浙江大学城市学院
浙江工业大学之江学院
资助项目

微积分

（下册）

吴迪光 张 彬 编著

浙江大學出版社

●浙江大学城市学院
●浙江工业大学之江学院 资助项目

微 积 分

下 册

吴迪光 张 彬 编著

浙江大學出版社

图书在版编目（CIP）数据

微积分．下册／吴迪光，张彬编著．—杭州：浙江大学出版社，2003.11
ISBN 7-308-03509-3

Ⅰ.微…　Ⅱ.①吴…②张…　Ⅲ.微积分—高等学校—教材　Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 096369 号

责任编辑：樊晓燕
出版发行：浙江大学出版社
（杭州浙大路 38 号　邮政编码 310027）
（E-mail:zupress@mail.hz.zj.cn）
（网址:http://www.zjupress.com）
排　　版：浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷：浙江大学印刷厂
开　　本：787mm×1092mm　1/16
印　　张：15
字　　数：347 千
版 印 次：2003 年 11 月第 1 版　2003 年 11 月第 1 次印刷
印　　数：0001—3000
书　　号：ISBN 7-308-03509-3/O・301
定　　价：22.00 元

序

随着新世纪的来到,我国的高等教育进入了前所未有的大发展时期。许多原先无缘深造的学子,纷纷步入大学的殿堂,接受本科教育。而数学则是理工科学生进校伊始就要面对的一门课程。然而,众所周知,数学一方面是各专业的重要基础,另一方面又是使一部分同学望而却步的学科。如何使众多理工科学生能将数学学好、学懂、学深、学透,不断提高自己的数学应用能力,关键之一是要有一本易教易学、深入浅出、重能力、少而精且能适合学生特点的教材。

吴迪光教授(浙江大学城市学院)和张彬教授(浙江工业大学之江学院)知难而进,毅然决定代表两校联合编写一部《微积分》教材,以示自己对数学教育事业的赤诚。

他们所编教材,从少而精入手,注意最基本的概念、理论和方法的讲清讲透,努力使初学者学有所获。此书比起同类型教科书来,篇幅要少许多,而这正好是少而精的一种表征。

他们还博采众长,对过去很多教学上比较棘手的内容作了科学的处理,化解了很多难点,更新了不少传统的叙述与证法,起到了易学、省时的效果。细心的读者一定会从中发现许多新意与亮点。

本书每章习题都分成基本题、综合题和自测题三档,这将会便利学生的训练和自测,也将会便利教师的选题。

行文流畅、叙述清楚、通俗易懂、便于自学是两位作者平时写书的一贯风格,本书当然也不例外。

本书的特点很多,不能一一列举,但仅此几点,就足以使它成为一本受广大师生欢迎的好教材。

浙江大学城市学院和浙江工业大学之江学院对此教材寄予了厚望,两校在经费上均给予了强力支持,并在各自范围内进行了试用,听取了很多同学的宝贵意见,才使教材进一步完善,最终能以较高的质量出版。

浙江大学出版社始终关注、支持这部教材的出版,也是作者有信心写好这本书的一个原因。今将本书编写的背景、特点与过程简记于此,聊以为序。

丁善瑞

2003 年 4 月于杭州

前　言

本书是按照教育部关于"高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"的基本精神，以及高等理工科院校关于"高等数学课程教学基本要求"而编写的。编写中注意到优化数学内容的结构，紧扣数学基本内容，渗入现代数学思想，加强应用能力的培养与训练，以适应新世纪对理工科人才数学素质的要求。

本书共七篇，内容包括：微积分研究的主要对象与工具(包括函数、极限与连续)、一元函数的微分学、一元函数的积分学、常微分方程、多元函数的微分学(包括向量代数与空间解析几何)、多元函数的积分学、无穷级数(包括 Fourier 级数)，并按内容结构分为20章，每章附有习题、答案与提示。而习题又分为基本题、综合题、自测题三部分。基本题着重基本训练，适合课后布置；综合题着重灵活应用，适合因材施教；自测题内含单项选择题、填空题、计算题、证明题与应用题等题型，适合学生自我检查与评价，以期达到课堂教学、自学实践、检测提高的目的，以体现教学全过程的有机结合。

