SANJIAOZIXIUYUJIAOXUEZHIDAO

三角自修与教学指导

陈 元 亨

湖 北 人 民 出 版 社

三角自修与教学指导

陈 元 亨

湖北人民出版社

三角自修与教学指导

陈　元　亨

湖北人民出版社出版，湖北省新华书店发行

襄阳报印刷厂印刷

787×1092毫米32开本　12.5印张　266,000字

1980年1月第1版　1980年1月第1次印刷

印数：1—28,390

统一书号：7106·1524　定价：1.01元

目　录

第一章　角与弧

§1·1　角的概念　如图1，在一个静止的机轮上观察辐条OA．从OA的位置开始转动，如果一瞬间内该辐条移到OB，这时把α看做是从一个共同的端点O所作出的两条射线所组成的图形，我们把它叫做角．从动的观点来看，“角是由一条射线在平面上绕着它的端点任意旋转而成的图形”．

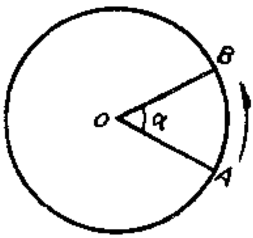

图 1

平面上，一射线，绕原点，任意旋． **水平右向始，角顶是原点．** **逆顺时针分正负，旋转终处角终边．**

由于射线运转的开始，总会有个起处．一般都把水平向右的方向所作出的射线称为角的始边．按“绕原点任意旋”来说，射线OA从水平向右的位置开始向上转动（即逆时针方向转动），称它为“正向”；向下转动（即顺时针方向转动），称它为“负向”；也可以停在原来的水平位置不动，这时就称它为“零”．

我们把射线的原点称为角的顶点，射线在水平右向的位

置称为角的始边，旋转终止时，射线所在的位置称为角的终边．因此，"任意旋"的含意，不但指角的正负，还指角的大小．它可以是各种锐角，或钝角；也可以是直角，平角或周角；还可以是 0，是大于一平角，或大于一周角的任意角．

如果所给定的角只有一个顶点及角的两边，而未指出哪是始边，也未指出它是由什么方向转得的角，更没有指出它是转了多少周之后所得到的角，这时就可把它当作小于 1 周角的正角来看待．一般地说来，它是指有同一始边，同一终边的许许多多的角而言．我们用 $K\cdot360^\circ+\alpha$ 来表示它（其中 K 为整数，α 为小于 1 周角的角）．在图 1 里，设 $\angle AOB=\alpha<90^\circ$，也可用

$$K\cdot360^\circ+\alpha$$

来表示它．

为了便于比较角的大小，通常借助于直角坐标系．把角的始边放在 x 轴的正向上，再看角的终边落在哪一象限里，就说那个角是第几象限的角．如果角的终边恰好落在坐标轴上（无论是在纵轴或横轴上），就叫它是特殊角，或叫它是介于某两象限之间的角．

例 1 把下列各角化为 $K\cdot360^\circ+\alpha$ 的形式（K 为整数，$0^\circ\leqslant\alpha<360^\circ$），并指出它们分别是哪一象限的角？

$$1100^\circ,\ 990^\circ,\ -70^\circ,\ -600^\circ.$$

解 (1) $1100^\circ=3\times360^\circ+20^\circ$ 是第一象限角．

(2) $990^\circ=2\times360^\circ+270^\circ$

或 $990^\circ=3\times360^\circ-90^\circ$，

是介于第三第四象限间的特殊角．

(3) $-70^\circ=-1\times360^\circ+290^\circ$ 或 $0\times360^\circ-70^\circ$，是第四

象限角.

(4) $-600^\circ=-2\times360^\circ+120^\circ$ 是第二象限角

例 2 写出和 -200° 角的终边相同的一切角的形式，并找出其中最小正角的度数来.

解 因 $-200^\circ=-180^\circ-20^\circ$ 或 $-200^\circ=-1\times360^\circ+160^\circ$ 是第二象限角. 可知和 -200° 角的终边相同角的一般形式为

$$K\cdot360^\circ+160^\circ.$$

$\therefore$ 当 $K=0$ 时，其中最小正角是 160°.

