中学数学高考辅导报告集

西安市数学会
高考数学辅导报告团

西安交通大学出版社

中学数学高考辅导报告集

西安市数学会高考数学辅导报告团

西安交通大学出版社

简　介

本书汇集了西安市数学会高考数学辅导报告团的十个专题报告，内容包括代数四讲，立体几何一讲，解析几何三讲，三角一讲，选择题解法一讲。辅导报告结合大量典型例题的分析，着重讲透概念、引导思路、优化方法，培养读者分析问题和解答问题的能力。本书是中学数学总复习的指南，可供中学应届毕业生学习，也可供各中学在校师生参考。

中学数学高考辅导报告集

西安市数学会高考数学辅导报告团

西安交通大学出版社出版

(西安市咸宁路28号)

*

西安交通大学出版社印刷厂排版

陕西机械学院印刷厂印装

陕西省新华书店发行　　各地新华书店经售

*

开本 787×1092　1/32　印张 6.75　字数 143 千字

1985年3月第一版　1985年3月第一次印刷

印数：1—100,000

统一书号：7340·24　定价：0.87 元

序　　言

为了配合高中阶段的数学总复习，西安市数学会于一九八四年组成高考数学辅导报告团，聘请西安市部分中学有经验的教师担任主讲，分别在市区和郊县一些中学巡迴辅导100多场．所到学校的师生，对报告团深入浅出、生动活泼的演讲，普遍反映效果良好．

为了满足更多学校师生的要求，特将报告团的讲稿整理成集，正式出版，以飨读者．在这个册子里共收集了十个专题，包括代数四讲、三角一讲、立体几何一讲、解析几何三讲、选择填空题解法一讲．

整理后的讲稿内容，条理清晰，重点突出，例题典型，方法灵活，分析透彻，以起到开拓思维和培养解题能力的作用．

这本小册子可以很好地指导中学毕业生和在职职工搞好中学阶段数学总复习．这本小册子也是数学教师的一本好参考书，它可以帮助大家交流教学经验，改进教学方法，提高数学教学质量．这本小册子是参加辅导报告的老师们的数学教育科学研究的论文，这项工作是他们进行教育科学研究的良好开端．我希望他们的研究成果能引起数学教育工作者的重视，以促进数学教育科学更快地发展．

中国教育学会数学教学研究会理事长　魏庚人

一九八五年元月八日

目　录

第一讲　怎样解答选择题

刘崇理(西安市二中)　张致和(西安市八十三中)

数学中的选择题，是近几年来新兴的一种命题形式，它以题型的丰富、新颖赢得了广大师生的欢迎．由于这类题目给出的条件和答案的多变，为考生提供了多种判断和解题的思路．选择题涉及的基础知识面广，检查的覆盖面宽，因而有利于较全面地考查学生基本概念和基础知识的掌握情况和检验学生分析判断问题的能力．

选择题从形式上可分为：

发散型：由少量的条件导出多个结论；

收敛型：由多个条件导出少量的结论；

平行型：由多个条件与多个结论组成，要求应试者分析判断，找出两者的某种对应关系．

从性质上可分为：

定性型：确定某些数学问题性质的题目；

定量型：确定某些量值大小的题目；

混合型：定性和定量二者兼而有之的题目；

目前流传较广的选择题多属于发散型，其中包括定性发散型、定量发散型、混合发散型．考生如果不能因题而异去选择最佳解法，而是千篇一律地按照常规题目解答，不仅繁琐费时，甚至不得其解．针对这种情况，下面介绍几种解答选择题的方法，供读者参考．

一、概 念 判 断 法

此类选择题，要求学生有扎实的基础知识，解题时不推导、不计算，只要一看二想三判断即可。

例 1 下面各式中正确的是：

（A） $\overline{\bar{A}\cup\bar{B}}=\overline{A\cup B}$； （$B$） $\overline{\bar{A}\cup\bar{B}}=\bar{A}\cap\bar{B}$；

（C） $\overline{\bar{A}\cup\bar{B}}=\overline{A\cap B}$； （$D$） $\overline{\bar{A}\cup\bar{B}}=A\cap B$，

看到以上四个不同形式的式子，立即要联想到在“集合”一单元的学习中，好几处要求学生验证 $\bar{A}\cup\bar{B}=\overline{A\cap B}$ 与 $\bar{A}\cap\bar{B}=\overline{A\cup B}$，（这实际是集合运算的德·摩根定律）只要对 $\bar{A}\cup\bar{B}=\overline{A\cap B}$ 非常熟悉，即可判断出 $\overline{\bar{A}\cup\bar{B}}=A\cap B$ 是正确的，所以应选（D）.