在编写过程中，我们做了以下改革的尝试：

(1)优化内容结构　如对于极限的处理，先介绍数列极限，再介绍函数极限与数列极限的关系定理，然后介绍函数极限的定义、性质、运算法则等一系列问题。这一方面有利于与中学数学内容相衔接，另一方面，由离散变量到连续变量，使学生易于掌握。又如多元函数的积分学，分为多元实值函数的积分(重积分和第一类线、面积分)、向量值函数的积分(第二类线面积分)、各类积分的联系(包括格林公式、高斯公式、司托克斯公式以及散度、旋度)等三章，一方面加强了各类积分的内在联系，同时又明确了数量与向量值函数积分的区别，避免了过去学生对两类线、面积分易混淆而难以掌握的教学难点。通过实践，证明这样做是行之有效的。

(2)注重数学思想与方法的训练　如在介绍数学概念的实际背景、定理条件及其作用以及由此产生的公式的应用范围时，使学生明确教学内容的一般性与特殊性，了解概念的产生与发展，从而掌握本课程的内容体系。如从"一尺之棰，日取其半，万世不竭"这个古典哲学命题引入数列极限概念，从自由落体的瞬时速度引入函数极限概念。对"ε-N"，"ε-δ"的数学语言既不回避，又不神秘化，使概念回归自然，从本来面目自然而然地去了解它，掌握它，从而帮助学生克服过去因极限概念抽象而对其望而生畏的心理。其他如导数、各类积分概念的引入，都注意到它的实际背景，通过适当的实例，归纳成数学问题，阐明数学

观点，既使数学与其他学科相联系，又增强了学生运用数学解决问题的思维方法。典型的实例是数学教材中的新鲜血液，如在介绍相对论中物体高速运行时质量 m 随速度 v 变化的函数关系时，利用微分近似公式，导出质能转换的近似公式 $(m-m_0)c^2\approx\frac{1}{2}m_0v^2$，表明微小质量的变化可产生巨大的动能。又如在微分方程中导出一物体对另一物体的追踪曲线的简单数学模型。这样，在本课程范围内渗入一些现代科学知识，增强了学生应用数学方法的意识，激发学生对学习数学的兴趣。

(3)适当融合现代数学思想 如集合、映射、$\mathbf{R}^n$ 维空间、点函数、微分算子、无穷小的阶、离散与连续、函数的逼近等在本书中，都予以适当的体现，使学生了解一些数学语言符号，如 $\forall$、$\exists$ 等，为学生进一步学习现代科学技术知识提供切入口。

(4)化解教学内容中的难点，尽量做到便于教、便于学 为了使教材适应理工科和其他非数学专业学生的实际，对定理的证明作了淡化处理。如只证必要性，充分性证明从略，或都从略，或先作几何直观说明再作分析论证，或只作几何直观说明，重在定理的条件作用、结论的应用范围和它的数学思想。有的内容打上“*”号，便于教师根据专业要求和学生实际作出灵活处理。有的地方加上“注”，以说明内容的内涵与外延，以拓宽学生的思维。

本书分上、下册，基本上符合一学年上、下学期的教学内容要求。本书的预备知识、第一篇、第二篇中的第五章，以及第四、六、七篇由吴迪光撰写，第二篇中的第六、七章，以及第三、五篇由张彬撰写。

本书的编写是在浙江大学城市学院、浙江工业大学之江学院的学校领导的支持与资助下，以及在浙江大学出版社的具体帮助下完成的。丁善瑞教授直接领导本书的具体编写工作，并担任主审，对全部稿件作了十分仔细的审阅，提出了许多宝贵的建设性意见。本书稿于2002—2003学年度在两个学院的10个教学班进行了试教。孙燮华、叶显驰、陈仲慈、方照琴、邱巨岳、张德参等教授、副教授及张兵权讲师与本书作者一起试用了本教材。试点班级的同学对本教材的使用给予了极大的热情与支持，他们在教与学中，对试用教材提出了许多极为珍贵的意见，在此表示衷心的感谢。但毕竟本书编写时间仓促，不足之处敬希专家、读者不吝批评、指正。

吴迪光　　张　彬

2003年4月于杭州玉泉

目　录

第五篇　多元函数的微分学

第六篇　多元函数的积分学

第七篇　无穷级数

第五篇　多元函数的微分学

本篇讨论多元函数的微分学,先介绍向量代数和空间解析几何的基本知识,为学习多元函数的微分学提供必要的工具.

第十三章　向量代数与空间解析几何

向量描述的是既有大小又有方向的量.它是从力学、物理学的一些基本问题中抽象出来的量,它在科学技术中有广泛的应用,它还是讨论几何学中一些问题的有力工具.本章先介绍向量的概念及其代数运算,再讨论空间解析几何问题.

