量可以表示为它的模与同方向单位向量的数乘。

进而可以得到下面的命题：

命题 1 设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则向量 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是，存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$。

证明 由向量数乘的定义立即得到充分性。下面证明必要性。

设 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$，若 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则取 $\lambda=0$，有 $\boldsymbol{b}=0\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}$。

若 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，则由 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$ 知 $\boldsymbol{e}_b/\!/\boldsymbol{e}_a$，这里 $\boldsymbol{e}_b$ 和 $\boldsymbol{e}_a$ 分别是与 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，因而 $\boldsymbol{e}_b=\pm\boldsymbol{e}_a$。于是

$\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{e}_b=|\boldsymbol{b}|(\pm\boldsymbol{e}_a)=|\boldsymbol{b}|\left(\pm\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\right)=\pm\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时，取 $\lambda=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$；当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时，取 $\lambda=-\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，则得

$$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$$

利用向量的线性运算，有时可方便地证明一些几何命题。

【例 1】 证明三角形两腰中点的连线平行于底边，且等于底边的一半。

证明 如图 5-9，在△ABC 中，D、E 分别为 AB、AC 的中点，

$$\boldsymbol{DE}=\boldsymbol{DA}+\boldsymbol{AE}=\frac{1}{2}\boldsymbol{BA}+\frac{1}{2}\boldsymbol{AC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{AC})=\frac{1}{2}\boldsymbol{BC}$$

所以 $\boldsymbol{DE}/\!/\boldsymbol{BC}$，且 $|\boldsymbol{DE}|=\dfrac{1}{2}|\boldsymbol{BC}|$。

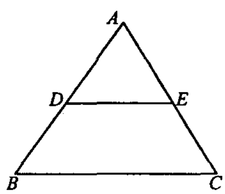


图 5-9

设有向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，如果通过平移将它们的起点移至同一点后，这些向量均在同一平面上，则称向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 共面。

命题 2 若向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面，而 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 不共线，则存在实数 λ 和 μ，使得

$$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$$

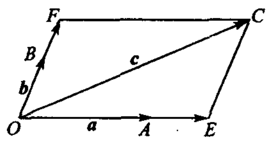


图 5-10

证明 因为 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 不共线，故可知 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 均为非零向量。过一定点 O 作 $\boldsymbol{OA}=\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{OB}=\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{OC}=\boldsymbol{c}$。由题设知 $\boldsymbol{OA}$、$\boldsymbol{OB}$、$\boldsymbol{OC}$ 共面。

过点 C 分别作直线 OB 和 OA 的平行线，交 OA 于 E，交 OB 于 F(图 5-10)，从而

$$\boldsymbol{OC}=\boldsymbol{OE}+\boldsymbol{OF}$$

又因 $\boldsymbol{OE}$ 与 $\boldsymbol{OA}$ 共线，由命题 1 知存在实数 λ，使得

$$\boldsymbol{OE}=\lambda\boldsymbol{OA}=\lambda\boldsymbol{a}$$

同理存在实数 μ，使得

$$\boldsymbol{OF}=\mu\boldsymbol{OB}=\mu\boldsymbol{b}$$

于是

$$\boldsymbol{OC}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$$

进而还可以得到

命题 3 若向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 不共面，则对任一向量 $\boldsymbol{d}$，存在实数 λ、μ、ν，使得

$$\boldsymbol{d}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}$$

该命题证法类似命题 2，作为练习留给读者完成。

5.1.3 向量的数量积(点积、内积)

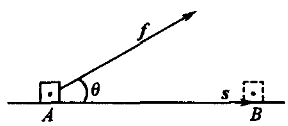


图 5-11

由物理学知，某物体在力 $\boldsymbol{f}$ 的作用下，沿直线从点 A 移至点 B，用 $\boldsymbol{s}$ 表示物体位移 $\boldsymbol{AB}$，那么力 $\boldsymbol{f}$ 所做的功为

$$W=|\boldsymbol{f}|\cdot|\boldsymbol{s}|\cos\theta$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 的夹角(图 5-11)。

