高中数学常见错解浅析

广 西 教 育 出 版 社

高中数学常见错解浅析

周其恩

广西教育出版社

高中数学常见错解浅析

周其恩

☆

广西教育出版社出版

（南宁市七一路7号）

广西新华书店发行　南宁地区印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/32 3印张 64千字

1988年3月第1版　1988年3月第1次印刷

印　数　1—14,000册

ISBN　7-5435-0239-9/G·190

定价：0.63元

前　言

常看到一些高中学生和自学高中数学的社会青年在作数学习题时，经过一系列似乎合理的推导，却得出了错误的或不完善的结果。这些错漏往往是不易被发觉的。

“错误常常是正确的先导”这句话是有道理的。知道了错在哪里和造成错误的原因，就能更好地了解什么是正确的，有效地防止和纠正错误。这对于掌握知识、培养分析问题和解决问题的能力，无疑是很有帮助的。

本书选择了86个高中数学常见错解，对每个错误题解都作了比较详细的分析，指出错在哪里和错误的原因，进行适当的总结，澄清容易混淆、模糊的地方，并给出正确的解答。

本书可供高中学生和自学高中数学的社会青年阅读，也可供中学数学教师教学参考。由于本人水平所限，书中难免有错误和缺点，恳请读者批评指正。

周其恩

目 录

一 代 数

（一）恒等变形和方程

1．填空：已知

$$A=\{(x, y)\mid 2x+3y=8\},$$
$$B=\{(x, y)\mid 2x+3y=10\},$$

则$A\cap B=$ ____．

错解：$\{\varnothing\}$．

分析：$\because \begin{cases} 2x+3y=8 \\ 2x+3y=10 \end{cases}$是矛盾方程组，

$\therefore A\cap B=\varnothing$，因而填$\{\varnothing\}$是错误的．

造成这个错误的原因是，对集合的概念没有深刻理解，把$\varnothing$和$\{\varnothing\}$混淆了．有时候解一些看来十分简单的题目，却得出错误的、甚至荒谬的结果，这往往是由于对基本概念没有搞清造成的．

2．选择题：方程$x^2+34=y^2$的整数解集正好是以下第____小题的正确答案．

（1）若$A=\{x\mid |2x+1|>|4-x|, x\in Z\}$，$B=\{x\mid |x-1|<2, x\in Z\}$，$C=\{x\mid |x+5|<7, x\in Z\}$则$(A\cap B)\cup(A\cap C)=$（ ）．

①$\{-6, 2\}$；②$\{12, -6\}$；③$\varnothing$；④$\{2, -6\}$

（2）方程$\cos x-2=0$的解集是（ ）．

① $\{x|x=2n\pi\pm\arccos 2,\ n\in Z\}$；

② $\varnothing$；

③ $\{x|\cos x=2\}$。

错解：（1）③。

分析：解这样的选择题，必须认真审题，搞清题目的要求，对这个题目来说，经分析知道，$x^2+34=y^2$没有整数解，即解集是$\varnothing$。再注意题目中的"正确"二字，这就是说，要求的答案必须是某小题的正确答案。（1）③和（2）②虽然都是$\varnothing$，但只有（2）②是正确的。

解这个题目，如果把（1）、（2）两个题中的答案一一求出来，再把其结果一一代入原方程中检验，那是很繁琐的。正确的解法是：首先断定方程$x^2+34=y^2$的整数解集是$\varnothing$，然后再看各小题的答案，发现（1）③和（2）②是$\varnothing$。再进一步考察这两个中哪个是（1）或（2）正确的解，即可得到正确的答案。

