初中数学竞赛题集锦

山东教育出版社

初中数学竞赛题集锦

温锡九　刘安君
韩思正　李政玉　编

山东教育出版社

初中数学竞赛题集锦

山东教育出版社出版
（济南经九路胜利大街）
山东省新华书店发行　　山东聊城地委印刷所印刷

787×1092毫米32开本　8.75印張　20千字
1986年12月第1版　　1986年12月第1次印刷
印数1——70，750
书号　7275·583　　定价　1.25元

前　　言

目前，开发青少年智力，培养、训练、提高他们分析问题、解决问题能力的数学竞赛活动正在全国蓬勃开展起来。为了让青少年了解近年来国内外数学竞赛的概况，给他们提供一个学习数学的有力工具，进而激发起他们的求知欲，我们编写了这本书。

本书共分三部分。第一部分提供了参加数学竞赛必须掌握的一些知识；第二部分按系统选编了国内外部分初中数学竞赛题中的基础题和综合题；第三部分收集了1984年——1986年间国内的十二份初中数学竞赛试题。为方便读者，在本书的后半部分，对本书的所有题目都给出了较详细的解答。有的题目有若干种解答途径或答案，因篇幅所限，我们只选取了一种。

在编写过程中，我们翻阅了大量的图书、报纸、期刊。所选的这些题目都经过了核对、整理和加工，恳望读者批评指正。

编　　者

一九八六年七月

目　　录

第一部分　必备知识

一、整数的整除性

（一）　整除的定义及性质

1．**定义**：对于两个整数a、b（$b\neq0$），若存在一个整数c，使$a=bc$成立，则称b整除a或a被b整除．记作$b|a$．

2．**性质**：

（1）若$b|a$，则$b|(-a)$，$(-b)|a$，$(-b)|(-a)$，$|b|\,|\,|a|$，且对任意的非零整数m，有$bm|am$．

（2）若$a|b$，$b|a$，则$|a|=|b|$．

（3）若$b|a$，$c|b$，则$c|a$．

（4）若$b|ac$，而$(a,b)=1$（即a、b互质），则$b|c$．

（5）若$c|a$，$c|b$，则$c|(ma+nb)$，其中m、n为任意整数．

（6）在一等式$a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots b_n$中，若除了某一项外，其余各项都能被c整除，则该项也必能被c整除．

（二）一次同余式及其性质

1．带余除法：设b是整数，任意整数a除以b都可表示成下面形式．

$$a=bc+r\qquad(0\leqslant r<|b|),$$

其中整数c、r是唯一的．此时称c为a除以b的不完全商，r称

为a除以b的余数。

显然，$r=0$时，a被b整除，可见，整除是带余除法中余数等于零时的特殊情况。

2．一次同余式：设m是一正整数，把它叫做模，若两整数a、b除以m有相同的余数，则称a与b对模m同余。记为$a\equiv b\pmod{m}$，称为一次同余式。

显然，$a\equiv b\pmod{m}$与$m|(a-b)$或$a=b+mc$（c为整数）是等价的。

例如：$8\equiv 5\pmod{3}$（$8-5=3$，$3|3$），$20\equiv -12\pmod{8}$〔$20-(-12)=32$，而$8|32$〕。

3．一次同余式的基本性质：

（1）$a\equiv a\pmod{m}$。（反身性）

（2）若$a\equiv b\pmod{m}$，则$b\equiv a\pmod{m}$。（对称性）

（3）若$a\equiv b\pmod{m}$，$b\equiv c\pmod{m}$，则$a\equiv c\pmod{m}$。（传递性）

（4）若$a\equiv b\pmod{m}$，$k|m$，则$a\equiv b\pmod{k}$。

（5）若$a_1\equiv b_1\pmod{m}$，$a_2\equiv b_2\pmod{m}$，则$a_1\pm a_2\equiv b_1\pm b_2\pmod{m}$。

（6）若$a_1\equiv b_1\pmod{m}$，$a_2\equiv b_2\pmod{m}$，则$a_1a_2\equiv b_1b_2\pmod{m}$。

推论：若$a\equiv b\pmod{m}$，则$ka\equiv kb\pmod{m}$。综合（5）、（6）得：若$a_1\equiv b_1\pmod{m}$，$a_2\equiv b_2\pmod{m}$，则$ka_1+la_2\equiv kb_1+lb_2\pmod{m}$（k，l为整数）。