由此我们规定向量的数量积运算。

设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是两个向量，$\theta=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，则称实数 $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**(scalar product)，或称**点积**(dot product)，也称**内积**(inner product)，记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boxed{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta}$$

按照数量积的定义，力 $\boldsymbol{f}$ 所做的功可表示为 $W=\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{s}$。

下面给出数量积的几何意义。

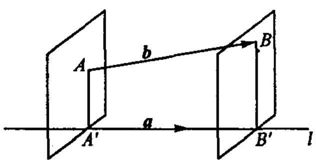


图 5-12

设非零向量 $\boldsymbol{a}$ 所在的直线为 l，且 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\theta$。用有向线段 $\boldsymbol{AB}$ 表示向量 $\boldsymbol{b}$，过点 A 和点 B 作平面垂直于直线 l，并与 l 分别交于点 A' 和点 B'(图 5-12)，则称点 A' 和点 B' 分别是点 A 和点 B 在 l 上的**投影**，称有向线段 $\boldsymbol{A'B'}$ 为向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的**投影向量**。容易看出

$$\boldsymbol{A'B'}=(|\boldsymbol{AB}|\cos\theta)\boldsymbol{e}_a=(|\boldsymbol{b}|\cos\theta)\boldsymbol{e}_a$$

称上式中的实数 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 为向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的**投影**(projection)，并记作 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$。当 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ 等于 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上投影向量的长度；当 $\frac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi$ 时，$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ 等于 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上投影向量长度的相反数；当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ 等于零。我们还注意到，无论向量 $\boldsymbol{b}$ 如何平移，它在向

量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影都是同一个实数，即具有惟一性。

根据数量积的定义，当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，立即得到

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$$

这表明，数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 是向量 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上投影的 $|\boldsymbol{a}|$ 倍，特别是当 $\boldsymbol{a}$ 为单位向量时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 就等于 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影。

不难验证，投影具有下面的线性性质：

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$$

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}+\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c}$$

由向量投影的定义，可立即推出前一式，图 5-13 给出了后一式的几何解释。

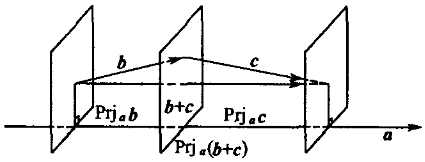


图 5-13

对于任意向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 和实数 λ、μ，向量的数量积满足下面的运算规律：

(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$(交换律)；

(2)$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot(\mu\boldsymbol{b})=\lambda\mu(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$(数乘结合律)；

(3)$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$(分配律)。

前两式由数量积和数乘定义可立即推出。式(3)当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时自然成立。下面就 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 的情况给予讨论，有

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}|(\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}+\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$$

这就验证了分配律的正确性。

由数量积的定义还可推知：

> 向量 $\boldsymbol{a}$ 的模
>
> $$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$$
>
> 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角满足
>
> $$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}\quad(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$$
>
> $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充分必要条件是
>
> $$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$$

【例 2】 设流体以速度 $\boldsymbol{v}$ 流经平面 π，在 π 上有一面积为 A 的区域，$\boldsymbol{e}_n$ 为垂直于 π 的单位向量(图 5-14(a))，试用数量积表示流体经过该区域且流向 $\boldsymbol{e}_n$ 所指一侧的流量(即单位时间内流过该区域的流体质量)，已知流体的密度为常数 ρ。

解　单位时间内流经该区域的流体是底面积为 A、斜高为 $|\boldsymbol{v}|$ 的斜柱体(图 5-14(b))。设 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{e}_n$ 的夹角为 θ，则此斜柱体的体积为

$$V=A|\boldsymbol{v}|\cos\theta=A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_n$$

从而所求流量为

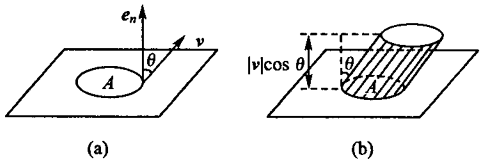


图 5-14

$$\Phi=\rho A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_n$$

5.1.4　向量的向量积(叉积、外积)