第一节　向量及其线性运算

一、向量的概念

物理学中常见的力、速度、加速度、位移、电场强度等一些**不仅有大小,而且有方向的量**,称为**向量**.向量通常用有向线段表示(如图 13-1),以有向线段的长表示向量的大小,以有向线段的方向表示向量的方向,记作$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{PQ}$,或者用一个小写的字母的上方加箭头如$\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$,… 来表示,也有用小写黑体字母,如 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$,… 来表示.

向量的大小称为向量的**模**,记作 $|\overrightarrow{AB}|$,$|\overrightarrow{PQ}|$ 或 $|\vec{a}|$,$|\vec{b}|$,…

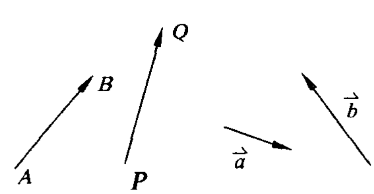


图13-1

向量最本质的属性是大小与方向.数学中研究的向量只考虑大小与方向,而与起点位置无关,这种向量称为**自由向量**,因此,若向量 $\vec{a}$,$\vec{b}$ 大小相等、方向相同,就认为它们是**相等**的,记作 $\vec{a}=\vec{b}$.

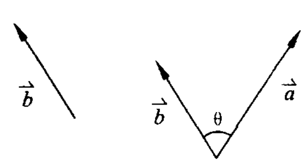


图13-2

向量 $\vec{a}$,$\vec{b}$ 平行移动至起点重合时所得夹角 θ,称为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的**夹角**,并规定$0\leqslant\theta\leqslant\pi$,如图 13-2.特别地,当 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi$时,称向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ **平行**,记作 $\vec{a}\parallel\vec{b}$;当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时,称向

量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ **垂直(或正交)**,记作 $\vec{a}\perp\vec{b}$.

模为 1 的向量,称为**单位向量**,与 $\vec{a}$ 同方向的单位向量,记作$\vec{a}^0$.模为零的向量,称为**零向量**,记作 $\vec{0}$.零向量的起点与终点重合,没有确定的方向,我们约定零向量的方向可以任意选取.与向量 $\vec{a}$ 的模相等,但方向相反的向量,称为 $\vec{a}$ 的**负向量**,记作 $-\vec{a}$.

二、向量的线性运算

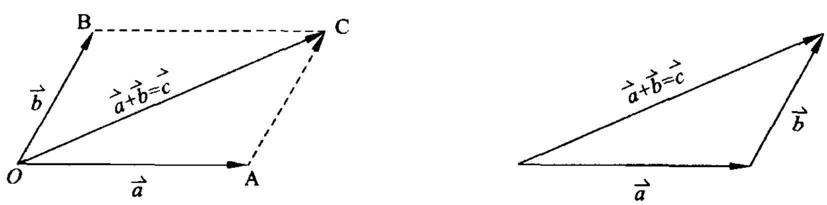
1.向量的加减法

加法　从力的平行四边形法则,可抽象出向量的加法运算.

定义 13.1　以向量 $\vec{a}\overset{\text{def}}{=}\overrightarrow{OA}$ 与向量 $\vec{b}\overset{\text{def}}{=}\overrightarrow{OB}$ 为邻边的平行四边形的对角线向量$\overrightarrow{OC}\overset{\text{def}}{=}\vec{c}$(图 13-3(1)),称为向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 的**和向量**,记作 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ 或$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$.

向量的这种加法规则,叫做**平行四边形法则**.

由于$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$,因此$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$.这样平行四边形法则就等价于**三角形法则**:将向量 $\vec{b}$ 平移,使 $\vec{b}$ 的起点与 $\vec{a}$ 的终点相接,从 $\vec{a}$ 的起点到 $\vec{b}$ 的终点所引的向量 $\vec{c}$,就是向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和向量(图 13-3(2)).



(1)　　(2)

图13-3

根据三角形法则,多个向量相加,$\vec{a}+\vec{b}+\cdots+\vec{c}$,只要把它们依次尾头相接,从第一个向量的起点到最后一个向量的终点所引的向量就是它们的和向量,如图 13-4.

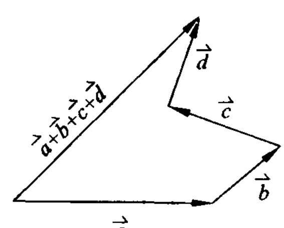


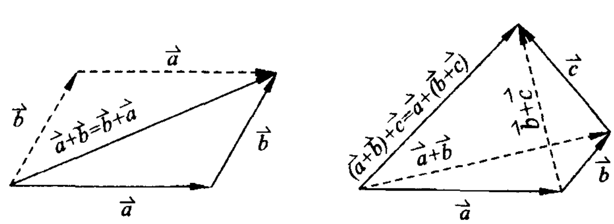
图13-4

向量加法的运算规律:

(1)$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$,　　(交换律)

(2)$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.　(结合律)

由加法的三角形法则和向量相等的定义,从图 13-5(1) 和图 13-5(2) 显知交换律和结合律都成立.