3．若$\frac{y+z}{x}=\frac{z+x}{y}=\frac{x+y}{z}=k$，求k的值。

错解：由等比定理，得

$$\frac{y+z}{x}=\frac{y+z+z+x+x+y}{x+y+z}=\frac{2(x+y+z)}{x+y+z}=k,$$

而 $\frac{2(x+y+z)}{x+y+z}=2$。

$\therefore k=2$。

分析：错解忽略了$x+y+z=0$的情况，当$x+y+z=0$时不能断定$k=2$。

正确解法：（1）当$x+y+z\neq 0$时，

$$k=\frac{y+z+z+x+x+y}{x+y+z}=2;$$

（2）当$x+y+z=0$时，则　$y+z=-x$，则

$$\frac{y+z}{x}=\frac{-x}{x}=-1.$$（由原题可知$x\neq 0$）

$\therefore k=1$。

4．已知$2\lg(p-2q)=\lg p+\lg q$，求$p:q$。

错解：由已知条件可得

$$\lg(p-2q)^2=\lg(pq)，即\quad (p-2q)^2=pq.$$

化简、整理，得

$$p^2-5pq+4q^2=0.$$

左边分解因式，得

$$(p-q)(p-4q)=0.$$

$\therefore\quad p-q=0$，或$p-4q=0$。

由　$p-q=0$，可得　$p:q=1$；

由　$p-4q=0$，得　$p:q=4$。

分析：错解忽略了所求结果必须使原式有意义这个原则。我们知道，零和负数无对数。而$p:q=1$和$p:q=4$是否都能使原式左式中真数为正数呢？由原式明显可知，$p>0$，$q>0$，由$p:q=1$可知$p=q$，则$p-2q<0$，$2\lg(p-2q)$无意义，只有当$p:q=4$时，才能满足原式。

这说明解题时，要全面考虑，不能求出答案就算了事，还应该审查答案是否符合原题的要求，选取正确的答案。

5．当m是什么自然数时，方程

$$x^2+(2m-1)x+\frac{1}{2}(3\cdot 1+3\cdot 2+\cdots\cdots+3\cdot m)=0$$有两个负数根。

错解：$\because\quad 3\cdot 1+3\cdot 2+\cdots\cdots+3\cdot m$

$$=3(1+2+\cdots\cdots+m)$$

$$=\frac{3\times(1+m)m}{2}=\frac{3m+3m^2}{2},$$

∴ 原方程可变形为

$$x^2+(2m-1)x+\frac{1}{4}(3m+3m^2)=0,$$

即 $4x^2+4(2m-1)x+3m+3m^2=0$。

设原方程的二根为x_1和x_2，则由一元二次方程根与系数的关系，得

$$x_1+x_2=-\frac{4(2m-1)}{4}=-2m+1,$$

$$x_1x_2=\frac{1}{4}(3m+3m^2).$$

由已知条件，知 $x_1<0$，$x_2<0$，

∴ $x_1+x_2<0$，$x_1x_2>0$。

$$\therefore \begin{cases}-2m+1<0,\\ \frac{1}{4}(3m+3m^2)>0,\end{cases}$$

$$即 \begin{cases}2m-1>0,\\ m+m^2>0.\end{cases}$$

解这个不等式组，得 $m>\frac{1}{2}$。

∴ 当$m>\frac{1}{2}$时，即m为1，2，3，……时，（全部自然数），方程有两个负数根。

分析： 把$m=1$代入原方程，所得的方程没有实数根，说明上面的答案是错误的。发生错误的原因是，忽略了使一元二次方程有实数根的充要条件$\Delta\geqslant 0$。

正确解法：

$$\Delta=[4(2m-1)]^2-4\times 4(3m+3m^2)$$
$$=16(4m^2-4m+1)-16\times 3m-16\times 3m^2$$
$$=16m^2-112m+16\geqslant 0,$$

即　$m^2-7m+1\geqslant 0$.

解这个不等式，得

$$m\geqslant\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\text{或}\quad m\leqslant\frac{7-3\sqrt{5}}{2}.$$

结合上面得到的$m>\frac{1}{2}$可知：当m是大于7的自然数时原方程有两个负数根.

6．若方程$x^2+(m-2)x+(5-m)=0$的二根都比2大，求实数m的取值范围.