例 2 已知等腰$\triangle ABC$，底边 BC 及高 AD 都是整数，那么$\sin A$和$\cos A$中：

（A） 一个是无理数，另一个是有理数；

（B） 两个都是有理数；

（C） 两个都是无理数；

（D） 有几个有理数无法确定.

此题是判断等腰 $\triangle ABC$ 的顶角A 的正余弦值的性质，给出的条件是底 BC、高 AD 都是整数，不难用它们表示出半角$\frac{A}{2}$的正切$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{BC/2}{AD}$，它显然是一个有理数．至此，由万能代换公式推想到$\sin A$、$\cos A$都是用$\operatorname{tg}\frac{A}{2}$的有理分函数的形式给出，所以它们的值都应是有理数，故应选择（B）.

此题也可以由三角形面积得 $AB^2\sin A = AD\cdot BC$，AD、BC 是整数，$AB^2 = AD^2+\left(\frac{BC}{2}\right)^2$ 是有理数，所以 $\sin A$ 必是有理数；再由余弦定理 $\cos A=\frac{2AB^2-BC^2}{2AB^2}$ 而知 $\cos A$ 也是有理数.

∴ (B)正确

例 3 与空间不共面的四点距离相等的平面有：

(A) 3 个； (B) 4 个； (C) 6 个；

(D) 7 个； (E)其它.

分析这个问题，首先要把空间不共面的四个点，看作一个三棱锥的四个顶点，使问题直观化、形象化，这样有助于进一步深入探讨. 不少人做这个题时，仅想到三棱锥的中截面具有到四个顶点等距离的性质，于是，把四个点分别看作顶点，它所对的面看作底面，认为共有四个不同的中截面. 选择答案(B). 这样做是有漏洞的.

大家知道，和两条异面直线等距离的平面是存在且是唯一的. 这是一个非常重要的空间概念，如图 1-1 所示. 在三棱锥 $ABCD$ 中，过 AC、BC、AD 的中点的截面就是与异面直线 AB、CD 平行且距离相等的一个平面. 六条棱中，不同的异面直线共有三对，即 AB 与 CD、AC 与 BD、AD 与 BC，所以，此类截面共有三个.

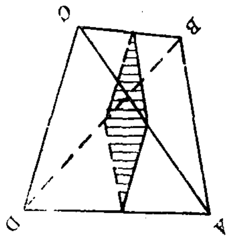

图 1-1

综上，合乎题设条件的平面共有七个，故应选(D).

例 4 对所有满足 $1\leqslant n\leqslant m\leqslant 5$ 的 m、n，极坐标方程 $\rho=\dfrac{1}{1-C_m^n\cos\theta}$ 表示的不同双曲线条数是：

$(A)15$； $(B)10$； $(C)7$； $(D)6$.

要对此题作出准确判断，首先要搞清以下几个基本概念：

(1) 极坐标系下圆锥曲线的统一方程 $\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$，特别当 $e>1$ 时，表示双曲线；

(2) 对极坐标方程 $\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$，若 p 固定，对 e 来说，取不同的正实数表示不同的曲线；

(3) 组合数 C_m^n 中：m、n 间的关系是 $m\geqslant n$；

(4) 组合数的性质定理 1，即 $C_m^r=C_m^{m-r}$.

在条件 $1\leqslant n\leqslant m\leqslant 5$ 下，写出所有的组合数：

C_1^1，C_2^1，C_2^2，C_3^1，C_3^2，C_3^3，C_4^1，C_4^2，C_4^3，C_4^4，C_5^1，C_5^2，C_5^3，C_5^4，C_5^5，

其中，$C_1^1=C_2^2=C_3^3=C_4^4=C_5^5=1$.

此时，$\rho=\dfrac{1}{1-C_m^n\cos\theta}$ 表示抛物线，故舍去；

又其中，$C_3^1=C_3^2$，$C_4^1=C_4^3$，$C_5^1=C_5^4$，$C_5^2=C_5^3$.