(1)　　(2)

图13-5

减法　向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的负向量 $-\vec{b}$ 之和称为向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 的差向量 $\vec{c}$,记作 $\vec{a}-\vec{b}=$

$\vec{c}$,即

$$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}),$$

特别有

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}.$$

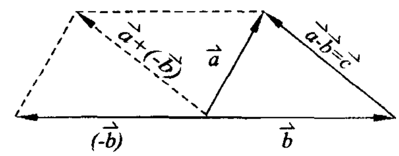


图13-6

根据加法的三角形法则,从图 13-6 可以看出,差向量的求法是:平行移动 $\vec{a}$,使其起点与 $\vec{b}$ 的起点重合,由减向量 $\vec{b}$ 的终点向被减向量 $\vec{a}$ 的终点所引的向量,就是差向量 $\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$.

2. 向量的数乘

定义 13.2　实数 λ 与向量 $\vec{a}$ 的乘积是一个向量,记作 $\lambda\vec{a}$,其模是 $\vec{a}$ 的模 $|\vec{a}|$ 的 $|\lambda|$ 倍,即 $|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$;其方向是:当 $\lambda>0$ 时与 $\vec{a}$ 同向,当 $\lambda<0$ 时与 $\vec{a}$ 反向,当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\vec{a}=\vec{0}$. 这种数乘向量的运算称为**向量的数乘**(**简称数乘**).

例如,向量 $2\vec{a}$,它的方向与 $\vec{a}$ 的方向相同,而模是 $\vec{a}$ 的模的 2 倍. 又如向量 $-\frac{1}{2}\vec{a}$,它的方向与 $\vec{a}$ 的方向相反,而模是 $\vec{a}$ 的模的一半,如图 13-7.

特别是 -1 与 $\vec{a}$ 的乘积,就是 $\vec{a}$ 的负向量,即

$$(-1)\vec{a}=-\vec{a}.$$

若 $\vec{a}\neq\vec{0}$,则有与 $\vec{a}$ 同方向上的单位向量

$$\overrightarrow{a^0}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\text{ 或 }\vec{a}=|\vec{a}|\overrightarrow{a^0}.$$

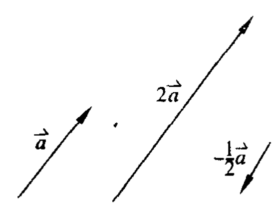


图13-7

数乘的运算规律:

(1) $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$,　　(结合律)

(2) $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$,　　(分配律)

(3) $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$.　　(分配律)

证　当 λ,μ 为零或 $\vec{a}=\vec{0}$ 时,(1),(2),(3) 显然成立,因此假设 $\lambda\neq0,\mu\neq0,\vec{a}\neq\vec{0}$.

(1) 先证等号两边的向量的模相等. 由向量的数乘定义可得

$$|\lambda(\mu\vec{a})|=|\lambda||\mu\vec{a}|=|\lambda||\mu||\vec{a}|=|\lambda\mu||\vec{a}|=|(\lambda\mu)\vec{a}|.$$

再证其方向相同. 不妨设 $\lambda>0,\mu<0$,这时对于(1)式左边的 $\lambda(\mu\vec{a})$ 有:$(\mu\vec{a})$ 与 $\vec{a}$ 反向,$\lambda(\mu\vec{a})$ 与 $(\mu\vec{a})$ 同向,从而 $\lambda(\mu\vec{a})$ 与 $\vec{a}$ 反向;对于(1)式右边的 $(\lambda\mu)\vec{a}$ 有:因为 $\lambda\mu<0$,于是 $(\lambda\mu)\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 反向,从而向量 $\lambda(\mu\vec{a})$ 与 $(\lambda\mu)\vec{a}$ 同向,所以,向量 $\lambda(\mu\vec{a})$ 与向量 $(\lambda\mu)\vec{a}$,模相等,方向相同. 由此得证(1) 成立.

