

(平面几何)

ZHONGXUE SHUXUE JIAOXUE WENXUAN

ZHONGXUE SHUXUE JIAOXUE WENXUAN

中学数学 教学文选

中学数学教学文选

(平面几何)

吴启贵 陈 尧 刘瘦侠 选编

上海教育出版社

中学数学教学文选

(平面几何)

吴启贵 陈 尧 刘瘦侠 选编

上海教育出版社出版

(上海永福路 123 号)

新华书店上海发行所发行 上海商务印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 10.375 字数 228,000

1986 年 3 月第 1 版 1986 年 3 月第 1 次印刷

印数 1-2,900 本

统一书号: 7150·3114 定价: 1.35 元

前 言

近年来,中学数学的教学和研究,取得了很大的成果。有关这方面的论文,散见于各种中等数学及各省市的教育期刊上,不下数万篇。中学数学教师和数学教研人员,普遍感到,要在浩繁的卷帙中,找到自己急需的参考文章,决非易事。为了满足这些同志的需要,我们遴选了具有代表性的文章,按照中学数学的内容分科编集。本书是平面几何专集。

所谓代表性,有两层意思:一是文章的内容比较全面、深入、具体;二是介绍的经验别人能学到手,在日常教学中用得上。所选文章,在本书中的编排顺序是:入门教学和各章教学;能力培养;有关史料。这一切,都是为了提高本书的实用价值。

在选编过程中,基本上保持了各篇文章的原貌,仅纠正了一些明显的差错,和作了若干文字的润色。极少数的,因为篇幅较大,某些内容离教学实际较远,删去又不太影响全文的主题,我们便忍痛割爱了。相信作者和读者,都是能谅解的。有的文章,摘引教材中的例题与习题时,只引页码与题号,由于教材变化,读者难以对照,因此,我们都换上该题的全文。

因为是文选,反映的自然是一家之说,读者应该结合自己的实际情况,择善而从。可以参考借鉴,不要生搬硬套。

编者水平有限,加上成书时间仓促,会有一些疏漏、差错,祈盼专家、读者,不吝指正。

编 者

一九八四年十二月

目 录

浅论平面几何的入门教学	1
平面几何起始课教学的几点做法	18
在平面几何教学中如何引导学生入门的点滴体会	29
平面几何入门教学谈	37
重视推理论证的启蒙教育	45
平面几何中“三角形”教学的体会	52
“三角形”一章的教学体会	68
利用拼图法进行全等三角形教学的尝试	72
平面几何中“四边形”教学的体会	76
平面几何中“相似形”的教学	95
“相似形”一章教学的粗浅体会	107
关于“相似形”的教学	113
圆的教学浅谈	124
加强图形剖析,提高学生证、解几何题的能力	131
浅谈相交弦定理和切割线定理的教学	138
对初中平几复习的几点看法	143
初中平面几何总复习概要	150
谈平面几何教学中逻辑推理能力的培养	182
浅谈在平面几何教学中看图能力的培养	189
添辅助线的技巧	200
“添置辅助线”的教学体会	213
添辅助线中的数量关系和位置关系	218

圆中常用的辅助线	221
浅谈辅助圆的作用	226
谈“辅助圆”的添作	230
略谈有关比例线段的证明	235
“线段的二次等式”的证明	243
平面几何定值问题解法探讨	248
平面几何中定值问题的教学	257
平面几何问题的面积证法	264
“相似形”一章中三个定理的面积证法	271
平几例题的选择和剖析	274
浅谈平面几何练习题的编选	279
谈几何题的演变	286
几何证明中常见的逻辑错误	297
几何证明中的一些典型错误	309
“几何”一词及其他	316
罗巴切夫斯基与非欧几何	322
圆周率的名称及其符号	325

浅论平面几何的入门教学

江苏省常州市中学数学教学研究会

(常州市教育局教研室 杨裕前执笔)

几年来,初中平面几何教学中严重的两极分化,已对整个数学教学产生了重大的影响,造成这种分化的原因是多方面的,除了教育和教学思想、学生的学习目的性和学习方法、师资水平……等这种“共性”因素外,还有平几教学自身的原因,其突出的表现为“入门教学难”。

这里所说的“平几入门教学”是指“基本概念”、“相交线和平行线”、“全等三角形”的教学。平几入门教学有很多特点:在研究对象上,它从“数”转入“形”,使中学数学进入了新的领域,而学生对识图、作图以及形的变式和变换都比较陌生;在数学语言上,也随之从表达“数及其运算”转入表述“形及其位置关系”,这种几何语言更为准确、简练、严谨,这与学生的语文基础知识又存在着脱节现象。此外,入门教学阶段概念不可避免地大量出现,而几何概念的形成又往往要经直观现象、形象抽象和本质抽象几个阶段。在研究方法上,它从以“运算为主”转入以“推理为主”,抽象思维的要求更高且没有固定的“程式”。

