# 1980—1984

# 高考数学试题解法分析

1980—1984 Gaokao Shuxue Shiti Jiefa Fenxi

钟 集 陈云烽 关 红

广 东 科 技 出 版 社

**1980—1984**

**高考数学试题解法分析**

钟 集 陈云烽 关 红

广东科技出版社出版
广东省新华书店发行
韶关新华印刷厂印刷
787×1092毫米 32开本11.25印张 180,000字
1986年6月第1版 1986年6月第1次印刷
印数1— 17,000册
统一书号7182·100 定价1.55元

# 出版说明

本书是1980—1984年全国高等学校统一招生考试数学试题的解答和解题分析，分别由钟集、陈云烽、关红同志撰写。

1981、1982、1984年，我们曾分别出版了当年的《全国高考试题解法分析》，内容主要包括数学、物理、化学等科的试题解答与解题分析．出书后，颇受读者欢迎．为适应准备参加高考的学生复习需要，我们除继续出版《1985全国高考试题解法分析(数学・物理・化学・生物)》外，还按教育部《关于颁发高中数学、物理、化学三科两种要求的教学纲要的通知》精神和新编课本内容，对上述各书作必要的修订，并约请有关同志撰写1980年和1983年试题解法分析，分科汇编成《1980—1984高考数学试题解法分析》、《1980—1984高考物理试题解法分析》、《1980—1984高考化学试题解法分析》，陆续出版．

本书的重点是解题方法的分析．对每年试题，都按试题的顺序分题予以阐述．在给出每道试题的答案(包括不同解法的答案)的同时，着重阐述解题的思路、解题时应注意的问题和易犯的错误及原因，力图从思路分析和错误分析两方面，向读者提供解题方法技巧的有益启发．这些分析的内容，既注意到中学数学教学的实际，又结合了高考评卷的情况，便于读者学习领会和吸取经验教训．

我们希望本书有助于青年学生掌握正确的学习方法和解

题方法，有助于提高中学数学教学的质量.

本书适合高中学生和自学青年阅读，也可供中学教师教学时参考。

# 目　　录

# 1980年理工农医类试题解答与分析

关　红　撰写

## 第　一　题

**（本题满分6分）**

将多项式$x^5y-9xy^5$分别在下列范围内分解因式：

（1）有理数范围；（2）实数范围；（3）复数范围。

【审题与分析】

把多项式在某个范围内分解因式，就是把多项式表示为若干个因式的积，每个因式都属于这个指定的范围，而且在这个范围内不能再分解。本题要求把一个多项式分别在三个范围内分解因式，因此分解后的三个结果的形式是不同的。

【解】（1）$x^5y-9xy^5$

$$=xy(x^4-9y^4)$$

$$=xy(x^2+3y^2)(x^2-3y^2);$$

（2）$x^5y-9xy^5$

$$=xy(x^2+3y^2)(x+\sqrt{3}y)(x-\sqrt{3}y);$$

（3）$x^5y-9xy^5$

$$=xy(x+\sqrt{3}yi)(x-\sqrt{3}yi)(x+\sqrt{3}y)(x-\sqrt{3}y).$$

【容易出现的错误】

不明确有理数、实数和复数的概念，因而不能在规定的范围进行因式分解。

## 第 二 题

（本题满分6分）

半径为1，2，3的三个圆两两外切。证明：以这三个圆的圆心为顶点的三角形为直角三角形。

【审题与分析】

这道几何题没有给出图形，证题时可先按题目条件作图，然后根据图形作分析证明．题目给出了三个圆的半径和这三圆两两外切，但没有规定三个圆的相对位置，因此图形可作成如图1所示的两种：