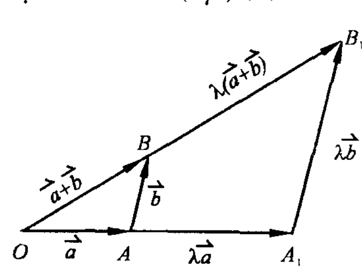


图13 - 8

(2) 不妨设 $\lambda>0$,由三角形法则(如图 13-8) 有

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB},$$

将边 OA 延长(或缩短)原来的 λ 倍,至 OA_1,边 OB 同样延长(或缩短)原来的 λ 倍,至 OB_1,得到 $\triangle OA_1B_1$,则 $\triangle OA_1B_1 \backsim \triangle OAB$.由相似三角形性质,可得 $A_1B_1 = \lambda AB$,于是

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{OB_1},$$

而 $\overrightarrow{OA_1} = \lambda\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB_1} = \lambda\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{A_1B_1} = \lambda\overrightarrow{AB}$,代入上式,得

$$\lambda\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{OB},$$

得证 $\lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} = \lambda(\vec{a} + \vec{b})$.

(3) 的情形,请读者自己完成证明.□

例 1 已知向量 $\vec{a}$,$\vec{b}$,试求:(1)$3\vec{a} + \vec{b}$, (2)$\vec{a} - 2\vec{b}$.

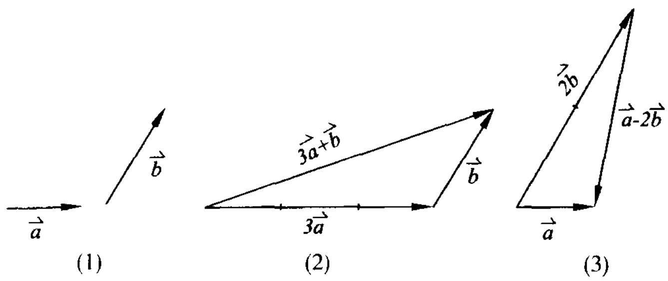


图13-9

解 (1) 设向量 $\vec{a}$,$\vec{b}$(如图 13-9(1) 所示),先将 $\vec{a}$ 的模扩大至原来的3倍,方向不变,得 $3\vec{a}$,再与 $\vec{b}$ 相加,即得 $3\vec{a} + \vec{b}$(如图 13-9(2) 所示).

(2) 先将向量 $\vec{b}$ 的模扩大至原来的 2 倍,方向不变,得 $2\vec{b}$,再由 $\vec{a}$ 减去 $2\vec{b}$,即得 $\vec{a} - 2\vec{b}$(如图 13-9(3) 所示).

三、向量在轴上的投影

过点 P 作轴 u 的垂直平面,记垂足为 P',称 P' 为点 P 在轴 u 上的投影.若向量 $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ 的起点 P 与终点 Q 在轴 u 上的投影为 P' 与 Q',则有向线段 $\overline{P'Q'}$ 的值(记作 $P'Q'$,当 $\overline{P'Q'}$ 与轴 u 同向时值为正,反向时的值为负)称为向量 $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ 在轴 u 上的**投影**,记作 $Prj_u\overrightarrow{PQ} = Prj_u\vec{a}$ 或 $(\vec{a})_u$,即

$$Prj_u\vec{a} = P'Q' = |\vec{a}|\cos\theta.$$

其中 θ 是向量 $\vec{a}$ 与轴 u 正向的夹角(如图 13-10 所示).

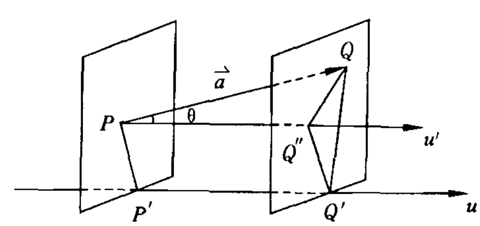


图13-10

可以证明有如下的投影性质.

定理 13.1 有限个向量之和在轴 u 上的投影,等于各个向量在该轴上的投影之和,即

$$(\vec{a} + \vec{b} + \cdots + \vec{c})_u = (\vec{a})_u + (\vec{b})_u + \cdots + (\vec{c})_u. \tag{13.1}$$

第二节　空间直角坐标系　向量的坐标

在平面解析几何中，通过建立平面直角坐标系，使得平面上的点与一组有序的实数 (x,y) 一一对应，从而用有序数组（即点的坐标 (x,y)）来确定平面上点的位置．现在在讨论空间几何问题时也可采用有序数组来确定点的位置，即建立空间直角坐标系．