在物理学中,讨论刚体转动时,要考虑作用在刚体上的力所产生的力矩。例如一物体的支点为 O,力 $\boldsymbol{f}$ 作用在物体上的点 A,$\boldsymbol{f}$ 与 $\boldsymbol{OA}$ 的夹角为 θ,点 O 到力 $\boldsymbol{f}$ 作用线的距离为 $|OP|$(图 5-15)。则力 $\boldsymbol{f}$ 对支点 O 的力矩 $\boldsymbol{M}$ 是一个向量,它的大小为力的大小与支点到力作用线距离的乘积,即

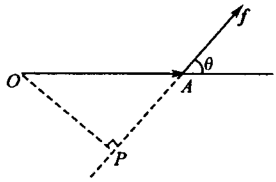


图 5-15

$$|\boldsymbol{M}|=|\boldsymbol{f}|\,|OP|=|\boldsymbol{f}|\,|\boldsymbol{OA}|\sin\theta$$

$\boldsymbol{M}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{OA}$ 与 $\boldsymbol{f}$,指向符合"右手法则",即当右手的四指从 $\boldsymbol{OA}$ 转向 $\boldsymbol{f}$ 时(转角为两者的夹角),大拇指的指向就是 $\boldsymbol{M}$ 的方向。由此我们规定向量的向量积运算。

设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是两个向量,$\theta=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$,规定 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**向量积**(vector product)是一个向量,记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,它的模

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\theta$$

它的方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,并且 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 符合右手法则(图 5-16)。

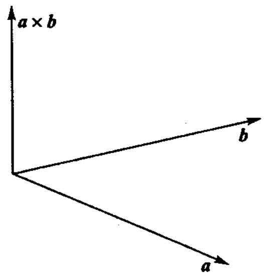


图 5-16

向量的向量积也称向量的**叉积**(cross product)或**外积**(outer product)。

据此定义,上述力矩可以记作 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{OA}\times\boldsymbol{f}$。

两向量的向量积有如下几何意义:

(1)$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的模 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 是以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积(图 5-17);

(2)$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与一切既平行于 $\boldsymbol{a}$ 又平行于 $\boldsymbol{b}$ 的平面垂直。

向量积的几何意义在后面的空间解析几何中有着重要的应用。

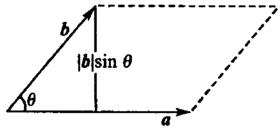


图 5-17

向量的向量积满足下面运算规律:

(1)$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$(注意:不满足交换律);

(2)$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$(结合律);

(3)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$(分配律)。

式(1)和式(2)由向量积定义不难验证,式(3)的证明稍显复杂,略去。

由向量积的定义,可立即推出下列性质:

$$\mathbf{0}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\times\mathbf{0}=\mathbf{0}$$
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$$
两个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 平行的充分必要条件是
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$$

【例 3】 设△ABC 的三条边长分别是 a、b、c(图 5-18)，试用向量运算证明正弦定理

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

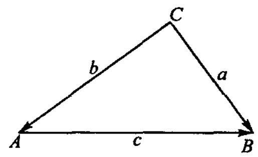


图 5-18

证明 注意到 $\boldsymbol{CB}=\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{AB}$，故有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{CB}\times\boldsymbol{CA}&=(\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{AB})\times\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{CA}\times\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{CA}\\&=\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{CA}\\&=\boldsymbol{AB}\times(\boldsymbol{CB}+\boldsymbol{BA})=\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{CB}\end{aligned}$$

于是得到

$$\boldsymbol{CB}\times\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{CB}$$

从而

$$|\boldsymbol{CB}\times\boldsymbol{CA}|=|\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{CA}|=|\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{CB}|$$

即

$$ab\sin C=cb\sin A=ca\sin B$$

所以

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

5.1.5 向量的混合积

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 仍是一向量，它还可以与另一向量 $\boldsymbol{c}$ 作数量积，我们称 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的混合积(mixed product)，记为$[\boldsymbol{abc}]$，即

$$[\boldsymbol{abc}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{c}|\cos\theta$$