§1·2 **弧的概念** 在射线 OA 上任取一点 P (图 2)，则当 OA 旋转时，P 点也随着留下一条痕迹(又称轨迹)，我们称它为"弧". 把 PP' 弧记做 $\widehat{PP'}$. 对应于每个正角或负角的弧，也具有相同的正弧或负弧，因此弧的量数，可用与它对应的圆心角的量数来表示它.

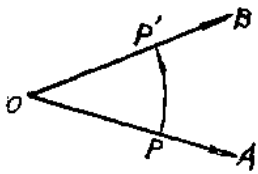

图 2

就小于 1 周的弧来说，弧的长短虽各有不同，但总可用 1 周的几分之几来表示它. 一般是把整个的圆周分成 360 等分，而 1 等分弧所对的圆心角称为 1° 的角，即 1° 角所对的弧就称为 1° 的弧. 当圆心角的大小一定时，其所对弧的度数也是一定的. 弧的度数与其所对圆心角度数一致，而与该圆半径的长短无关. 以1°为单位量角的大小的制度称为角度制.

由于 $1^\circ=60'$，$1'=60''$，因此，角度制又称它为六十分制.

例 3 把 $13^\circ\ 48'\ 45''$ 化为度. 把 0.325° 化为几分几秒.

解 (1) 因 $48' = 60'' \times 48 = 2880''$，则

$13°\ 48'\ 45'' = 13°2925'' = 13.8125°$.

(2) $0.325° = 60' \times 0.325 = 19.5' = 19'30''$.

§1·3 **弧度** 把等于半径长的弧作为1个单位，以这个单位的弧长(一个半径长)所对的圆心角作为1个弧度单位去量角，这种制度称为弧度制.

在一块纸板上画一个半径为 R 的半圆，先把它剪下来，再在另一平面 M 上划一条等于 R 的线段 AB. 把半圆形纸板竖起来，使垂直于平面 M. 将半圆直径的一端点落在 A 点上，把半圆弧顺着 AB 慢慢滚过去，让弧上的每点都落在 AB 上. 看弧上的哪一点最后落在 B点上，就在那里做个记号(如图3上的 P 点). 连 OP，用剪刀顺着 OP 剪下来，则扇形 AOP 的中心角就是1弧度的角.

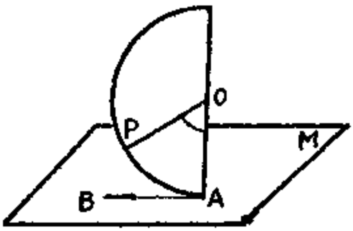

图 3

设圆半径长为 R，圆心角的弧度数为 α，圆心角 α 所对弧长为 l，则 R、α、l 三者的关系式为

$$\alpha\ (\text{弧度}) = \frac{l}{R}，\text{或}\quad l = \alpha R.$$

弧度数乘半径，等于弧长.

由于圆周长 $C = 2\pi R$，则

$$1\text{周角的弧度数}=\frac{2\pi R}{R}=2\pi(\text{弧度}).$$

即 $360^\circ=2\pi$ 弧度.

$\therefore$ $1^\circ=0.0174533$ 弧度.

1 弧度 $=57.295764^\circ$ 或 $57^\circ\ 17'\ 44.8''$，则

$$\pi(\text{弧度})=180^\circ,\quad \frac{\pi}{2}(\text{弧度})=90^\circ,$$

$$\frac{\pi}{3}(\text{弧度})=60^\circ,\quad \frac{\pi}{4}(\text{弧度})=45^\circ.$$

〔注〕 用弧度制表示角或弧时，一般地是将“弧度”二字略去不写.

§1·4 **密位** 把圆周分成6000等分，每一等分所对的圆心角称为1密位的角. 以密位为单位来量角或弧的制度称为密位制.

因6000密位 $=360^\circ$，则1密位 $=3.6'$.

密位的记法是在百位与十位数字之间划一短横“—”. 在战斗时刻，为了清晰地传达口令，往往是在念完百位数字之后，稍作停顿，再继续念出十位与个位数.

例如9密位记做“0—09”，读“零，零九”；

83密位记做“0—83”，读“零，八三”；

400密位记做“4—00”，读“四，零零”.