一、空间直角坐标系

过空间某点 O，引三条两两相互垂直的数轴 Ox,Oy,Oz，构成一个**空间直角坐标系**，记为 $Oxyz$，定点 O 称为**坐标原点**，Ox,Oy,Oz 轴分别称为 x 轴（或**横轴**）、y 轴（或**纵轴**）、z 轴（或**竖轴**），统称为**坐标轴**，它们的排列顺序采用右手系，即右手握住 z 轴，拇指朝向 z 轴正向，四指指向 x 轴正向，握拳转过 90° 角转向 y 轴的正向（如图 13-11 所示）．由两条坐标轴决定的平面叫做**坐标平面**，分别记为 xOy,yOz 和 zOx．三张相互垂直的坐标平面将空间分成八个部分，每一部分称作一个**卦限**，它们的编号为：在 xOy 坐标平面上方的是 1,2,3,4，在 xOy 坐标平面下方的是 5,6,7,8（如图 13-12 所示）．

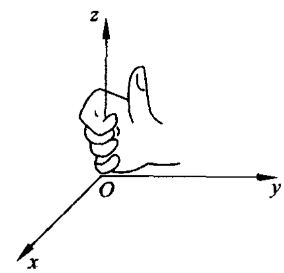


图13-11

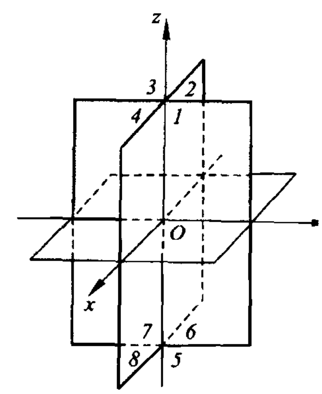


图13-12

建立空间直角坐标系后，空间任意一点 M 的位置就可以用一有序的实数组 (x,y,z) 来确定．只要过点 M 分别作 x 轴，y 轴，z 轴的垂直平面，与坐标轴的交点依次是 P,Q,R，它们在所在坐标轴上的坐标分别为 x,y,z．这样，点 M 对应于惟一确定的一组有序实数 (x,y,z)．

反之，如果给定有序数组 (x,y,z)，在 x 轴上过坐标为 x 的点作垂直于 x 轴的平面，在 y 轴上过坐标为 y 的点作垂直于 y 轴的平面，在 z 轴上过坐标为 z 的点处作垂直于 z 轴的平面，这三张平面有惟一交点 M，按此作法，任意给定一有序数组 x,y,z 对应于空间的一个点（如图 13-13 所示）．

因此，建立空间直角坐标系后，空间的点 M 与有序数组 (x,y,z) 之间构成一一对应关系：

$$M \leftrightarrow (x,y,z).$$

称有序数组 (x,y,z) 为**点 M 的坐标**，其中称 x 为点 M 的**横坐标**，y 为点 M 的**纵坐标**，z 为点 M 的**竖坐标**．

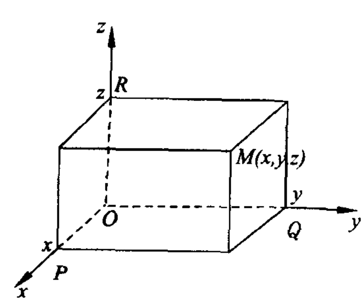


图13-13

例如，$M_1(1,2,3)$ 是第 1 卦限内的点，$M_2(2,-1,3)$ 是第 4 卦限内的点，$M_3(-1,2,-1)$ 是第 6 卦限内的点．xOy 坐标平面上的点的竖坐标 $z=0$，于是坐标为 $(x,y,0)$，同理，yOz 坐标平面上的点的坐标为 $(0,y,z)$，zOx 坐标平面上的点的坐标为 $(x,0,z)$．

x 轴上的点的横坐标为 x，纵坐标 $y=0$，竖坐标 $z=0$，于是该点的坐标为 $(x,0,0)$．同

理，y 轴上的点的坐标为$(0,y,0)$，z 轴上的点的坐标为$(0,0,z)$. 原点 O 的坐标为$(0,0,0)$.

有了空间直角坐标系之后，空间一点与有序数组(x,y,z)之间建立了一一对应关系，而空间几何图形可以看成符合某种运动规则的动点的几何轨迹，那么空间几何问题就可以用点的坐标(x,y,z)所满足的方程式的代数问题来研究.

二、空间两点间的距离公式

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 是两已知点，试求两点之间的距离 d.

假设向量$\overrightarrow{M_1M_2}$既不与坐标轴平行，也不与坐标轴垂直，过点 M_1 和 M_2 分别作坐标轴的垂直平面，六张平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(如图 13-14 所示).