其中 θ 是向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角。

混合积$[\boldsymbol{abc}]$是这样一个实数，它的绝对值$|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|$表示以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为邻边的平行六面体的体积。这是因为$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$等于以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积。以此平行四边形为底，平行六面体的高 h 恰为$||\boldsymbol{c}|\cos\theta|$(图 5-19)。

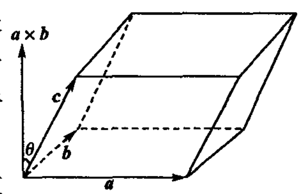


图 5-19

当$[\boldsymbol{abc}]=0$ 时，平行六面体的体积为零，此时该六面体的三条棱落在同一平面上，即 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面；反之，当 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面时，$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$，此时 $\theta=\frac{\pi}{2}$，由混合积的定义，立即得到$[\boldsymbol{abc}]=0$。于是得到

三向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是

$$[\boldsymbol{abc}]=0$$

习题 5.1

1. 设 A、B、C 是 $\triangle ABC$ 的三个顶点，D 是 AC 的中点，

(1)求 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BC}+\boldsymbol{CA}$；

(2)若记 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 表示 $\boldsymbol{BD}$ 和 $\boldsymbol{CD}$。

2. 已知 A、B、C、D 为空间 4 点，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{CD}=\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{DA}=\boldsymbol{d}$。若 E、F 分别是 AC 和 BD 的中点，试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$ 表示 $\boldsymbol{EF}$。

3. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 来表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$。

4. 用向量法证明，对角线互相平分的四边形是平行四边形。

5. 设 D、E 是 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA 上的点，且 $BD=\frac{1}{3}BC$，$CE=\frac{1}{3}CA$，G 是 AD 和 BE 的交点，用向量法证明

$$DG=\frac{1}{7}AD$$

6. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta=\frac{2\pi}{3}$，且 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$，试求：

(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；

(2)$(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$。

7. 设向量 $\boldsymbol{r}$ 的模是 4，它与向量 $\boldsymbol{u}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，求 $\boldsymbol{r}$ 在 $\boldsymbol{u}$ 上的投影。

8. 设 $\boldsymbol{r}=2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，且向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，求：

(1)$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}$；

(2)$\boldsymbol{r}$ 在 $\boldsymbol{s}$ 上的投影 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{s}}\boldsymbol{r}$。

9. 证明向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充分必要条件是，对任意的实数 λ，都有

$$|\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}|$$

10. 已知 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=26$，$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=72$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$。

11. 已知 $|\boldsymbol{a}|=10$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=12$，求 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$。

12. 设向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，证明

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$$

13. 设 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}$，求证 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 平行。

5.2　点的坐标与向量的坐标

5.2.1　空间直角坐标系

为了建立空间的点与数、图形与方程、向量与数量的联系，进而用代数方法研究几何

问题，我们先来建立空间直角坐标系。

设 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 为相互垂直的三个单位向量，其正方向符合右手法则。过空间一定点 O，沿着 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 的方向作直线 Ox、Oy 和 Oz，分别以 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 的方向作为它们的正向，并取这些向量的长度作为单位，就使得 Ox、Oy、Oz 成为三条实数轴，称为**坐标轴**。点 O 和三条坐标轴就组成了**空间直角坐标系**，点 O 称为坐标**原点**(图 5-20)。$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 称为该坐标系下的**标准单位向量**。

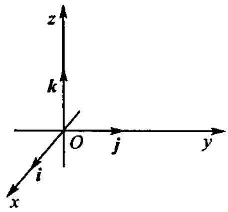


图 5-20

由两条坐标轴所确定的平面称为**坐标平面**，x 轴和 y 轴确定的平面称 xOy 面，类似地有 yOz 面和 zOx 面。3 个坐标平面把空间分为 8 个部分，每个部分叫做一个**卦限**。xOy 面的 1、2、3、4 象限上方的 4 个卦限依次称为 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ 卦限，下方的 4 个卦限依次称为 Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ 卦限(图 5-21)。

