教和学辅导丛书

解析几何

中国青年出版社

教和学辅导丛书

解析几何

北京师范大学中学教学研究中心　主编

中国青年出版社

封面设计：魏　杰

教和学辅导丛书
解析几何
北京师范大学中学教学研究中心主编
*
中国青年出版社出版　发行
中国铁道出版社印刷厂印刷　新华书店经销
*
787×1092　1/32　5.25 印张　　140 千字
1988 年 12 月北京第 1 版　1988 年 12 月北京第 1 次印刷
印数 1—35,000 册　定价 1.80 元

目　　录

前言

为了更好地贯彻执行中学教学大纲的精神，按照教学大纲的要求进行教学改革，改进教学方法，提高教学质量，帮助广大中学师生努力达到教学大纲所规定的教学目标，使学生扎扎实实地学好学活基础知识，我们在张国栋、高建军等同志最初组织编写的中学各年级教学用书的基础上，主编了中学“教和学辅导丛书”. 参加编写的都是全国一些著名中学有丰富教学经验的教师.

这套丛书紧密配合新编的中学课本，突出重点，注意方法、思路的分析，每本书的内容主要包括基本学习要求、重点知识分析、难点辨析、错例索因、例题和练习，以及课外活动资料等. 它的主要特点是抓纲扣本，纲本结合；从教学实际出发，既有利于中学生掌握知识，发展能力，提高学习效果，也有助于中学教师剖析教材，精心备课，提高教学水平. 但愿这套丛书能成为中学师生的良师益友.

丛书主编组由阎金铎、陈浩元、庄似旭、陶卫、乔际平同志组成. 数学、物理、化学、外语 4 科的编委会由王绍宗、华跃义、胡炯涛、马明、孟学军、张国栋、高建军同志主持. 政治科的编委会由阎金铎、张志建同志主持.

参加本书编写的同志有华东师范大学第二附属中学滕永康、马惠生，以及上海师范大学附属中学胡炯涛.

我们恳切地期望使用这套丛书的读者能提出宝贵建议，以便再版时修订完善，使它更好地为我国的中学教学改革服务.

北京师范大学中学教学研究中心

1988年3月1日

第一章 直 线

本章首先讨论了有向线段、两点间距离及线段的定比分点，然后是直线方程的各种表达形式，并利用这些方程讨论了两条直线的位置关系、两条直线所成的角、点到直线的距离.

1.1 有向线段、定比分点

1.1.1 概念剖析

1.1.1.1 有向直线与有向线段

有向直线与有向线段虽然都有方向性，但有向直线仅是规定了正方向，而有向线段不仅规定了方向，而且有两个端点.（有向线段的这两个特征，往往通过规定起点、终点将其统一起来）

1.1.1.2 有向线段的长度与数量

有向线段的数量是解析几何的表示方法，是用终点坐标减去起点坐标的一种用数来表示形的方法. 它是一个实数，其符号表示了有向线段的方向：与规定方向相同者用正号，与规定方向相反者用负号.

有向线段的数量的绝对值才表示有向线段的长度.

1.1.1.3 两点（P_1，P_2）间的距离公式的特殊情况

如 P_1 点与原点重合，则 $|P_1P_2| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$.

如 P_2 点与原点重合，则 $|P_1P_2| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

如 P_1P_2 与 x 轴平行或重合（P_2 在 P_1 右方），则

$$|P_1P_2| = x_2 - x_1.$$

如 P_1P_2 与 y 轴平行或重合（P_2 在 P_1 上方），则

$$|P_1P_2| = y_2 - y_1.$$

1.1.1.4 定比分点

点 P 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比 λ，是指两个有向线段（$\overline{P_1P}$，$\overline{PP_2}$）的数量比，而不是它们的长度比，与平面几何中的线段比是两个不同的概念，绝不可混淆.

在运用公式时，要注意字母的书写顺序.它是以原有向线段的起点为起点、分点为终点的有向线段的数量与以分点为始点、原有向线段的终点为终点的有向线段的数量之比．即 $\lambda = \dfrac{P_{起}P_{分}}{P_{分}P_{终}}$.

$\lambda = \dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$ 的取值范围与分点 P 的位置关系见表 1-1 和表 1-2.