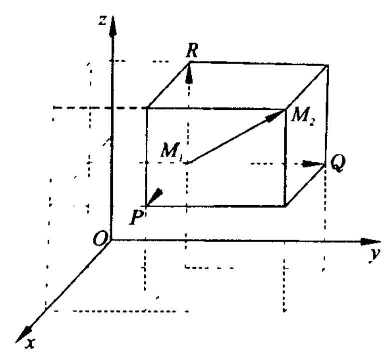


图13-14

因为长方体对角线的平方等于三条棱长的平方之和，得

$$|M_1M_2|^2 = |M_1P|^2 + |M_1Q|^2 + |M_1R|^2,$$

而　$(\overrightarrow{M_1P})_x = x_2 - x_1$，　$(\overrightarrow{M_1Q})_y = y_2 - y_1$，　$(\overrightarrow{M_1R})_z = z_2 - z_1$，

故有　$|M_1M_2|^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2$，

所以

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}. \qquad (13.2)$$

如果$\overrightarrow{M_1M_2}$与坐标轴平行，不妨设$\overrightarrow{M_1M_2} \mathbin{/\!/} x$ 轴，这时 $y_1 = y_2, z_1 = z_2$，则 $d = |M_1M_2| = |x_2 - x_1|$，这正是当 $y_1 = y_2, z_1 = z_2$ 时代入式(13.2)的结果.

如果$\overrightarrow{M_1M_2}$与坐标轴垂直，不妨设$\overrightarrow{M_1M_2} \perp z$ 轴，这时 $z_1 = z_2$，点 M_1 与 M_2 同在平行于 xOy 坐标平面的平面上，由平面上两点距离公式，得

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2},$$

这就是 $z_1 = z_2$ 代入式(13.2)的结果.

因此，不论 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间什么位置上的点，距离公式(13.2)均成立.

例 1　求点 $A(1,2,3)$ 和 $B(2,0,-1)$ 之间的距离.

解　由公式(13.2)，得

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(2-1)^2 + (0-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{21}.$$

例 2　以 $C(x_0,y_0,z_0)$ 为球心，R 为半径的球面，可以看成动点 $M(x,y,z)$ 到定点 C 的距离等于 R 的点的轨迹(如图 13-15 所示)，试求点 M 的坐标(x,y,z)满足的关系式.

解　由两点距离公式(13.2)可知

$$|CM| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = R,$$

两边平方得

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2. \quad (13.3)$$

于是凡该球面上的点的坐标一定满足式(13.3)式，凡不是该球面上的点的坐标一定不满足方程(13.3)，因而可以用方程(13.3)表示这球面，称式(13.3)为该**球面的方程**.

特别地，球心在原点(0,0,0)，半径为 R 的球面方程为

$$x^2+y^2+z^2 = R^2. \quad (13.4)$$

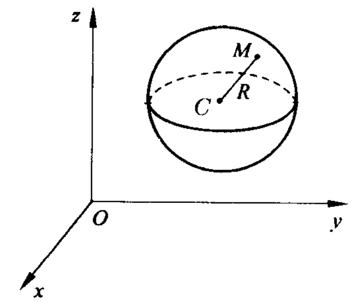


图13-15

三、向量的坐标

建立了空间直角坐标系 $Oxyz$ 后，分别在 x 轴、y 轴和 z 轴的正向取单位向量 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$，它们称为坐标系的**基本单位向量**(简称**基向量**).

对于空间任一向量 $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$(如图 13-16(1) 所示)，它在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影记为

$$(\vec{a})_x = P_1P_2 \overset{\text{def}}{=} a_x,\ (\vec{a})_y = Q_1Q_2 \overset{\text{def}}{=} a_y,\ (\vec{a})_z = R_1R_2 \overset{\text{def}}{=} a_z.$$

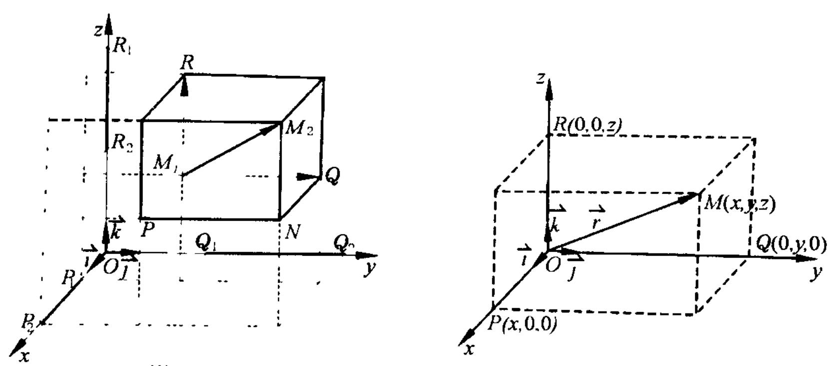


图13-16

由向量的加法，得

$$\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1P} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NM_2} = \overrightarrow{M_1P} + \overrightarrow{M_1Q} + \overrightarrow{M_1R},$$