注意：由（6）之推论，同余式两边同乘以同一整数后仍是同余式，但同余式的两边同除同一个整数后未必仍成立

（如$28 \equiv 24 \pmod 2$）两边同除以4后$7 \not\equiv 6 \pmod 2$）），但增加一约束条件后有

（7）若$ab \equiv ac \pmod m$，且$(m, a) = 1$，则$b \equiv c \pmod m$。

事实上，由$ab \equiv ac \pmod m$，得$m | a(b-c)$。

$\because (m, a) = 1$，$\therefore m | (a-b)$，即$a \equiv b \pmod m$。

（8）若$a \equiv b \pmod m$，则$a^n = b^n \pmod m$。

综合（5）、（6）、（8），有

（9）对整系数多项式$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^c + a_0$。

若$A \equiv B \pmod m$，则$f(A) \equiv f(B) \pmod m$。

（三）整除性的判断

1．利用数的整除特征：

（1）被2、5整除的数的特征是末位数字被2、5整除。

（2）被4、25整除的数的特征是末二位数被4、25整除。

（3）被8、125整除的数的特征是末三位数被8、125整除。

（4）被3、9整除的数的特征是各位数字之和被3、9整除。

（5）被11整除的数的特征是其奇位数字之和与偶位数字之和的差被11整除.

（6）能被6整除的数的特征是既能被2又能被3整除。被12、15等数整除性的判定与“被6整除的判定”类似。

例1 求证：把一个数分成末三位数为一组，其余部分为

另一组，若这两组数之差能被7（13）整除，则这个数必能被7（13）整除。

证明：（分割法）设给的数为A，记A的末三位数为N，其余部分为M（不妨设M>N），则

$A=M\times1000+N=1000M+M-M+N=1001M-(M-N)$。

由题设 $7\mid(M-N)$（或 $13\mid(M-N)$），又 $7\mid1001$（或 $13\mid1001$），

$\therefore 7\mid A$（或 $13\mid A$）。

例2 若 $5\nmid n$，则 $5\mid(n^4-1)$。

证明：$n^4-1=(n-1)(n+1)(n^2+1)$。

$\because 5\nmid n$，$\therefore n$ 的末位数字不是0和5，只能是1、2、3、4、6、7、8、9。

当n的末位数字是1、6时，$5\mid(n-1)$。

当n的末位数字是4、9时，$5\mid(n+1)$。

当n的末位数字是2、3、7、8时，n^2的末位数字是9、4，此时 $5\mid(n^2+1)$，故总有 $5\mid(n^4-1)$。

例3 求出数列

$$1979,\ 19791979,\ \cdots\cdots,\ \underbrace{1979\ 1979\cdots1979}_{n\text{个}},\cdots\cdots$$

各项中能被11整除的最小项。

解：考察数列中各项的奇位数字之和与偶位数字之和的差：

$S_1=(9+9)-(7+1)=10$，

$S_2=2(9+9)-2(7+1)=20$，

…………………………………

$Sn=n(9+9)-n(7+1)=10n$。

∵ $S_n=10n$ 可被11整除的最小n为11，∴原数列中能被11整除的最小项是第11项，即

$$\underbrace{\underline{1979}\ \underline{1979}\cdots\cdots\underline{1979}}_{11个}$$

2. 利用同余式：

例 4 求使 2^n+1 能被 3 整除的一切自然数n。

解： ∵ $2\equiv-1\pmod 3$，∴ $2^n\equiv(-1)^n\pmod 3$，∴ $2^n+1\equiv(-1)^n+1\pmod 3$，于是当n为奇数时，$2^n+1\equiv0\pmod 3$，即 $3\mid(2^n+1)$。

3. 利用"任意 n 个连续整数之积 $a_1a_2\cdots a_n$ 必能被 $n(n-1)\cdots\cdots2\cdot1$ 整除"：

根据同余的概念，对于给定的整数m（模）我们可以把全部整数按除以m的余数〔分别为0，1，2，……（m－1）〕的不同分成m类，同类中的数对模m同余。

例如取m＝5，则全部整数可表示成下列形式：5m，5m＋1，5m＋2，5m＋3，5m＋4。

显然，任意m个连续整数必定分别在这m个类中，因此，至少有一个数能被m整除。

这样，任意二个连续整数 a_1、a_2 中，必有一个被 2 整除，故 a_1a_2 能被 $2\cdot1=2$ 整除。

任意三个整数 a_1、a_2、a_3 中必有一个被 3 整除，而 a_1a_2 又能被 $2\cdot1$ 整除，故 $a_1a_2a_3$ 能被 $3\cdot2\cdot1=6$ 整除。