表 1-1

分点 P 位置	内分点	外分点	
		P 在 P_1P_2 延长线上	P 在 P_2P_1 延长线上
λ 取值情况	$\lambda>0$	$\lambda<-1$	$-1<\lambda<0$

表 1-2

分点 P 位置	分点与一端重合	
	P 与 P_1 重合	P 与 P_2 重合
λ 取值情况	$\lambda=0$	λ 不存在

1.1.1.5 定比分点公式

公式不应死记硬背．关系式不仅与定比 λ 有关，而且与原有向线段的起点、终点有关．应灵活理解为：

$$x_{分} = \frac{x_{起} + \lambda \cdot x_{终}}{1 + \lambda},$$

$$y_{分} = \frac{y_{起} + \lambda \cdot y_{终}}{1 + \lambda}.$$

由于定比分点公式给出了起点、终点、分点、定比四者之间的关系，因此利用它不仅可求出分点的坐标，还可求出其它三者的有关数据．（只要已知 4 个中的任 3 个，第 4 个就可求得）

如把定比分点公式改写为：

$$x = \frac{1}{1 + \lambda}x_{起} + \frac{\lambda}{1 + \lambda}x_{终},$$

$$y = \frac{1}{1 + \lambda}y_{起} + \frac{\lambda}{1 + \lambda}y_{终}.$$

由 $\frac{1}{1 + \lambda} + \frac{\lambda}{1 + \lambda} = 1$ 可知，关系式中，起点与终点坐标的系数之和应为 1.

1.1.2 例题分析

例 1 已知 P 为矩形 $ABCD$ 内任一点．

求证：$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$.

略解 把 BC 边放在 x 轴的正向，BA 边放在 y 轴的正向，B 点放在原点（见图 1-1）．A, B, C, D, P 的坐标分别为 $A(0, a)$，$B(0, 0)$，$C(c, 0)$，$D(c, a)$，$P(x, y)$.

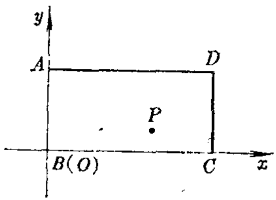

图 1-1

由 $PA^2 = x^2 + (y - a)^2$,

$PC^2 = (x - c)^2 + y^2$.

$$PB^2 = x^2 + y^2, \quad PD^2 = (x-c)^2 + (y-a)^2.$$

可得：$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$.

说明 本题如不利用两点间的距离公式，而利用平面几何方法来证，则将事倍功半.

例 2 已知△ABC 的3个顶点坐标分别为 $A(-3,0)$，$B(1,4)$，$C(5,0)$，试判断其形状.

解 ∵ $|AB| = \sqrt{(1+3)^2 + (4-0)^2} = 4\sqrt{2}$.

$|AC| = 5 - (-3) = 8$.

$|BC| = \sqrt{(5-1)^2 + (0-4)^2} = 4\sqrt{2}$.

∴ 由 $|AB| = |BC|$，$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$.

可知△ABC 为等腰直角三角形.

说明 切不可由 $|AB| = |BC|$，急于得出其形状为等腰三角形的结论.

例 3 已知 $P_1(-2,-2)$，$P_2(2,6)$ 两点.

(1)试在两点的连线间求一点 P，使 $|P_1P|$ 为 $|P_1P_2|$ 的 1/4.

(2)试在 P_2P_1 的延长线上求一点 Q，使 $|P_1Q|$ 为 $|P_1P_2|$ 的 1/2.

略解 (1) ∵ $4|P_1P| = |P_1P_2|$.

∴ 由 $|P_1P_2| = |P_1P| + |PP_2|$，可得

$$|\lambda| = \frac{|P_1P|}{|PP_2|} = \frac{1}{3}.$$

又∵ P 为内分点，∴ 由 $\lambda > 0$，可得

$$\lambda = \frac{1}{3}.$$

从而得到 $P(x,y)$ 点坐标为：

$$x=\frac{-2+\frac{1}{3}\times 2}{1+\frac{1}{3}}=-1,\quad y=\frac{-2+\frac{1}{3}\times 6}{1+\frac{1}{3}}=0.$$

(2)∵ $2|P_1Q|=|P_1P_2|$.

∴ 由 $|P_1P_2|=|P_2Q|-|P_1Q|$，可得

$$|\lambda|=\frac{|P_1Q|}{|QP_2|}=\frac{1}{3}.$$

又∵Q 为外分点，∴由 $\lambda<0$，可得

$$\lambda=-\frac{1}{3}.$$

从而得知 $Q(x,y)$ 点坐标为：

$$x=\frac{-2+(-\frac{1}{3})\cdot 2}{1-\frac{1}{3}}=-4,$$

$$y=\frac{-2+(-\frac{1}{3})\cdot 6}{1-\frac{1}{3}}=-6.$$

说明 鉴于 λ 是两个有向线段的数量比，在运算时符号容易出错. 如先求出 $|\lambda|$，就绕过了线段的有向性，最后再确定符号，就可防止错误的产生.