因为

$$\overrightarrow{M_1P} = \overrightarrow{P_1P_2} = a_x\vec{i},\ \overrightarrow{M_1Q} = \overrightarrow{Q_1Q_2} = a_y\vec{j},\ \overrightarrow{M_1R} = \overrightarrow{R_1R_2} = a_z\vec{k}.$$

故有

$$\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}. \quad (13.5)$$

式(13.5)称为向量 $\vec{a}$ 的**坐标分解式**，其中 $a_x\vec{i},a_y\vec{j},a_z\vec{k}$ 称为向量 $\vec{a}$ 分别在 x 轴、y 轴和 z 轴上的**分向量**.

由于向量 $\vec{a}$ 在三个坐标轴上的投影 a_x,a_y,a_z 是惟一确定的，反之，从给定的有序数组

(a_x, a_y, a_z) 也可以惟一地确定出向量 $\vec{a}$. 于是有一一对应关系:

$$\vec{a} \leftrightarrow \text{有序数组}(a_x, a_y, a_z).$$

我们将向量 $\vec{a}$ 在坐标轴上的投影 a_x, a_y, a_z 称为**向量 $\vec{a}$ 的坐标**,并记为

$$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}. \tag{13.6}$$

式(13.6)称为向量 $\vec{a}$ 的**坐标表示式**.

特别地,起点在坐标原点 O 终点是 $M(x, y, z)$ 的向量 $\overrightarrow{OM}$(如图 13-16(2) 所示),称为点 M 的**向径(或矢径)**,则有

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad 或 \quad \vec{r} = \{x, y, z\}.$$

而基向量为 $\vec{i} = \{1,0,0\}, \vec{j} = \{0,1,0\}, \vec{k} = \{0,0,1\}$. 又零向量 $\vec{0} = \{0,0,0\}$.

有了向量的坐标之后,向量的加、减、数乘的几何运算,就可化为向量坐标的代数运算.

设 $$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \quad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k},$$

则用加法和数乘的运算规则,得到

$$\begin{aligned} \vec{a} \pm \vec{b} &= (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \pm (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) \\ &= (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k}, \end{aligned} \tag{13.7}$$

$$\lambda\vec{a} = \lambda(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) = \lambda a_x\vec{i} + \lambda a_y\vec{j} + \lambda a_z\vec{k}. \tag{13.8}$$

或 $$\vec{a} \pm \vec{b} = \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\},$$

$$\lambda\vec{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}.$$

四、向量的模与方向余弦

设空间起点为 $M_1(x_1, y_1, z_1)$,终点为 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 的向量是 $\overrightarrow{M_1M_2}$,它的模即是这两点间的距离 $|M_1M_2|$,即

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{13.9}$$

对任意向量 $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = \{a_x, a_y, a_z\}$,如图 13-17 所示,$\vec{a}$ 的模 $|\vec{a}|$ 即是以 $|a_x|, |a_y|, |a_z|$ 为棱长的长方体的对角线的长度,即有

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{13.10}$$

给定一向量 $\vec{a}$,它与 x 轴、y 轴、z 轴正向的夹角就完全确定了,依次记为 α, β, γ,为了使这些角惟一,规定 $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi, 0 \leqslant \beta \leqslant \pi, 0 \leqslant \gamma \leqslant \pi$,于是把 α, β, γ 称为向量 $\vec{a}$ 的**方向角**. 由于向量 $\vec{a}$ 的三个坐标就是 $\vec{a}$ 在三个坐标轴上的投影,即

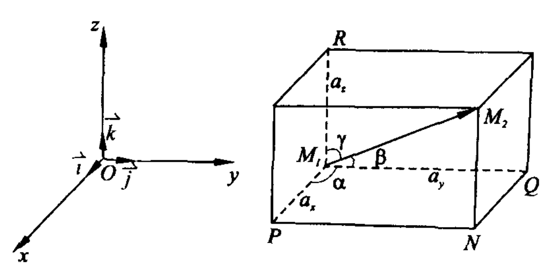


图13-17