所以只有当 e 分别为

C_2^1，C_3^1，C_4^1，C_4^2，C_5^1，C_5^2 时，极坐标方程 $\rho=\dfrac{1}{1-C_m^n\cos\theta}$ 表示不同的双曲线，其条数是 6.

故(D)正确.

二、直接求解对答法

从条件入手，直接求解，是解答数学问题的普遍方法．对于一大类选择题，直接求解对答法是解题的一种非常重要的手段．该推理的要严密推理，该计算的要仔细计算．否则，自己会毫无觉察地选中错误答案。

（一）紧抓条件，严密推理，顺蔓摸瓜

题目的条件与结论往往距离甚大，不能轻易肯定或否定，应该紧抓条件，据理分析，发现突破口，步步深入，顺蔓摸瓜．

例 5 三个正整数 a、b、c 满足条件：

甲 $a<b<c<30$；

乙 以某一正整数为底，$a(2b-a)$ 与 $c^2+60b-11a$ 的对数分别是 9 和 11．

则 $a+c-2b$ 的值为：

(A) 4； (B) 2； (C) 0； (D) -2； (E) -4．

设某一正数为 x，则

$$\log_x[a(2b-a)]=9，即\ x^9=a(2b-a) \quad ①$$

$$\log_x(c^2+60b-11a)=11，即\ x^{11}=c^2+60b-11a \quad ②$$

由甲知，b 最大取 28，a 最大取 27，由式①得

$y=a(2\times28-a)=-a^2+56a=-(a-28)^2+784$，

$y_{max}=783$，即 $a(2b-a)$最大取 783．

由于 $x\neq1$，又 x 取 3 时，$3^9>783$，

$\therefore$ $x=2$，即 $a(2b-a)=2^9$．

由此式可知 a 应是 2 的幂．

a 若取 2^1 或 2^2，b 的值均超过 28；

$a=2^3$ 时，$b=28$，由甲可知 $c=29$，把这三个值代入②检查，左边为偶数，右边为奇数，不能成立；

$a=2^4$ 时，$2b-a=2^5$，解出 $a=16$，$b=24$，代入②得 $c=28$.

根据本题条件和以上分析，a、b、c 只有上述一组解。

则 $a+c-2b=-4$，故(E)正确.

（二） 直接计算，对照答案

一般来说，定量的问题，要通过计算才能作出准确判断.

例 6 小于50000且含有奇数个数字“5”的五位数共有：

(A) 2952个； (B) 11808个； (C) 16160个；

(D) 26568个； (E) 361060个.

从结果看，361060>50000，26568已超过50000的一半，所以(D)、(E)肯定不对，予以排除；(A)、(B)、(C)哪个正确无法直接判断，只好计算.

当首位数排1，并在五个数码中有一个“5”的合乎条件的数共有 $C_4^1\times9^3$ 个；

当首位数排1，并在五个数码中有三个“5”的合乎条件的数共有 $C_4^3\times9^1$ 个；

当首位数分别排2、3、4时，与上面排1的两种情况相同.

故 符合题设条件的数共有：

$$4\times(C_4^1\times9^3+C_4^3\times9^1)=11808(个)$$

应选取(B).

例 7 若动点 $p(x,y)$ 以等角速度 ω 在单位圆上逆时针

运动，则点 $Q(-2xy,\ y^2-x^2)$的运动方式是：

（A） 以角速度 ω 在单位圆上顺时针运动；

（B） 以角速度 ω 在单位圆上逆时针运动；

（C） 以角速度 2ω 在单位圆上顺时针运动；

（D） 以角速度 2ω 在单位圆上逆时针运动.

由题的条件看，Q 点的坐标与 p 点的坐标有密切关系，而 p 点运动规律遵循参数方程

$$\begin{cases} x=\cos\omega t \\ y=\sin\omega t \end{cases}$$

其中 t 为时间参数. 如果我们令 Q 点的坐标为$(x',\ y')$，则有

$$x'=-2xy=-2\cos\omega t\sin\omega t=-\sin 2\omega t,$$

$$y'=y^2-x^2=\sin^2\omega t-\cos^2\omega t=-\cos 2\omega t$$

根据诱导公式可变形为

$$\begin{cases} x'=\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-2\omega t\right) \\ y'=\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-2\omega t\right) \end{cases}$$

这就是 Q 点的运动规律所遵循的参数方程. 由这个方程可以看出，Q 点在单位圆上运动，它的起始位置是 $\dfrac{3\pi}{2}$，是角速度为 -2ω 的匀速圆周运动. 因为 p 点是以 ω 的等角速度在单位圆上做逆时针的运动，所以 Q 点便是以 2ω 的等角速度，在单位圆上做顺时针的运动.