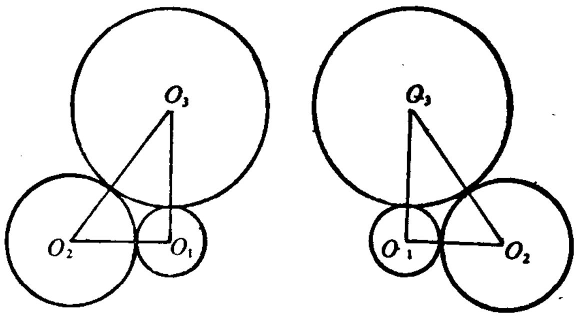


图 1

本题要求证明$\triangle O_1O_2O_3$为直角三角形．从图1可以看出，这个三角形的每条边都是两圆的圆心距，因此三边之长可根据两外切圆的圆心距等于两圆半径之和求出．如果三边长符合勾股定理，便证明了$\triangle O_1O_2O_3$是直角三角形，如证法一；用三边之长代入余弦定理，如果求出$\triangle O_1O_2O_3$有一个直角，也使本题得证，如证法二。

【证明】 证法一

设$\odot O_1$，$\odot O_2$，$\odot O_3$的半径分别为1，2，3．因这三个圆两两外切，故有

$$O_1O_2=1+2=3,$$
$$O_2O_3=2+3=5,$$
$$O_3O_1=3+1=4,$$

则有 $O_1O_2^2+O_3O_1^2=3^2+4^2=5^2=O_2O_3^2$.

根据勾股定理的逆定理，$\triangle O_1O_2O_3$为直角三角形．

证法二

先求出$O_1O_2=3$，$O_2O_3=5$，$O_3O_1=4$，根据余弦定理，有

$$\cos\angle O_1=\frac{O_2O_3^2-O_1O_2^2-O_3O_1^2}{2O_1O_2\cdot O_3O_1}=0,$$

$\because$ $0<O_1<180°$，$\therefore$ $\angle O_1=90°$，故$\triangle O_1O_2O_3$为直角三角形．

【容易出现的错误】

（1）由于没有充分利用题设条件（三个圆两两相切）去求三角形各边之长，因而无法进行证明．

（2）求出三边长之后，用勾股定理验证三角形是否直角三角形时，没有考虑到直角三角形斜边最长，可直接以两短边的平方和与最长边的平方作比较，而是逐一计算任意两边的平方和再进行比较，既费时间，又造成了计算上的错误．

## 第 三 题

**（本题满分10分）**

用解析几何方法证明三角形的三条高线交于一点．

【审题与分析】

三角形的三高线交于一点，是中学生熟悉的平面几何问题，但本题要求用解析几何方法证明，因此本题如果用平面

几何方法去证明，是不符合题目要求的。

用解析几何方法证明本题的步骤是：

（1）建立坐标系。如何建立坐标系是证题的关键，坐标轴、原点的位置选择得恰当，可使解题的过程简便。例如，以三角形的一边所在的直线为$x$轴，以这边上的高所在直线为$y$轴，这样，三角形就有两个顶点在$x$轴上，它们的纵坐标为0，另一顶点在纵轴上，它的横坐标为0，这就使以后的计算简便多了。

（2）求三高线的方程。方法可以是：先确定三角形三个顶点的坐标，然后利用直线两点式方程求出三角形三边的方程；进而根据两条互相垂直的直线的斜率的积为$-1$，利用三边的直线方程分别求出三高线的斜率；最后由已知的顶点和斜率分别求出三高线的点斜式方程。

（3）证明三高线共点。可以先求出两条高线的交点坐标，即求出二高线方程组的解，然后讨论交点坐标的特点，说明它必在第三条高线上（如证法一）。还可以将高线方程表为如下形式：

$$A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0,$$
$$A_3x+B_3y+C_3=0.$$

若
$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}=0,$$

则三高线共点（如证法二）。

【证明】 证法一

取$\triangle ABC$最长的一边$BC$所在的直线为$x$轴，经点$A$的高

线为$y$轴，设$A$，$B$，$C$的坐标分别为 $A(0, a)$，$B(b, 0)$，$C(c, 0)$。

根据所选坐标系（如图2），有$a>0$，$b<0$，$c>0$。

$AB$的方程为 $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$，其斜率为$-\frac{a}{b}$；