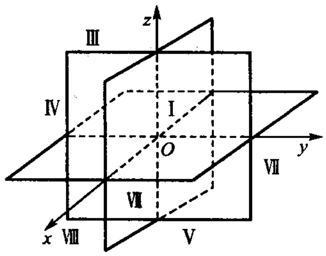


图 5-21

设 M 是空间的一点，过点 M 点分别作平面垂直于三条坐标轴，并依次与 x 轴、y 轴、z 轴交于 P、Q、R 三点。P、Q、R 在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标分为 x、y、z。这样点 M 就和有序数组(x,y,z)建立了一一对应的关系，我们称有序数组(x,y,z)为点 M 的**坐标**，依次把 x、y、z 称为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标，并可把点 M 记作 $M(x,y,z)$(图 5-22)。特别地，有 $P(x,0,0)$，$Q(0,y,0)$，$R(0,0,z)$，$O(0,0,0)$。

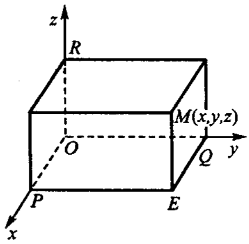


图 5-22

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间两点。过 M_1 和 M_2 各作三个分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的平面。这 6 个平面围成一个长方体，M_1M_2 为其对角线(图 5-23)。从图中可以看出，该长方体的三条棱的长度分别是 $|x_2-x_1|$、$|y_2-y_1|$、$|z_2-z_1|$，于是得到

> $M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$两点间距离为
>
> $$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$
>
> 特别地，点 $M(x,y,z)$ 与坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为
>
> $$|MO|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

【例 1】 已知点 $A(4,1,7)$、$B(-3,5,0)$，在 y 轴上求一点 M，使得 $|MA|=|MB|$。

解 因点 M 在 y 轴上，故设其坐标为 $M(0,y,0)$，则由两点间距离公式，有

$$\sqrt{(4-0)^2+(1-y)^2+(7-0)^2}$$
$$=\sqrt{(-3-0)^2+(5-y)^2+(0-0)^2}$$

解得 $y=-4$，故所求点为 $M(0,-4,0)$。

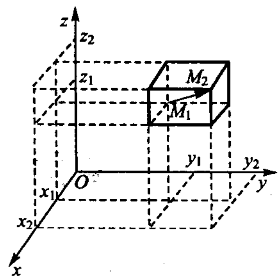


图 5-23

任给定一向量 $\boldsymbol{a}$，将其置于直角坐标系 $Oxyz$ 之中。若 $\boldsymbol{a}$ 在 x

轴、y 轴及 z 轴上的投影分别是 a_x、a_y 和 a_z，则可得到惟一有序数组 (a_x, a_y, a_z)。

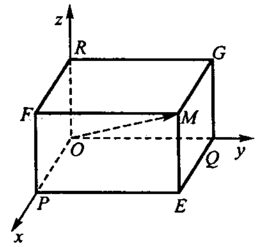


图 5-24

将 $\boldsymbol{a}$ 平移，使其起点位于原点 O，终点位于点 M，即 $\boldsymbol{OM}=\boldsymbol{a}$。以 OM 为对角线作如图 5-24 所示长方体 $RFMG\text{-}OPEQ$，由 5.1 节内容可得

$$\boldsymbol{OP}=a_x\boldsymbol{i}, \boldsymbol{OQ}=a_y\boldsymbol{j}, \boldsymbol{OR}=a_z\boldsymbol{k}$$

又由向量的加法运算，有

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{OM}=\boldsymbol{OP}+\boldsymbol{PE}+\boldsymbol{EM}=\boldsymbol{OP}+\boldsymbol{OQ}+\boldsymbol{OR}$$

所以

$$\boxed{\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}}$$

此式称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**标准分解式**。$a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 沿三个坐标轴方向的**分量**(component)。

反之，若给定了有序数组 (a_x, a_y, a_z)，则由标准单位向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 的线性组合 $a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，也就确定了向量 $\boldsymbol{a}$。可见向量 $\boldsymbol{a}$ 与有序数组 (a_x, a_y, a_z) 是一一对应的，据此称 (a_x, a_y, a_z) 为向量 $\boldsymbol{a}$ 在坐标系 $Oxyz$ 中的**坐标**(coordinates)，记作

$$\boxed{\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)}$$

该式称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**坐标表示式**。

由以上规定知，向量 $\boldsymbol{a}$ 的三个坐标 a_x、a_y、a_z 依次是 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影。