另外,从初二学生的生理、心理特征看,他们感知事物往往不精确,不易抓住本质特征,这将对概念教学产生直接的影响;他们记忆知识仍以机械记忆为主,抽象思维的能力较弱,这将造成推理教学的困难;他们的兴趣比较广泛,但很不稳定;

他们的意志表现为越来越多的“独立性”，他们常常愿意思考问题，但是刻苦钻研、坚韧不拔的优秀品质尚未形成，常常会“知难而退”，而平几教学的“分化点”出现得又较早，因而大面积的两极分化就可能在早期形成。

为防止、减少平几教学中的两极分化，从1982年起，我们逐步深入地进行了“平几入门教学”的专题研究，在大面积提高教学质量、以教育理论为指导探索平几入门教学规律等方面，取得了初步的成效。

我们认为，平几入门教学应着力解决好两大问题：一是如何培养学生的学习兴趣，帮助他们确立学好平几的自信心；二是如何使学生较快地适应平几教学在研究对象和方法上的转变，相应地实现学习方法的转变，从而克服由此而来的概念、图形、语言、推理这几方面的困难。

关于培养学生学习平几的兴趣

学习兴趣是学习动机的重要心理成份，培养兴趣是激发学习动机的重要手段。

第一，学生开始学习平几时，如果只是让他们接触些抽象的名词和概念，就会觉得索然无味，陌生难懂，就会对平几学习产生畏惧心理。针对这一情况，我们从一开始就注意培养他们浓厚的学习兴趣，注意上好“引言课”（预备课）。

这几年，我们结合教材和学生实际，编写了预备课材料。其内容包括：1. 简要介绍平几发生和发展史；2. 选编一些学生在日常生活中熟悉的、有一定趣味性的、与平几知识有联系的问题，让学生动手实验解决，使他们在潜移默化中接触一些基本概念和基本方法；3. 设计一些会产生视错觉的几何图形，让

学生观察,使他们在错误的判断中,懂得学习平几既要“看图”更要“讲理”,以防止小学形体知识教学中注重直观,但没有也不可能讲究推理,而对中学平几教学可能产生的负迁移;4.让学生欣赏图案,体会几何图案的美,由学生自己用作图工具画漂亮的图案。

预备课的教学,可以普遍提高学生学习平几的兴趣和信心(据一九八二、一九八三年十月份调查,92%的学生对平几学习有兴趣,90%的学生有信心),当然,这种兴趣有待于巩固和提高,并使之逐步趋于稳定,转化为“志趣”。

第二,教学要求适当是培养学生学习兴趣,增强学生学习信心,大面积提高平几教学质量的根本。

心理学认为:学生总是对能胜任的任务越来越感兴趣。事实上,脱离了学生实际,不适当地“高要求”,只能使一部分学生难以形成新的学习需要,从而丧失兴趣和信心,人为地加剧两极分化。

我们所说的“要求适当”并不是降低要求,恰恰是以课本的要求为准。这两年,我们在入门阶段的教学进度安排上,坚持先慢后快;在教学内容的处理上,尽量减小坡度;在双基的要求上,力求扎实一点,在课堂教学中,力求使每一个学生都能听懂学会,并能解决一、两个问题,使学生经常在适时的知识反馈中得到成功的体验,意识到自己学习上的进步并受到鼓励。这样,就能不断使学生增强学习兴趣和信心,产生新的“自我要求”,从而成为进一步学习的“有效诱因”,形成“爱学——学懂——更爱学”的良性循环,这无疑是平几教学取得成功的重要因素。

第三,把教学内容同实际联系起来,“就近取譬”,不仅可以使学生感到几何知识与日常生活有密切联系、有趣,而且也

• 有助于学生的理解与掌握。

例如,讲“线段”的概念,可以用“两个村庄(仓库)之间造一条直路”作譬,用“四个村庄(工厂)每两个村庄(工厂)间要造一条直路,共要造几条路”来引导学生识图。又如,教“点到直线的距离”概念,可以要求学生结合自己的实际体验举例说明,有的学生就举了“测量跳远成绩时,要使皮尺和踏跳线垂直”的例子,既确切又生动有趣。这样不仅有助于解决概念教学枯燥的问题,也有助于学生正确地理解掌握几何概念。

第四,精心设计和使用简易教具,也有利于激发学生的兴趣,调动学生的学习积极性。

例如,讲三角形(按角)分类时,可以先做好锐角、直角、钝角三角形纸片各一张,然后取出一张,出示其一个锐角(遮住其余部分),问学生能否判断它是什么三角形?出示一个钝角(或直角),又能否判断?