故结论中的(C)正确.

（三） 分离条件，直接判断

有些选择题中所给出的几个数学命题，从表面上难于判

断它们之间的某种关系，如果仔细地挖掘其隐蔽的附加条件，它们之间的关系将豁然明白.

例 8 已知 $A=\{(x,y)\mid(x-1)^2+y^2=1\}$

$$B=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{y}{x}\cdot\frac{y}{x-2}=-1\right\}$$

$$C=\left\{(\rho,\theta)\,\middle|\,\rho=2\cos\theta,\theta\neq\frac{k\pi}{4},\ k\in z\right\}$$

$$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{cases}x=1+\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases},\ \theta\neq k\pi,\ k\in z\right\}$$

则 (A) $A=B$； (B) $B=D$；

(C) $A=C$； (D) $B=C$.

如果不考虑附加条件，A、B、C、D 中的方程均可化为 $(x-1)^2+y^2=1$，很难判断哪两个集合是相等的.

由各个集合中方程的特点和所附加的条件，不难分离出各自应同时满足的条件是：

A：$0\leqslant x\leqslant 2$，且 $-1\leqslant y\leqslant 1$；

B：$0<x<2$，且 $-1\leqslant y<0$，$0<y\leqslant 1$；

C：$0<x<1$，$1<x<2$，且 $-1<y<0$，$0<y<1$；

D：$0<x<2$，且 $-1\leqslant y<0$，$0<y\leqslant 1$.

由此知，$B=D$，故应选择(B).

（四） 通过绘图，直接判断

有的选择题，如果注意形数结合，绘制出表示数学命题的直观图形，使问题形象化，将有利于作出准确的判断.

例 9 对上面的例 8，如若绘制出下列各图(图 1-2)，结论则显而易见.

例10 平面上有 15 条直线，其中有 5 条共点，它们最

多能将平面划分成的区域数为：

(*A*)111；(*B*)114；(*C*)115；(*D*)118；(*E*)121.

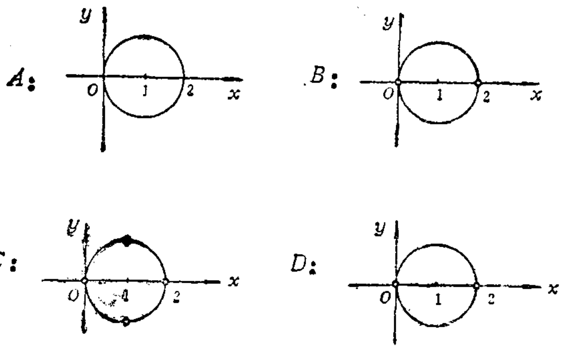

图 1-2

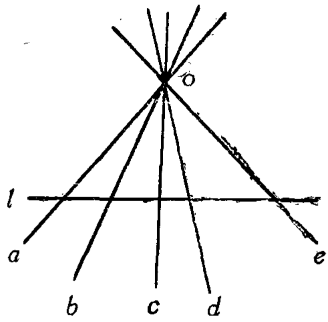

图 1-3

我们用画图来分析(图1-3)：

若直线 a、b、c、d、e 交于 0 点，它们将平面分成了 10 个区域，再增加一条直线 l，为了使分出的平面区域数最大限度的增加，l 必须和原来的 5 条直线都相交，这样，l 就最多能被截成 6 段，每一段把它所在的原平面区域又分成了两块．因此，新增加一条直线 l，平面区域最多增加 6 块，如果再增加一条直线，平面区域最多增加 7 块，依此类推，到添上第 15 条直线时，平面区域最多比此前增加 15 块，这样，整个平面最多可被分成的区域数是

$$10+6+7+8+\cdots+15=10+\frac{10\times(6+15)}{2}=115(\text{块})$$

故应选择(C).