设 M 是 $Oxyz$ 坐标系空间中的任意一点，称起点在原点的向量 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{OM}$ 为**向径**。若点 M 的坐标为 (x, y, z)，由向量坐标的定义不难看出 $\boldsymbol{r}=(x, y, z)$。记号 (x, y, z) 既表示点 M，又表示 $\boldsymbol{OM}$，读者在后面的学习中，要注意从上下文加以区别，避免混淆。

5.2.2　向量运算的坐标表示

向量有了坐标表示，向量的加、减、数乘运算就可以方便地转化为坐标的运算。

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x, b_y, b_z)$，$\lambda$ 为实数，则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b} &=(a_x, a_y, a_z)\pm(b_x, b_y, b_z)=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\pm(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\ &=(a_x\pm b_x)\boldsymbol{i}+(a_y\pm b_y)\boldsymbol{j}+(a_z\pm b_z)\boldsymbol{k}\\ \lambda\boldsymbol{a} &=\lambda(a_x, a_y, a_z)=\lambda(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})=\lambda a_x\boldsymbol{i}+\lambda a_y\boldsymbol{j}+\lambda a_z\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

从而得到向量加、减与数乘的坐标表示形式

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x, a_y\pm b_y, a_z\pm b_z)$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

可见，对向量进行加减与数乘运算，只需对各个坐标分别进行相应的数量运算即可。

5.1 节命题 1 指出，若向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$ 相当于 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，用坐标式表示即为

$$(b_x, b_y, b_z)=\lambda(a_x, a_y, a_z)$$

从而

$$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}=\lambda$$

由此可知

> 两个非零向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$ 平行的充分必要条件是对应的坐标成比例，即
>
> $$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}\text{（当分母为零时，其分子也为零）}$$

【例 2】 设有点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，求向量 $\boldsymbol{M_1M_2}$ 的坐标表示式。

解 由于

$$\boldsymbol{M_1M_2}=\boldsymbol{OM_2}-\boldsymbol{OM_1}$$

而

$$\boldsymbol{OM_1}=(x_1,y_1,z_1),\ \boldsymbol{OM_2}=(x_2,y_2,z_2)$$

于是

$$\boldsymbol{OM_2}-\boldsymbol{OM_1}=(x_2,y_2,z_2)-(x_1,y_1,z_1)=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

即

$$\boldsymbol{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

这一结果以后要多次用到。

利用向量的坐标运算，还可以具体地表示出向量的模及其方向。

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，作 $\boldsymbol{OM}=\boldsymbol{a}$（图 5-25），则点 M 的坐标为 (a_x,a_y,a_z)，由两点间距离公式立即得到

$$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{OM}|=|OM|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

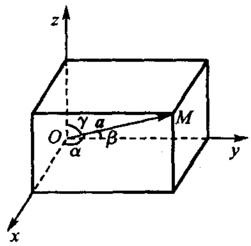


图 5-25

图 5-25 中的 α、β、γ 是非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴、y 轴、z 轴的正方向夹角，称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向角**（$0\leqslant\alpha$、β、$\gamma\leqslant\pi$），$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**。用方向角或方向余弦可以确定向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向。由图 5-25容易看出

> $$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|},\cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|},\cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}$$
>
> 其中 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$
>
> 方向余弦满足关系式
>
> $$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

【例 3】 已知两点 $A(4,\sqrt{2},1)$，$B(3,0,2)$，求向量 $\boldsymbol{AB}$ 的三个方向角。

解 由 $\boldsymbol{AB}=(4,\sqrt{2},1)-(3,0,2)=(1,\sqrt{2},-1)$，得

$$|\boldsymbol{AB}|=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2+(-1)^2}=2$$

设 $\boldsymbol{AB}$ 的三个方向角分别为 α、β 和 γ，则

$$\cos\alpha=\frac{1}{2},\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2},\cos\gamma=-\frac{1}{2}$$

所以