例 4 已知平面上3点 A,B,C 的坐标分别为 $A(-5,-1)$，$B(3,3)$，$C(-1,7)$，试求与 A,B,C 组成平行四边形的第 4 个顶点的坐标.

略解 1)如此平行四边形以 AB 为对角线，则由 AB 的中点坐标$(-1,1)$，可得第 4 个顶点的坐标为$(-1,-5)$.

2)如此平行四边形以 BC 为对角线，则由 BC 的中点坐标$(1,5)$，可得第 4 个顶点的坐标为$(7,11)$.

3)如此平行四边形以 AC 为对角线，则由 AC 的中点坐标 $(-3,3)$，可得第 4 个顶点的坐标为 $(-9,3)$.

综上所述可知：所求第 4 个顶点坐标为：$(-1,-5)$ 或 $(7,11)$ 或 $(-9,3)$.

说明 本题如利用平行四边形对边相等的性质来解，由于需解由两个无理方程联立的方程组，因此运算量较大.

现利用平行四边形对角线互相平分的性质，借助于定比分点公式，使问题的求解化繁为简.

例 5 如图 1-2 所示，$A(-11,-3)$，$B(-1,y_0)$，$C(-3,1)$，$D(x_1,y_1)$，$\angle 1=\angle 2$，$CS\perp SD$. 试求：y_0,x_1,y_1.

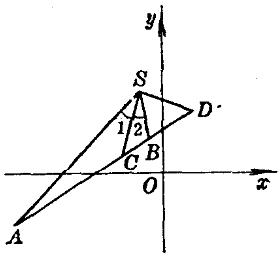

图 1-2

分析 由已知条件可知 SC，SD 分别为 $\angle ASB$ 的内角，外角平分线，所以利用比例关系 $\frac{|AC|}{|CB|}=\frac{|AD|}{|DB|}$ 与定比分点公式，可使问题迎刃而解.

略解 $\because$ $\angle 1=\angle 2$，$SC\perp SD$，

$\therefore$ $\frac{|AC|}{|CB|}=\frac{|AD|}{|DB|}$ $\left(=\frac{|SA|}{|SB|}\right)$.

设 $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}=\lambda$. 则由 $-3=\frac{-11+\lambda(-1)}{1+\lambda}$ 可得：$\lambda=4$.

从而由 $1=\frac{-3+4y_0}{1+4}$ 可得：$y_0=2$.

又 $\because$ $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=-\lambda=-4$.

$$\therefore \quad x_1 = \frac{-11 + (-\lambda)\cdot(-1)}{1 + (-\lambda)} = \frac{7}{3},$$

$$y_1 = \frac{-3 + (-\lambda)\cdot 2}{1 + (-\lambda)} = \frac{11}{3}.$$

例 6 已知在 $t = 0$ 时，在 $\triangle ABC$ 的边上运动的点 D,E,F 分别从 A,B,C 出发，各以一定速度向 B,C,A 前进，并在 $t = 1$ 时分别到达 B,C,A．

（1）试证：在运动过程中，$\triangle DEF$ 的重心 G 是定点．

(2)在 $\triangle DEF$ 的面积达到最小时，其面积是 $\triangle ABC$ 面积的几分之几？

解 (1)试如图 1-3 建立坐标系，设 $A(x_1, y_1)$，$B(0, 0)$，$C(x_2, y_2)$．

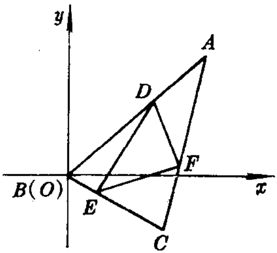

图 1-3

由题可得：

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{FA}} = \lambda.$$

$$\therefore \quad D_x = \frac{x_1}{1 + \lambda}, \quad D_y = \frac{y_1}{1 + \lambda}.$$

$$E_x = \frac{x_2\lambda}{1 + \lambda}, \quad E_y = \frac{y_2\lambda}{1 + \lambda}.$$

$$F_x = \frac{x_2 + \lambda x_1}{1 + \lambda}, \quad F_y = \frac{y_2 + \lambda y_1}{1 + \lambda}.$$ 从而由

$$\begin{cases} G_x = \dfrac{D_x + E_x + F_x}{3} = \dfrac{x_1 + x_2}{3}, \\[2ex] G_y = \dfrac{D_y + E_y + F_y}{3} = \dfrac{y_1 + y_2}{3}. \end{cases}$$

可知 $\triangle DEF$ 的重心 G 是一定点—— 它也是 $\triangle ABC$ 的重心．

(2) ∵ $\dfrac{S_{\triangle DAF}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{|AD|\cdot|AF|}{|AB|\cdot|AC|}$.