（五） 根据空间想象，直接判断

由平面到空间，在人的思维想象上产生了一个大的飞跃．对于有关空间问题，只有借助于丰富的空间想象能力，才能使问题得到解决．

例11 正四面体的内切球球心到一个面的距离等于这个四面体的高的：

(A) $\frac{1}{2}$； (B) $\frac{1}{3}$； (C) $\frac{1}{4}$； (D) $\frac{1}{5}$．

有人套用等边三角形中心的性质，判断这个题目的答案，得出内切球球心到一个平面的距离等于正四面体高的$\frac{1}{3}$，选择(B)，这是错误的．

我们把内切球心与正四面体各个顶点连结起来，这个正四面体可以看成是以内切球球心为顶点，各个面为底面的四个正三棱锥拼合而成．这四个正三棱锥又是等积的，所以每一个的体积是原正四面体体积的$\frac{1}{4}$，把原正四面体叫作大三棱锥，大三棱锥与每个小棱锥的底面相同，所以小三棱锥的高应是大三棱锥高的$\frac{1}{4}$．故答案中的(C)正确．

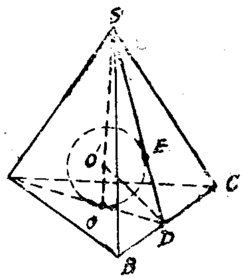

图 1-4

此题也可以用如下方法求解：

如图 1-4 所示，设内切球 O' 切面 SBC 于 E；切面 ABC 于 O．E、O 分别为$\triangle SBC$ 和$\triangle ABC$ 的中心，连接

SE、AO 并延长交于 BC 上的 D 点，再连接 SO（过 $0'$）和 $0'D$，则 $0'D$ 平分 $\angle SDO$，

$$\therefore \quad \frac{SO'}{0'0}=\frac{SD}{OD}=\frac{3}{1}$$

故 $\quad 0'0=\frac{1}{4}SO$ ，$\quad \therefore$ 应选(C)

（六） 借助逆推，直接判断

对某些需要判断大小关系的问题，特别是包含根式、绝对值或对数等符号的式子，不好直接比较大小，我们可采用一个待定符号"$\vee$"，先把它们连结起来，再进行等价变形，变形到两边的大小关系明朗化时，问题即可解决．

例12 设 a、b、c、d、m、n 都是正实数，

$$P=\sqrt{ab}+\sqrt{cd}, \qquad Q=\sqrt{ma+nc}\sqrt{\frac{b}{m}+\frac{d}{n}}$$

则

$(A)P\geqslant Q$； $(B)P\leqslant Q$； $(C)P<Q$

$(D)P$、Q 大小不定，与 m、n 的大小有关．

用待定符号"$\vee$"把 p、Q 连结起来：

$$\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\vee\sqrt{ma+nc}\sqrt{\frac{b}{m}+\frac{d}{n}}$$

那么 $\quad ab+2\sqrt{abcd}+cd\vee(ma+nc)\left(\frac{b}{m}+\frac{d}{n}\right)$

即 $\quad ab+2\sqrt{abcd}+cd\vee ab+\frac{n}{m}bc+\frac{m}{n}ad+cd$

$$2\sqrt{abcd}\vee\frac{n}{m}bc+\frac{m}{n}ad$$

但 $\quad 2\sqrt{abcd}\leqslant\frac{n}{m}bc+\frac{m}{n}ad$ 是成立的，

$\therefore\quad P\leqslant Q$，故应选取$(B)$.

注意：如果在变形过程中，两边同乘以负数时，把"$\vee$"变为"$\wedge$"即可.

三、答案代入验证法

对判断方程、方程组或不等式的解的选择题，若直接解方程或不等式将是比较麻烦的．有些问题，只要将所给的答案代入验证，即可轻而易举地作出判断．当然，在代入答案的过程中要注意运用简捷的方法.

例13 方程$\sqrt{7x-3}+\sqrt{x-1}=2$的解是：

(A) $x=3$； (B) $x=\frac{3}{7}$； (C) $x=2$；

(D) $x=1$； (E) $x=0$.

此方程若直接求解，须经两次平方，将费时不少．我们采用答案代入来验证：

显然，$x=0$，$x=\frac{3}{7}$使$\sqrt{x-1}$失去意义，所以把(B)、(E)淘汰掉．对其余三个答案，不难看出$x=1$是原方程的根．故选(D).

例14 满足等式$1983=1982x-1981y$的一组自然数是：

(A) $x=12785$，$y=12768$；

(B) $x=12784$，$y=12770$；

(C) $x=11888$，$y=11893$；

(D) $x=1947$，$y=1945$.

此题若一组一组地直接代入验证，计算量很大，若稍加