错解：设原方程的两根分别为x_1、x_2，由已知条件可得

$$\begin{cases}x_1>2,\\x_2>2,\\\Delta\geqslant 0,\end{cases}$$

$$\therefore\quad\begin{cases}x_1+x_2=-(m-2)>4,\\x_1\cdot x_2=5-m>4,\\(m-2)^2-4(5-m)\geqslant 0.\end{cases}$$

$$\text{解得}\begin{cases}m<-2,\\m<1,\\m\geqslant 4\text{或}m\leqslant -4.\end{cases}$$

∴　实数m的取值范围是$m\leqslant -4$.

分析：我们令$m=-5$时，原方程可变为

$$x^2-7x+10=0.$$

解这个方程，得　$x_1=2$，$x_2=5$，不符合原题设条件.

发生这个错误的原因是，把充分条件当作必要条件了.

$\begin{cases}x_1>2\\x_2>2\end{cases}$是$\begin{cases}x_1+x_2>4\\x_1x>4\end{cases}$的充分条件，而不是必要条件．因此$m\leqslant -4$不能保证$x_1>2$，$x_2>2$.

下面我们将反复说明把充分条件作为必要条件，或把必

要条件作为充分条件所造成的危害。充分、必要条件是一个重要概念，必须搞清。

正确解法： 设原方程的两根分别x_1、x_2，由已知条件得不等式组

$$\begin{cases} x_1-2>0, \\ x_2-2>0, \\ \Delta\geqslant 0. \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} (x_1-2)+(x_2-2)=(x_1+x_2)-4>0, \\ (x_1-2)(x_2-2)=x_1x_2-2(x_1+x_2)+4>0, \\ (m-2)^2-4(5-m)\geqslant 0. \end{cases}$$

根据一元二次方程根与系数的关系，有

$$x_1+x_2=-(m-2),\quad x_1x_2=5-m.$$

$\therefore$ 上面的不等式组可变为

$$\begin{cases} -(m-2)-4>0, \\ 5-m+2(m-2)+4>0, \\ m^2-16\geqslant 0. \end{cases}$$

解这个不等式组，得

$$\begin{cases} m<-2, \\ m>-5, \\ m\geqslant 4 \text{或} m\leqslant -4. \end{cases}$$

$\therefore$ m的取值范围是$-5<m\leqslant -4$。

另解： 令 $x=y+2$，并代入原方程，整理后得

$$y^2+(m+2)y+(m+5)=0.$$

由已知条件可知，这个方程的根大于零，

$\therefore$ $y_1+y_2=-(m+2)>0$，即$m+2<0$，

$y_1y_2=m+5>0$，

$\Delta = m^2 - 16 \geqslant 0$.

解不等式组 $\begin{cases} m+2<0, \\ m+5>0, \\ m^2-16 \geqslant 0, \end{cases}$

得 $-5 < m \leqslant -4$.

7. 已知$x^2+ax+b=0$的两根是a、b，求a和b的值。

错解：把a、b分别代入原方程，得方程组

$$\begin{cases} a^2+a^2+b=0, & ① \\ b^2+ab+b=0. & ② \end{cases}$$

由②，得 $b(b+a+1)=0$.

$\therefore$ $b=0$，或 $b+a+1=0$，

$\therefore$ $b_1=0$，$b_2=-a-1$. ③

把$b=0$代入①，得 $a=0$；

把$b=-a-1$代入①，得 $2a^2-a-1=0$.

解之，得 $a=1$或$a=-\frac{1}{2}$.

再把$a=1$和$a=-\frac{1}{2}$代入③，得

$$b=-2 \quad 或 \quad b=-\frac{1}{2}.$$

$$\therefore \begin{cases} a=0, \\ b=0; \end{cases} \quad \begin{cases} a=1, \\ b=-2; \end{cases} \quad \begin{cases} a=-\frac{1}{2}, \\ b=-\frac{1}{2}. \end{cases}$$

分析：当$a=b$时，方程组中的①和②就相同了。这时，两方程的根相同。因此方程组仅是方程$x^2+ax+b=0$的两根是a和b的必要条件，而题解中却当作充要条件运用了。实际上当$a=-\frac{1}{2}$，$b=-\frac{1}{2}$时，原方程变为$x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=0$.