$\dfrac{S_{\triangle DBE}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{|DB|\cdot|BE|}{|AB|\cdot|BC|}$.

$\dfrac{S_{\triangle EFC}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{|CF|\cdot|CE|}{|BC|\cdot|AC|}$.

∴由 $|AD|=\dfrac{\lambda}{1+\lambda}|AB|,\quad |AF|=\dfrac{1}{1+\lambda}|AC|,$

$|BD|=\dfrac{1}{1+\lambda}|AB|,\quad |BE|=\dfrac{\lambda}{1+\lambda}|BC|,$

$|CF|=\dfrac{\lambda}{1+\lambda}|CA|,\quad |CE|=\dfrac{1}{1+\lambda}|BC|$，可知

$$S_{\triangle DBE}=S_{\triangle DAF}=S_{\triangle EFC}.$$

于是本题的第二个问题只需求出$(S_{\triangle DBE})_{最大值}$即可.

∵ $S_{\triangle DBE}=\dfrac{1}{2}|BD|\cdot|BE|\cdot\sin B$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\lambda}|BA|\cdot\dfrac{\lambda}{1+\lambda}|BC|\cdot\sin B.$

∴ 由 $\dfrac{1}{1+\lambda}\cdot\dfrac{\lambda}{1+\lambda}=\dfrac{1}{1+\lambda}\cdot\left(1-\dfrac{1}{1+\lambda}\right)$，可知

在 $\lambda=1$ 时 $S_{\triangle DBE}$ 达到最大值：$\dfrac{1}{4}S_{\triangle ABC}$. 于是在 $\lambda=1$ 时 $S_{\triangle DEF}$ 最小，此时：$S_{\triangle DEF}:S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{4}$.

基础训练题一

1. 选择题(每题都给出的代号为 A,B,C,D 的 4 个结论中，仅有 1 个结论是正确的，把正确结论的代号写在题后的圆括号内. 以后同此，不再解释)：

(1)一条线段的长是 5 个单位，它的一个端点是 $A(2,1)$，另一个端点 B 的横坐标是 -1，则其纵坐标是(　).

$(A)5$；　$(B)-3$；　$(C)5$ 或 -3；　(D)以上均不对.

(2)$A(\cos\alpha, \sin\alpha)$和$B(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha)$两点间的距离是(　).

(A) $\sqrt{2(1+\cos\alpha)}$；　　(B) $2\sin\frac{\alpha}{2}$；

(C) $2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|$；　　(D) $2\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|$.

(3)如$\triangle ABC$的三个顶点分别是$A(-2,1)$,$B(2,-2)$,$C(8,6)$,则此三角形形状为(　).

(A)锐角三角形；　(B)直角三角形；

(C)钝角三角形；　(D)不能确定.

(4)线段$|P_1P_2|=1$,点P在P_1P_2的延长线上,$|PP_2|=2$,则点P分P_1P_2所成的比是(　).

(A)2；(B)1/2；(C)$-3/2$；(D)$-2/3$.

(5)$\triangle ABC$中,F点分AC为$1:2$,G是BF的中点,E是直线AG与边BC的交点,那么E点分BC的比是(　).

(A)1/4；(B)1/3；(C)2/5；(D)3/8.

(6)连接直角三角形的直角顶点与斜边的两个三等分点,如所得两条线段的长分别是$\sin\alpha$和$\cos\alpha(0<\alpha<\pi/2)$,则斜边的长是(　).

(A)4/3；(B) $3\sqrt{5}/5$；(C) $2\sqrt{5}/5$；(D)5.

2. 是非题(凡结论正确者,在圆括号内标上"√";反之,标上"×". 以后同此,不再解释):

(1)点$P(a,b)$到y轴的距离为a.　(　)

(2)与点$A(-1,-1)$的距离等于5,到x轴的距离等于3的点的坐标为$(-4,3)$或$(2,3)$.　(　)

(3)如$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$C(x_3,y_3)$是三角形的3个顶点,则$\triangle ABC$的面积为:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.\quad (\quad)$$

(4)如点$A(1,5)$与点$B(x,2)$的距离是5,则B点的坐标为$(5,2)$.
(　)

(5)点P分$\overline{P_1P_2}$所成的比——λ的取值范围为一切实数.　(　)

能力训练题一

1. 试求与 $A(32,10)$，$B(42,0)$，$C(0,0)$ 3 点等距离的点的坐标.