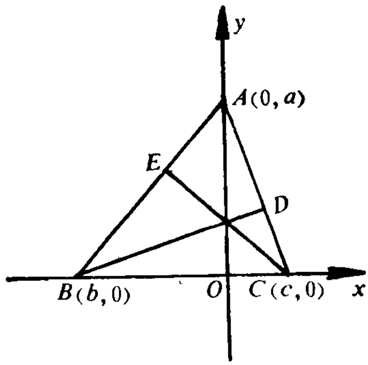


图 2

$AC$的方程为 $\frac{x}{c}+\frac{y}{a}=1$，其斜率为$-\frac{a}{c}$。

高线$CE$的方程为

$$y=\frac{b}{a}(x-c); \tag{1}$$

高线$BD$的方程为

$$y=\frac{c}{a}(x-b). \tag{2}$$

联立方程(1)、(2)得

$$(b-c)x=0,$$

$$\because\ b-c\neq0,\ \therefore\ x=0.$$

这就是说，高线$CE$，$BD$的交点的横坐标为0，即交点在高线$AO$上。因此，三条高线交于一点。

证法二

取△$ABC$的顶点$A$为坐标原点，过原点平行于$BC$边的直线为$x$轴，$BC$边上的高为$y$轴(如图3)。设顶点$A$，$B$，$C$的坐标分别为$A(0,\ 0)$，$B(b,\ h)$，$C(c,\ h)$。

$AB$方程为 $\frac{y}{x}=\frac{h}{b}$，斜率为$\frac{h}{b}$；

$AC$方程为 $\frac{y}{x}=\frac{h}{c}$，斜率为$\frac{h}{c}$；

$BC$方程为$y=h$。

高线$CE$方程为

$$y-h=-\frac{b}{h}(x-c),$$

即
$$\frac{b}{h}x+y-h-\frac{bc}{h}=0;$$

高线$BD$方程为 $y-h=-\frac{c}{h}(x-b)$，即

$$\frac{c}{h}x+y-h-\frac{bc}{h}=0;$$

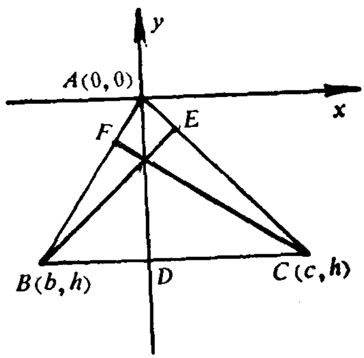

图 3

高线$AF$的方程为

$$x=0.$$

因为行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{b}{h} & 1 & -h-\frac{bc}{h} \\ \frac{c}{h} & 1 & -h-\frac{bc}{h} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

所以三高线共点.

【容易出现的错误】

（1）采用证法一时，没有说明是取$\triangle ABC$最长边所在直线为$x$轴. 这是不完整的，因为当$BC$边不是$\triangle ABC$中的最长边时，就会出现$\angle B$，$\angle C$可能是直角或钝角的问题. 这样就必须分$\angle B$，$\angle C$是锐角、直角或钝角各情形进行讨论，而证法一（在$x$轴上的不是$\triangle ABC$最长边）就不能包含各种情形的证明了. 例如，当$\angle B$是直角时，则$B$点的横坐标$b=0$. $AB$的方程就不能表为$\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$，而是$x=0$（即$y$轴）.

（2）证法一中，由三角形顶点$B$，$C$不重合，且都在$x$轴上，故$b\neq c$. 由$b-c\neq 0$可知方程$(b-c)x=0$只有零解：$x=0$. 有的考生在解答过程中没有说明$b-c\neq 0$，而直接得$x=0$，这是不完整的.

## 第　四　题

**（本题满分10分）**

证明对数换底公式：$\log_b N=\frac{\log_a N}{\log_a b}$　（$a$，$b$，$N$都是正数，$a\neq 1$，$b\neq 1$）.