由于1°角所对的弧长为 $\frac{2\pi R}{360}$，可知1密位所对弧长 $=\frac{2\pi R}{6000}\approx\frac{R}{1000}$ （其中 $\pi\approx3$）. 因此，m 个密位所对弧长 $\approx\frac{mR}{1000}$（其中 $m<3—00$）.

〔注〕 密位这一节的作图，我们一般用近似作图法.

在军事测量中，把测点当作视角的顶点，把测点到所测

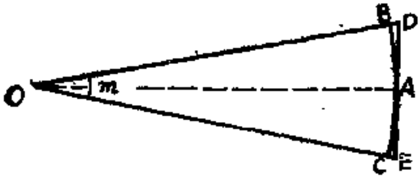

图 4

目标的距离（图 4 中的 OA）作为圆的半径，把目的物附近两点 B、C（或 D、E）作为“间隔”．在视角不大于 300 密位时，战士们常用下述口诀进行心算：

密位不满两、三百，弧长作间隔．   **距离乘密位，间隔一千倍．**

把上述口诀写成公式就是：

$$\text{间隔}=\frac{(\text{密位})\times(\text{距离})}{1000},$$

$$\text{或距离}=\frac{(\text{间隔})\times 1000}{(\text{密位})}.$$

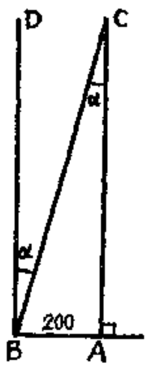

图 5

例 4 在我炮兵阵地 A 的正北，有一敌军目标 C．为了测准敌军与我地的距离，战士从 A 点向西走 200 米到达 B 点，测得 C 在 B 的北偏东 40 密位．求 CA 的距离．

解 在图 5 中，设 AB 是我军阵地，$CA\perp AB$，作 $BD\,/\!/\,AC$，$\angle ACB=\angle DBC=\alpha=40$ 密位．间隔 $AB=200$ 米，求距离 AC．

设 $AC=x$ 米，按“距离乘密位，间隔一千倍”的规律，则

$40x = 200$ 米 $\times 1000$,

$x = 5000$ 米.

即敌军目标 C 离我军阵地 AB 约 5 公里.

例 5 在炮弹射击训练中，测得“敌坦克”高的视角为 0—05 密位. 已知“敌坦克”实高 2.5 米，求“敌坦克”离观测点的距离.

解 已知“敌坦克”高为 2.5 米(即间隔)，视角 $m = 5$ 密位，设距离为 x米，按“距离乘密位，间隔一千倍”的规律，得

$5x = 2.5$ 米 $\times 1000$,

$x = 500$ 米.

即“敌坦克”离观测点约为 500 米.

§1·5 角度、弧度、密位的换算 由于角度的单位是按 1 周角的 $\frac{1}{360}$ 来决定的，而弧度的单位是按 1 周角的 $\frac{1}{2\pi}$ 来决定的，密位的单位是按 1 周角的 $\frac{1}{6000}$ 来决定的. 因此，它们的换算公式为：

$$\frac{D}{180} = \frac{\alpha}{\pi} = \frac{m}{3000}.$$

式中的 D、α、m 分别表示角度数，弧度数和密位数.

〈1〉扇形的弧长与扇形面积的计算公式 扇形是由圆弧的一段和通过这段弧的各端点的两半径所围成的封闭图形. 扇形的弧长可按“弧度数乘半径，得弧长”的公式写做

$l = \alpha \cdot R$ (其中 α 表示弧度数).

如果知道扇形的圆心角是 $n°$，则扇形弧长

$l = \frac{n\pi R}{180}$ (其中 n 是角度数).

如果圆心角 α 为弧度数，则 $S_{扇形}=\alpha R^2/2=R\cdot l/2$.

如果圆心角为 $n°$，则 $S_{扇形}=n\pi R^2/360$.

半弧长乘半径，面积是扇形.

〈2〉线速度与角速度　在旋转着的机轮上的某质点，总是在单位时间内作一定长的圆弧运动的．这种按一定速度旋转的质点，在物理学上称它是作匀速的圆周运动.