这时方程的两根为$-\frac{1}{2}$和1，而不是$-\frac{1}{2}$和$-\frac{1}{2}$。只有当$a\neq b$时，方程组才是充要条件。

正确解法：当$a=b$时，

$$\begin{cases} a^2+a^2+b=0, \\ \Delta=a^2-4b=0. \end{cases}$$

解之得 $\begin{cases} a=0, \\ b=0; \end{cases}$

当$a\neq b$时，有

$$\begin{cases} a^2+a^2+b=0, \\ b^2+ab+b=0. \end{cases}$$

解之，得 $\begin{cases} a=1, \\ b=-2. \end{cases}$

8．当k是什么实数时，方程$7x^2-(k+13)x+k^2-k-2=0$有两个不相等的实数根？如果要求两根分别在开区间（0，1）和（1，2）内，则k必须满足什么条件？

错解：∵方程有两个不相等的实数根，∴方程的判别式$\Delta>0$，即

$$[-(k+13)]^2-4\times7\times(k^2-k-2)$$
$$=-27k^2+54k+225>0.$$

解这个不等式，得

$$1-\frac{2\sqrt{21}}{3}<k<1+\frac{2\sqrt{21}}{3}.$$

则当$1-\frac{2\sqrt{21}}{3}<k<1+\frac{2\sqrt{21}}{3}$时，方程$7x^2-(k+13)x+k^2-k-2=0$有两个不相等的实数根。

若要求方程两根分别在开区间（0，1）和（1，2）内，设两根分别为x_1和x_2，则

（Ⅰ）$\begin{cases} 0<x_1<1, \\ 1<x_2<2. \end{cases}$　　（Ⅱ）$\begin{cases} 1<x_1+x_2<3, \\ 1<x_1x_2<2. \end{cases}$

由一元二次方程根与系数的关系，知

$$x_1+x_2=\frac{k+13}{7},\quad x_1x_2=\frac{k^2-k-2}{7},$$

$$\therefore \begin{cases} 1<\dfrac{k+13}{7}<3, \\ 0<\dfrac{k^2-k-2}{7}<2. \end{cases}$$

解这个不等式组，得

$$\frac{1-\sqrt{65}}{2}<k<-1 \text{ 或 } 2<k<\frac{1+\sqrt{65}}{2}.$$

再考虑到前面的$1-\dfrac{2\sqrt{21}}{3}<k<1+\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$，得

$$\frac{1-2\sqrt{21}}{3}<k<-1 \text{ 或 } 2<k<1+\frac{2\sqrt{21}}{3}.$$

分析：我们看这个结果是否正确。当$k=4$时，满足

$$2<k<1+\frac{2\sqrt{21}}{3},$$

把$k=4$代入原方程，得

$$7x^2-17x+10=0.$$

解此方程，得

$$x_1=1,\quad x_2=\frac{10}{7}.$$

$x_1=1$不满足题设条件$0<x_1<1$，说明题解是错误的，错在哪里呢？我们通过观察可以发现方程组（Ⅱ）仅是

（Ⅰ）的必要条件而不是充分条件，但这个题解中却当作充分条件运用了，所以发生了错误。

正确解法：由$\Delta>0$，得

$$1-\frac{2\sqrt{21}}{3}<k<1+\frac{2\sqrt{21}}{3};$$

由求根公式，得

$$x_1=\frac{k+13-3\sqrt{-3k^2+6k+25}}{14},$$

$$x_2=\frac{k+13+3\sqrt{-3k^2+6k+25}}{14};$$

由$0<x_1<1$，$1<x_2<2$得

$$0<\frac{k+13-3\sqrt{-3k^2+6k+25}}{14}<1, \quad ①$$

$$1<\frac{k+13+3\sqrt{-3k^2+6k+25}}{14}<2. \quad ②$$

在$\Delta>0$的情况下，解①，得

$$2<k<4 \text{ 或 } 1-\frac{2\sqrt{21}}{3}<k<-1;$$

解②，得 $3<k<4$ 或 $-2<k<0$.