【审题与分析】

证明本题时，令换底公式的左端为$x$，即

$$\log_b N=x, \tag{*}$$

只要证明$x$等于换底公式的右端就行了.

根据对数的定义，把对数式（*）转换为指数式，然后两

边取对数(以$a$为底),并根据对数运算法则对等式进行整理,求出$x$的表达式恰好是换底公式的右端,本题便可得证.证明过程如证法一.

式(*)转换为指数式后,根据对数的定义:$a^{\log_a N}=N$,可把指数式的两端都表为以$a$为底的幂.根据底数相同(底数$a\neq1$)的幂相等时它们的指数相等,可得到含$x$的等式,再由此求出$x$的表达式,这表达式就是换底公式的右端.这便是证法二.

【证明】 证法一

令$\log_b N=x$.根据对数定义,

$$b^x=N。$$

两端取以$a$为底的对数,得

$$\log_a b^x=\log_a N,$$

$$x\log_a b=\log_a N.$$

$\because$ $b\neq1$, $\therefore$ $\log_a b\neq0$.

$$\therefore\quad x=\frac{\log_a N}{\log_a b},$$

$$\log_b N=\frac{\log_a N}{\log_a b}.$$

证法二

令$\log_b N=x$,根据对数定义,

$$N=b^x$$

$$=(a^{\log_a b})^x=a^{x\log_a b}$$

又$\because$ $N=a^{\log_a N}$,

$\therefore$ $x\log_a b=\log_a N$,

$\because$ $b\neq1$, $\therefore$ $\log_a b\neq0$,

$$\therefore\quad x=\frac{\log_a N}{\log_a b},$$

$$\log_b N=\frac{\log_a N}{\log_a b}.$$

【容易出现的错误】

（1）对数式转换为指数式时出现错误．例如，由 $\log_b N=x$ 得到 $N^x=b$．这是没有掌握对数的定义的缘故．

（2）不熟悉两个同底（不为 1 的正数）的幂相等，则两指数相等的法则，在证法二中没能得到等式

$$x\log_a b=\log_a N,$$

使证明无法继续下去．

（3）在证法一、二中，都必须说明由于 $b\neq 1$，$\log_a b\neq 0$，所以有

$$x=\frac{\log_a N}{\log_a b}. \qquad (*)$$

如不加说明就得到式（*）是不正确的．

## 第　五　题

**（本题满分10分）**

直升飞机上一点 $P$ 在地平面 $M$ 上的正射影是 $A$．从 $P$ 看地平面上一物体 $B$（不同于 $A$），直线 $PB$ 垂直于飞机窗玻璃所在的平面 $N$（如图 4）．证明：平面 $N$ 必与平面 $M$ 相交，且交线 $l$ 垂直于 $AB$．

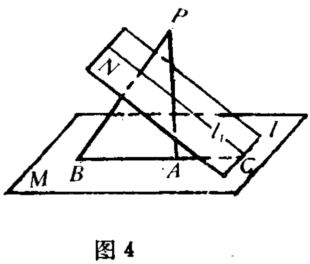

图 4

【审题与分析】

本题要求证明两个问题，一是平面 $N$ 与平面 $M$ 相交，二是这两个平面的交线 $l$ 垂直于 $AB$．

证明第一个问题有两种方法：一种是反证法，若平面$N$与平面$M$平行则会导致直线$PB\perp$平面$M$，与题设矛盾，如证法一；另一种方法是先证明平面$M$上的直线$AB$与平面$N$有一个交点，从而推证平面$M$与平面$N$相交于一直线，如证法二。

证第二个问题时，可证直线$l$垂直$PA$和$PB$所决定的平面；也可直接利用三垂线定理的逆定理证明。

【证明】 证法一

用反证法．假如平面$N$与平面$M$平行，则$PA$也垂直于平面$N$，因此$PA$与$PB$重合，$B$点与$A$点重合，但这与题设矛盾．所以平面$N$与平面$M$相交．

设平面$M$与平面$N$的交线为$l$.