另外,也可以利用教具的演示,进行一些简单的图形变换。例如用竹针和橡皮泥顺次搭成图1(1)~(5),学生就较容易得到证明图1(6)中 $\angle BOC > \angle A$ 的方法,而用形似图1(3)的两个图形拼合成图1(7),即得另一种证法。这样,不仅使学生的好奇心(也是一种求知欲)得到满足,产生较高的学习热情,而且又渗透了图形的迭合、拼合等方法,有助于学生分析推理能力的提高。

第五,选择适当的教学内容,在课堂上启发学生自己去探索,也是培养学生兴趣,增强学生信心的重要方法。

如“多边形”这节内容,我们让学生从观察图形入手,自己给有关概念下定义,由具体到抽象,归纳有关结论,效果就较好。这种探索、概括的过程,实质上就是学生对感知进行由表及里的加工,扬弃非本质因素,抽取出本质要素的过程。一

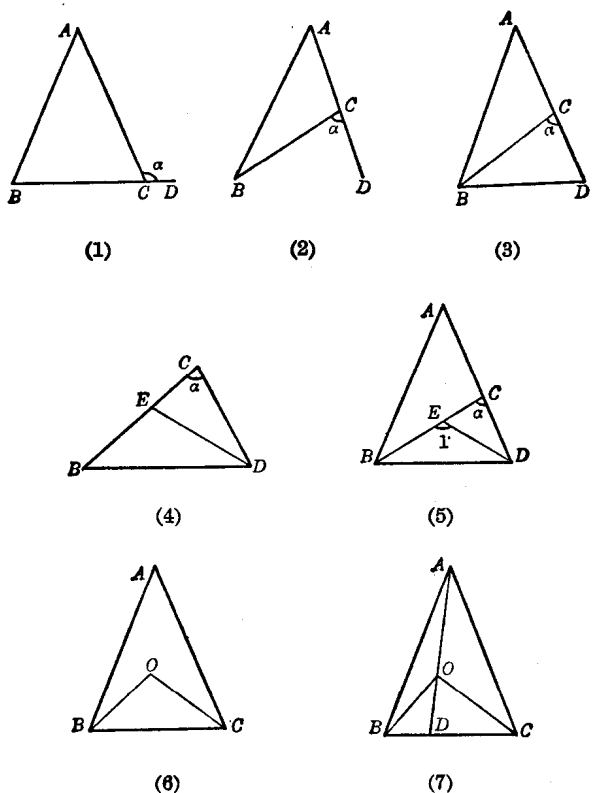


图 1

旦学生获得了概括的知识,不仅使他们受到激励,对学习产生乐趣,而且也使知识向能力转化成为可能。据这堂课后的调查,84%的学生反映喜欢这样上课。他们说:“先由自己总结(得出)定义,让我们自己去探索规律,再去看书,这样不仅很有趣,而且(所学知识)印象深刻,全记在脑子里。”

第六,随着教学内容的深入,鼓励学生大胆猜想,一题多解(证),一题多变,也是培养学生学习兴趣的有效途径。

当然,入门教学阶段采用这样的方法时,一般应注意两点:一是要以课本为要求,难度不要大;二是不宜过多地采用此法,更不能作为“硬性”的要求,以保护包括中等以下学生在内的全体学生的积极性。

关于概念、图形、语言、推理的教学

一、关于概念教学

概念作为平凡知识的基础,是形象思维过渡到抽象思维的第一要素,正确理解和运用概念进行判断,才能正确地进行推理论证。

第一,在平凡入门教学中,如何处理概念多而集中的矛盾?

概念多,这是平凡入门教学的一个特点。教学这些概念时,应根据各个概念的特点及其对后续教学影响的大小,区别对待,做到有轻有重,突出重点。

对于那些只加描述的原始概念,如直线、点等图形名词;连结、截取、延长等画图术语;相邻、同旁等表示位置关系的词语;以及任意长等表示数量关系的名词,教学时要结合实例让学生多加“意会”,一般不作过多的“言传”。但是,对于表示画图动作的术语,应要求学生听懂会画;对于表示位置关系的词语,要求学生结合图形,搞清词义。

诸如端点、角的边和顶点,平角、周角、直角……等概念或概念名称,可以随教学内容的深入而转化为常识,因此,它们不是教学的重点。

对于那些基本的、常用的重要概念,如角平分线、对顶角、余角、补角、垂线、平行线、两点间距离、点到直线的距离等,由

于它们对后续教学影响大,所以必须要求学生在理解的基础上,能记忆,会表达;在掌握概念本质的基础上,能正确运用。

第二,入门阶段概念教学的重点是什么?