2. 等腰△ABC 的顶点是 $A(3,0)$，底边 $|BC|=4$，如 BC 的中点是 $D(5,4)$，试求它的腰长.

3. 已知点 $P(x,1)$ 在 $A(2,-4)$，$B(5,11)$ 两点连成的线段上，试求 x.

4. 试求 $A(-1,2)$ 和 $B(-10,-1)$ 两点连线的三等分点的坐标.

5. 已知△ABC 3 边 AB，BC，CA 的中点分别为 $P(3,-2)$，$Q(1,6)$，$R(-4,2)$，试求三角形的 3 个顶点的坐标.

6. 在平行四边形 $ABCD$ 中，已知两个顶点 $A(-9/2,-7)$，$B(2,6)$ 及对角线交点 $M(3,3/2)$. 试求点 C 和点 D 的坐标.

7. 已知矩形相邻的两个顶点是 $A(-1,3)$，$B(-2,4)$. 如它的对角线交点在 x 轴上，试求另两个顶点的坐标.

8. 已知△ABC 各顶点坐标分别是 $A(4,1)$，$B(7,5)$，$C(-4,7)$. 试求：(1)角 A 的平分线长；(2)角 A 的外角平分线与 CB 延长线的交点 E 的坐标.

9. 如△ABC 的重心为 G，AB 的中点为 D，BC 的中点为 E，且它们的坐标分别为 $G(13/6,-2)$，$D(-5/4,-1)$，$E(11/4,-4)$，试求 A，B，C 的坐标.

10. 试利用定比分点求过 $A(4,1)$，$B(-2,4)$ 的直线与 y 轴交点 P 的坐标.

11. 已知 B 点分 $\overline{AC}$ 所成的比是 $2/3$，试求：(1)B 点分 $\overline{CA}$ 所成的比；(2)A 点分 $\overline{BC}$ 所成的比；(3)C 点分 $\overline{AB}$ 所成的比.

12. 已知 3 点 $A(x,5)$，$B(-2,y)$，$C(1,1)$ 在一条直线上，且 $|AC|=2|BC|$，试求点 A 与点 B 的坐标.

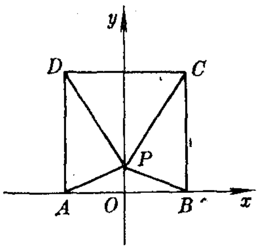

图 1-4

13. 如图 1-4 所示，P 为正方形 $ABCD$ 内一点，$\angle PAB=\angle PBA=15°$.

求证：$\triangle PCD$ 是等边三角形.

答案或提示

基础题 1.(1)C; (2)C; (3)B; (4)C; (5)B; (6)B. 2.(1)～(5)均为×.

能力题 1. $(21,-11)$. 2. $2\sqrt{6}$. 3. $x=3$. 4. $(-7,0)$，$(-4,1)$. 5. $A(-2,-6)$，$B(8,2)$，$C(-6,10)$. 6. $C(21/2,10)$，$D(4,-3)$. 7. $(-9,-3)$，$(-8,-4)$. 8. (1)$10\sqrt{2}/3$；(2)$E(18,3)$. 9. $A(1,2)$；$B(-\frac{7}{2},-4)$；$C(9,-4)$. 10. $P(0,3)$. 11. (1)$3/2$；(2)$-2/5$；(3)$-5/3$. 12. $A(7,5)$，$B(-2,-1)$或$A(-5,5)$，$B(-2,3)$.

1.2 直线的方程

1.2.1 概念剖析

1.2.1.1 直线的倾角与斜率

直线的倾角和斜率虽然都可用来确定直线的方向，但任一条直线都存在(唯一)倾角，而斜率却并不是任一条直线都存在.

1.2.1.2 直线方程

在直线方程的几种形式中，点斜式、斜截式、两点式、截距式都是直线方程的特殊形式. 通过恒等变形都可化为直线方程一般式.

凡二元一次方程都表示直线. 反之，任一条直线的方程必是二元一次方程. 直线和二元一次方程是一一对应的.

1)点斜式：直线点斜式方程虽然经常使用，但并不是所有直线都可用点斜式来表示. 事实上，凡是斜率不存在的直线(与 y 轴平行、重合的直线)无法用点斜式.