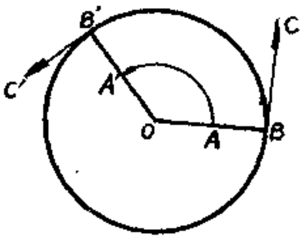

图 6

如图 6，在作匀速圆周运动的⊙O 上，任取一点 B（或 A），则它在单位时间内所经历的弧长，就是该质点的线速度 V．这个 V 是常量．它的方向是 ⊙O 上过该点的切线 (BC) 方向．如果以 R 表示从轴心 O 到 B(或 A) 的距离，T 表示该质点旋转 1 周所需的时间，简称周期 T，f 表示单位时间内所旋转的周数，简称频率 f．线速度 V 的计算公式为

$$V=\frac{2\pi R}{T}, \text{或} V=2\pi Rf. \qquad (1)$$

这里的 $f=1/T$，或 $T=1/f$，即周期 T 和频率 f 是互为倒数的.

由于质点 B 的速度 V 的方向和机轮旋转的方向相同，则它所旋转的距离就是质点 B 所转的弧长．按弧长公式

$$\alpha=\frac{l}{R},$$

可知质点 B 所转过的弧(或角)的弧度数可用角速度 ω 的公式表示如下：

$$\omega=\frac{V}{R}=\frac{2\pi R}{T}\cdot\frac{1}{R},\ 即\ \omega=\frac{2\pi}{T}. \tag{2}$$

也可以说，在时间 T 内旋转 1 周所经历的弧度数是 2π. 如果用 S 表示质点 B 在 t 时间内所经历的角的弧度数，又可写做

$$S=\omega t. \tag{3}$$

由于质点所经历的弧长 l 为 Vt，或 $\frac{2\pi R}{T}\cdot t$，则弧长公式又可写做

$$l=\frac{2\pi R}{T}\cdot t=\omega Rt. \tag{4}$$

例 6 汽轮机轴平均每分钟转 12000 圈，求这轴的角速度(弧度/秒).

解 已知 60 秒钟(即 1 分钟) 转 12000 周，则每 1 秒钟平均转 200 周. 按 1 周角 $=2\pi$，这轴的角速度

$\omega=2\pi\times200=400$(弧度/秒).

范　例

(一) 在大小两圆上分别取 67.5° 和 72° 的圆心角，如果各角所对的弧长是相等的，求这大小两圆半径之比.

解 设在大圆上所取的圆心角为 67.5°，在小圆上所取的圆心角为 72°，如果大圆的半径是 R，小圆半径是 r，按弧长公式可知，

67.5° 的弧长 $l=\frac{3\pi}{8}\cdot R$,

72° 的弧长 $l'=\frac{2}{5}\pi\cdot r$

由于大小两弧的长度相等，则

$$\frac{3}{8}\pi\cdot R=\frac{2}{5}\pi\cdot r,$$

$$\frac{R}{r}=\frac{16}{15}.$$

即大小两圆半径之比为 16:15.

（二）已知地球的半径为 6370 公里．武汉市地处东经 114°18′北纬 30°35′．河南开封在武汉的正北方约 476 公里．怎样推算开封市的经度和纬度？

解　把通过地球南北极的经圈当作一个圆圈，把地球的半径当作经圈的半径，则

经圈一周的长度为 $2\times6370\pi$ 公里，

纬差 1° 的两地距离为 $\frac{\pi}{180}\times6370$ 公里，

已知武汉开封相距 476 公里，则两地纬差为

$$476\div\left(\frac{\pi}{180}\times6370\right)=4.284°=4°17'.$$

由于开封在武汉的正北，可知两地经度是相同的，而开封的纬度为 30°35′+4°17′．∴ 开封是在东经 114°18′，北纬 34°52′ 处．

（三）用白铁皮做一个圆锥形的漏斗，其口径为 24cm．由漏斗尖端到漏斗口的母线长为 15cm．求它的展开面的面积和展开面的中心角的度数．并画出这展开面的图形．

解　因漏斗的口径为 24cm，则它的半径 $r=12$cm，漏斗口的周长为 $2r\pi=240\pi$ (mm)．