从学生对概念的理解、记忆、表述、运用等几方面看,他们往往在表述和运用上的困难较为明显,概念的记忆则往往偏重于背诵,以为能背就算懂了,因而在概念的理解上不易达到概念的本质抽象,且这种毛病又往往不显露,这将给推理教学造成很大的障碍。

因此,概念的教学,首先要使学生对概念所描述的对象有丰富的感知,并结合图形的变式,引导学生把感知精确化;进而通过概念的语言叙述、图形表示、式子表达的互译训练,使学生熟悉运用概念进行判断推理的方法,这才是概念教学的重点。

第三,如何搞好概念的教学?

1. 由于初中学生的思维仍以形象思维为主,因此,概念教学必须联系实际,丰富感知,即要利用实物、教具、图形等多种形式,通过看、画、写、说、想等多种联系通道,让学生的眼、耳、手等多种感官,同时参加识记概念的活动,以强化进入大脑的信息。

2. 直观是领会知识的起点,不是终点。因此,在丰富感知的基础上,必须加强对概念本质属性的刺激强度,引导学生把感知精确化。例如,讲“点到直线的距离”时,在由借助实例的直观形象过渡到图形的形象抽象后,着力讲清它与“垂线”及“两点间距离”这两个概念的区别及联系,从而揭示其本质是“点到垂足之间线段的长度”,并强化其中“长度”两字的刺激(这是距离概念中的弱刺激成分)。又如“互为补角”的概念中,“ 180° ”及“两个”角对学生的刺激,前者强烈,后者较弱。为

此,可运用反例“ $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$,那么 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ 互为补角吗?”“ $\angle AOB = 180^\circ$, $\angle AOB$ 是补角吗?”等,以此反衬这个概念的本质属性。

3. 加强概念的文字语言、图形(包括变式图形)和符号语言的三结合训练,使学生在概念学习时的第一信号系统(图形的感知认识)和第二信号系统(语言、文字)之间建立起准确的、牢固的联系,并在概念的运用中,逐步使学生牢固地掌握概念。

由于概念的定义是“相称的”,因而运用时就具有“判定”和“性质”两种作用。我们在早期的概念教学中,就要求学生根据定义画出图形,并结合图形进行简单的推理训练。例如:“ $\because \angle \alpha + \angle \beta = 90^\circ, \therefore \angle \alpha$ 与 $\angle \beta$ 互为余角”,“ $\because AB \perp CD$, O 为垂足, $\therefore \angle AOD = 90^\circ$ ”等,这种训练既有利于学生理解、巩固概念,又是一种运用概念进行推理的渗透。

随着概念的增多,学生对“互余”与“互相垂直”、“互补”与“平角”、“等量代换”与“三线平行定理”等等这些本质不同的“类似”概念,会发生混淆。因此要针对学生的错误,选编一些练习,以帮助学生在运用中正确区分这些概念。

4. 适时地进行概念的分类、归纳。如有关“角”的概念很多,其中按一个角的大小定义的有平角、直角、周角、锐角、钝角等;按两个角的大小关系定义的有互为余角、互为补角等;按两个角的位置定义的有对顶角、同位角、内错角、同旁内角、邻角等。通过复习使学生条理清楚,概念清晰,逐步形成较完整的概念系统。

二、关于图形教学

图形教学包括识图和作图两部分。

(一)识图与概念教学不可分割,正确的识别图形(特别是

复杂图形和变式图形)又是正确进行推理的前提。因此,识图教学是平几入门的关键之一。

所谓“识图”,就是要认识表示概念的图形的本质特征,分清表示相关或类同概念的图形间的联系与区别,并进而能识别复杂图形和变式图形。学生的这种识图能力的培养,应从一开始就十分重视。

1. 首先要加强基本图形教学,并按由简到繁,由基本到复杂的顺序进行教学。

例如,教学线段、角的概念,应让学生有条不紊地说出图2(1)中有几条线段?图2(2)中有几个角?再让学生观察图2(3)中 $\angle AOC$ 与 $\angle BOD$ 的关系,并练习:如果 $\angle AOB = \angle COD$,那么 $\angle AOC$ $\angle BOD$ 。