∵ $PA\perp$平面$M$，

∴ $PA\perp l$；

又∵ $PB\perp$平面$M$，

∴ $PB\perp l$.

∴ $l\perp$平面$PAB$，

故 $l\perp AB$.

证法二

∵ $PB\perp$平面$N$，∴ 平面$N$与平面$PBA$必相交，设交线为$l_1$.

在平面$PBA$上，$PB\perp l_1$，且$PB$不垂直于$AB$，故$l_1$与$AB$必相交，设交点为$C$.

$C$在$l_1$上，是平面$N$的点；$C$又在$AB$上，是平面$M$的点．故平面$M$与平面$N$相交，设交线为$l$.

∵ $PB\perp$平面$N$，

∴ $PB\perp l$.

$AB$是$PB$在平面$M$的射影，根据三垂线定理的逆定理可知

$$l \perp AB.$$

【容易出现的错误】

(1)在证法二中，没有说明$l_1$必与$AB$相交，答案不完整。因为$l_1$与$AB$在同一平面上，$l_1 \perp PB$，而$AB$不垂直于$PB$，所以$AB$与$l_1$不平行，故必相交。

(2)在运用三垂线逆定理证明第二个问题时，没有指出$AB$是$PB$在平面$M$上的射影。

## 第 六 题

**（本题满分12分）**

设三角函数$f(x)=\sin\left(\frac{kx}{5}+\frac{\pi}{3}\right)$，其中$k \neq 0$。

(1)写出$f(x)$的极大值$M$、极小值$m$与最小正周期$T$；

(2)试求最小正数$k$，使得当自变量$x$在任意两个整数间(包括整数本身)变化时，函数$f(x)$至少有一个值是$M$与一个值是$m$。

【审题与分析】

(1)本题可以与三角函数$F(y)=\sin y$作比较而求出答案。

因为$F(y)$与$f(x)$中三角函数的系数均为1，而$F(y)$的极大值为1，极小值为$-1$，所以$f(x)$的极大、极小值也分别为1与$-1$。

$F(y)$的最小正周期为$2\pi$，即自变量每增加$2\pi$，函数值重复出现，所以自变量$\frac{kx}{5}+\frac{\pi}{3}$也是每增加$2\pi$，函数$f(x)$

的值重复出现。

$$\because \quad \frac{kx}{5}+\frac{\pi}{3}+2l\pi=\frac{k}{5}\left(x+\frac{5}{k}\cdot 2l\pi\right)+\frac{\pi}{3}$$

$$(l=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$$

所以自变量$x$每增加正数$\frac{10}{|k|}\pi$，函数$f(x)$的值重复出现一次，因此$\frac{10}{|k|}\pi$是$f(x)$的最小正周期。

(2)因为$f(x)$的极大、极小值在每个周期中恰好出现一次，所以只要使周期$T$小于或等于1，就能使自变量$x$在两个整数之间变化时，$f(x)$的值至少有一个是$M$与一个是$m$。再由$T$与$k$的关系便可求出符合题意的$k$值。

【解】

(1)$M=1$，$m=-1$，

$$T=\frac{5\times 2\pi}{|k|}=\frac{10\pi}{|k|};$$

(2)$f(x)$在它的每一个周期中都恰好有一个值是$M$与一个值是$m$。

而任意两个整数间的距离都$\geqslant 1$。因此要使任意两个整数间函数$f(x)$至少有一个值是$M$与一个值是$m$，必须且只须使$f(x)$的周期$T\leqslant 1$，即

$$\frac{10\pi}{|k|}\leqslant 1,\quad |k|\geqslant 10\pi=31.4\cdots.$$

可见，$k=32$就是这样的最小正整数。

【容易出现的错误】

(1) 误认为$f(x)$是正弦函数，它的周期一定是$2\pi$。

(2) 题目给出$k\neq 0$，$k$可以是正数，也可以是负数。因