最后结论是：当$1-\frac{2\sqrt{21}}{3}<k<1+\frac{2\sqrt{21}}{3}$时方程有两个不相等的实数根；如果方程两根在开区间$(0,1)$和$(1,2)$内，则$k$必须满足条件$3<k<4$或$-2<k<-1$.

9. 已知方程$x^2+2x+\lg(2a^2-a)=0$有一正根和一负根，求实数a的取值范围.

错解：由题设条件知，方程二根中一正一负所以两根之积小于零. 又根据一元二次方程根与系数的关系，得

$$\lg(2a^2-a)<0.$$

$\therefore \quad 2a^2-a<1$，即 $(a-1)(2a+1)<0$。

解此不等式，得 $-\frac{1}{2}<a<1$。

则当 $-\frac{1}{2}<a<1$ 时，原方程有一正根和一负根。

分析：在 $-\frac{1}{2}<a<1$ 的范围内取 $a=0$ 时，$\lg(2a^2-a)$ 无意义，这说明题解有错误。这是怎样产生的呢？首先题解没有考虑到，对于一元二次方程来说，只有其判别式 $\Delta \geqslant 0$ 时，才有不相等的实数根；二是忽略了对数中真数必须大于零这个重要条件。

正确解法：由 $\Delta>0$，得

$$4-4\lg(2a^2-a>0, \qquad ①$$

由对数的真数大于零，得 $2a^2-a>0$， ②

由一元二次方程根与系数的关系，得

$$\lg(2a^2-a)<0。 \qquad ③$$

由①得 $-2<a<\frac{5}{2}$，

由②得 $a>\frac{1}{2}$ 或 $a<0$，

由③得 $-\frac{1}{2}<a<1$。

$\therefore$ 当 $-\frac{1}{2}<a<0$ 或 $\frac{1}{2}<a<1$ 时，原方程有一正根和一负根。

10。解方程 $\lg x^2+\lg x^8=10$。

错解：把原方程化为 $2\lg x+8\lg x=10$，

即 $10\lg x=10$， $\lg x=1$。

$\therefore \quad x=10$。

分析：题解忽略了绝对值相同，符号相反的数的偶次乘方结果相同，所以发生了失根的现象。即解题过程中，缩小了未知数的允许值的范围：对于$\lg x=1$来说，$x>0$；而对原方程来说，$x>0$或$x<0$。

正确解法：把原方程化为　$\lg x^2+4\lg x^2=10$。

即　$5\lg x^2=10$，　$\lg x^2=2$。

∴　$x^2=100$，　$x=\pm 10$。

11.　解方程　$z^3=z$

错解：对方程两边取对数，得

$$3\lg z=\lg z,$$

即　$2\lg z=0$，　$\lg z=0$，

∴　$z=1$。

分析：我们换一种解法。由原方程得：

$$z^3-z=0$$

即　$z(z^2-1)=0$，　$z(z+1)(z-1)=0$。

∴　$z_1=0$，$z_2=-1$，$z_3=1$。

这说明解这种类型的方程，用取对数的方法，有可能引起失根。

一般说来，方程$f_1(x)=f_2(x)$与方程$\lg f_1(x)=\lg f_2(x)$是不同解的。这是因为对于方程$\lg f_1(x)=\lg f_2(x)$必须适合条件$f_1(x)>0$，$f_2(x)>0$，而对方程$f_1(x)=f_2(x)$就没有这个限制。

在解方程的过程中如果扩大了未知数允许值的范围，有可能产生增根；缩小了未知数允许值的范围，则可能产生丢根。所以解方程时要注意这两种情况。

12. 若$\sin\theta$和$\cos\theta$是方程 $8x^2+6mx+2m+1=0$的两个根，求m的值。