这样,在三角形全等的证明中,学生就容易识别图2(4)、

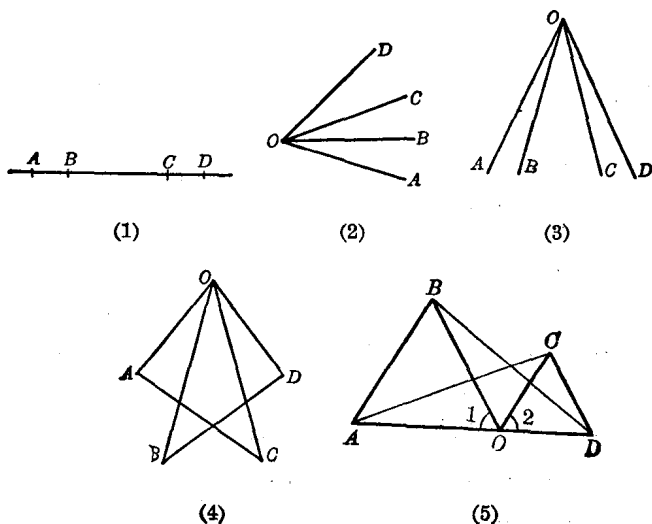


图 2

(5), 从而较快地得到证明 $AO=BD$ 的方法.

此外, 还应教会学生“由繁到简”把复杂图形分解为基本图形去认识, 如图 3(1) 中, $AB \parallel DE$, $AC \parallel DF$, 可引导学生分解为如图 3(2) 那样的六个基本图形, 正确认识图 3(1) 中有多少对相等的同位角、内错角? 多少对互补的同旁内角? 逐步使学生在识别复杂图形时, 对于暂不需要考虑的线段、角等, 能“视而不见”, 排除干扰.

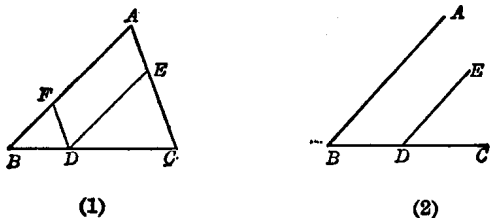


图 3

2. 处理好标准图形与变式图形的关系.

标准图形最能显示图形的特征, 易于认识, 又是图形变式的基础, 因此, 要充分重视标准图形的教学. 但是, 仅限于标准图形教学是不够的. 学生在认识变式图形时常会发生错误, 其原因不仅在于学生对图形的本质属性感知不深刻, 而且在于生活中的事物大量处于“平稳”、“正直”位置这种直观现象, 对于几何图形抽象的负迁移影响. 因此, 在识图教学中, 应在揭示标准图形本质属性的基础上, 对图形中的非本质现象进行变式, 使学生能深刻地把握图形的本质属性.

适当地改变感知的条件和形式, 如借助教具、实物或使用几何语言, 也有助于图形变式的教学.

3. 培养识图能力, 要从学生的实际水平出发.

识图教学, 应通过调查随时摸清不同阶段学生识图能力

的实际水平,掌握好识图教学的深度。我们认为,对于学生识图正确率较低的图形,可分两种情况处理:一是对后续教学影响不大,教学中就可以不用;二是对后续教学有一定影响,则应通过各种方式,逐步使较差的学生都能认识。

4. 识图教学中,要注意渗透图形变换的思想。

我们从预备课开始,就注意结合有关教学内容,运用翻折、拼合、平移、旋转等方法,让学生去观察图形,理解概念,探求证法。例如,在“全等三角形判定”教学前,我们专门安排了一堂图形变换课。这节课以课本这大节中出现的各种图形为线索,借助教具,通过平移、翻折、旋转以及它们的复合变换,使两个全等的三角形呈现不同的位置和形状,让学生识别对应关系。实践证明,这样不仅使学生感到有趣,喜欢学,学得懂,而且有利于图形变换思想的渗透,提高学生的识图能力。

(二)作图教学也是图形教学的重要组成部分,又是教学中的难点。

现行课本“先工具画图,再尺规作图”的编排有利于分散难点,又使尺规作图相对集中,较为系统。因而是恰当的。

我们认为,在工具画图的教学中的要注意引导学生观察图形的位置关系,多读、多看,熟悉画图语言,为尺规作图的教学作好相应的准备。

尺规作图大体可分为三步:第一,要求学生通过模仿学会基本作图方法,并使完成基本作图的动作“程序化”;第二,要求学生从模仿过渡到自己口述作法;第三,要求学生能正确地书写“已知、求作、作法”。

三、关于语言教学

几何语言是理解概念,认识图形,顺利地进行推理的必备