任意四个连续整数 a_1、a_2、a_3、a_4 中，必有一个被 4 整除，而 $a_1a_2a_3$ 又能被 $3\cdot2\cdot1$ 整除，故 $a_1a_2a_3a_4$ 能被 $4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ 整除。

依此类推，任意五个连续整数之积 $a_1a_2a_3a_4a_5$ 能被 5·

$4\cdot3\cdot2\cdot1=120$整除。

一般地，任意n个连续整数之积$a_1a_2\cdots\cdots a_n$能被$n(n-1)(n-2)\cdots\cdots2\cdot1$整除。

例 5　求证：$n>2$时，n^5-5n^3+4n被120整除。

证明：$n^5-5n^3+4n=n(n^4-5n^2+4)=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$。此为5个连续自然数之积，故能被$5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$整除。

例 6　一整数a若不能被2和3整除，则a^2+23必能被24整除。

证明：$\because a^2+23=a^2-1+24$，$\therefore$只须证a^2-1被24整除即可。

$\because 2\nmid a$，$\therefore a$为奇数。设$a=2n+1$，则$a^2-1=4n^2+4n=4n(n+1)$。$\because n$、$(n+1)$为二连续整数，$\therefore n(n+1)$被2整除，$\therefore 8\mid 4n(n+1)$，即$8\mid(a^2-1)$。

又$\because a-1$、a、$a+1$为三个连续整数，

$\therefore 3\mid a(a-1)(a+1)=a(a^2-1)$。$\because 3\nmid a$，$\therefore 3\mid(a^2-1)$。$\because(3,8)=1$，$\therefore 24\mid(a^2-1)$，$\therefore a^2+23$能被24整除。

4．利用乘法公式：

（1）　$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$，即$(a-b)\mid(a^n-b^n)$（$n$为任意整数）

将（1）中的b代以$-b$，且n为偶数，则有

（2）　$a^n-b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots\cdots-b^{n-1})$，即$(a+b)\mid(a^n-b^n)$（n为偶数）。

将（1）中的b代以$-b$，且n为奇数，则有

（3）　$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots\cdots+b^{n-1})$，

即 $(a+b)\mid(a^n+b^n)$（n为奇数）。

例7 求证：$2^{4n}-1$能被15整除。

证明：$\because 2^{4n}-1=(2^4)^n-1=16^n-1^n$，

$\therefore 15\mid(2^{4n}-1)$。

例8 求证：$f(n)=a^{n+2}+(a+1)^{2n+1}$被$a^2+a+1$整除，其中a是整数，n是自然数。

证明：
$$\begin{aligned}f(n)&=a^2a^n+(a+1)(a^2+2a+1)^n\\&=(a+1)(a^2+2a+1)^n-(a+1)a^n+(a+1)a^n+a^2a^n\\&=(a+1)[(a^2+2a+1)^n-a^n]+a^n(a^2+a+1).\end{aligned}$$

$\because (a^2+a+1)\mid[(a^2+2a+1)^n-a^n]$，$\therefore (a^2+a+1)\mid f(n)$。

5．利用反证法：

例9 若a、b为整数，$|a|\neq|b|$，则$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$不可能是整数。

证明：不失一般性，设a、b互质，且$a>0$。

若$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$是整数，令$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=n$，则$a^2+b^2=abn$，

$\therefore b^2=a(bn-a)$。由此推出$a\mid b^2$，这显然是不可能的，

因此，$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$不可能是整数。

例10 求证：由0，1，2，3，4，5组成的数字不重复的六位数不可能被11整除。

证明：设组成的六位数是$\overline{a_5a_4a_3a_2a_1a_0}$假定它能被11整除，则

$$a_0+a_2+a_4-(a_1+a_3+a_5)=11n,$$

$$\therefore a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=11n+2(a_1+a_3+a_5);$$

$\because a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=15,$

$\therefore 11n+2(a_1+a_3+a_5)=15.$

由上式可知 $0\leqslant n<2$。

当 $n=0$ 时，左端为偶数，右端为奇数，矛盾。

当 $n=1$ 时，$2(a_1+a_2+a_3)=4$，$\therefore a_1+a_2+a_3=2$。但0，1，2，3，4，5中无论那三个数之和都不可能等于2，因此，所组成的六位数不可能被11整除。

二、一次不定方程

未知数个数多于方程个数的方程（组）叫做不定方程（组）。

例如，我国的“百鸡问题”和希腊的“丢番都”方程都是历史上著名的不定方程。

下面我们只介绍一次整系数不定方程（组）的整数解。

（一） 二元一次不定方程 $ax+by=c$

对此方程有下面结论：

1．若 $(a,b)\mid c$，则方程必有整数解。

若 $(a,b)\nmid c$，则方程必无整数解。

这样，若 $(a,b)\neq 1$，可将方程两边同除以最大公约数 (a,b)，则方程就变为两未知数系数互质的情况，因此，我们将方程

$$ax+by=c,\quad (a,b)=1 \qquad (1)$$

叫做二元一次不定方程的标准式。

显然方程（1）总有整数解。

2．若方程（1）有一特解 x_0、y_0，则其一切整数解（通解）为：

$$\begin{cases} x = x_0 - bt, \\ y = y_0 + at. \end{cases} \quad （其中t是任意整数）$$

事实上，$\because x_0$、y_0为（1）的解，$\therefore$有$ax_0 + by_0 = c$　　（2）

（1）－（2）得$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$，

$$\therefore x = x_0 - \frac{b(y - y_0)}{a}. \qquad (3)$$

$\because (a, b) = 1$，$\therefore y - y_0$是a的倍数，于是可设

$\frac{y - y_0}{a} = t$　（t为整数），

则将$y = y_0 + at$代入（3）得$x = x_0 - bt$，这样（1）

的通解为 $\begin{cases} x = x_0 - bt, \\ y = y_0 + at. \end{cases}$　（t为任意整数）

这样，求解二元一次不定方程的关键是求其一特解。

下面我们以方程$11x + 15y = 7$为例介绍几种求特解的方法。

例11　求$11x + 15y = 7$的整数解。

方法一：（观察法）

将方程变形　$x = \frac{7 - 15y}{11}$.

$\because x$为整数，$\therefore 7 - 15y$应是11的倍数。由此观察得

$x_0 = 2$，$y_0 = -1$，$\therefore$通解为

$$\begin{cases} x = 2 - 15t, \\ y = -1 + 11t. \end{cases} \quad （t为整数）$$

方法二：（观察法）

先考察$11x + 15y = 1$，观察易得

$$11 \cdot (-4) + 15 \cdot 3 = 1,$$

$\therefore 11\cdot(-4\times7)+15\cdot(3\times7)=7$,

$\therefore x_0=-28$, $y_0=21$.

$$\therefore\begin{cases}x=-28-15t,\\ y=21+11t.\end{cases}\quad (t为整数)$$

方法三：（辗转相除法）

$\because 15=1\times11+4$, $11=2\times4+3$, $4=1\times3+1$,

$\therefore 1=4-3=(15-11)-[11-2\times(15-11)]$

$=11\times(-4)+15\times3$,

$\therefore 11\times(-4)\times7+15\times3\times7=7$,

$\therefore x_0=-28$, $y_0=21$.

$$\therefore\begin{cases}x=-28-15t,\\ y=21+11t.\end{cases}\quad (t为整数)$$

方法四：（同余法）

将方程看成模11的同余式

$11x+15y\equiv7\pmod{11}$.

$\because 15\equiv4\pmod{11}$，而$11x\equiv0\pmod{11}$，

$\therefore 15y\equiv4y\pmod{11}$. 又$7\equiv40\pmod{11}$，

$\therefore 4y\equiv40\pmod{11}$. $\because(11,4)=1$，$\therefore y_0\equiv10\pmod{11}$，即$y=10+11t$代入原方程得$x=-13-15t$.

$$\therefore 通解为\begin{cases}x=-13-15t,\\ y=10+11t.\end{cases}\quad (t为整数)$$

由上可见，二元一次不定方程在无约束条件的情况下，通常有无数组整数解，由于求出的特解的不同，同一个不定方程的通解可具有不同形式，但它们所包含的全部解是一样的。若将通解中的参数t做适当代换，就可化为同一形式。