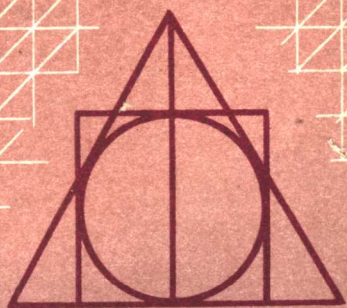


小学教师进修
中等师范教材



算术基础理论

北京教育学院师范教研室
河南省小学教师进修中师数学编写组

封面设计 崔子剑

小学教师进修中等师范教材

算 术 基 础 理 论

北京教育学院师范教研室

河南省小学教师进修中师数学编写组

责任编辑 王春林

河南人民出版社出版

河南第一新华印刷厂印刷

河南省新华书店发行

787×1092毫米32开 12.375印张 260千字

1983年7月第1版 1983年7月第1次印刷

印数：1—245,900册

统一书号7105·337 定价 1.38元

前 言

数学是一门基础学科，是研究科学技术，进行生产建设以及日常生活必不可少的工具。随着科学技术的飞速发展，数学的作用越来越大，因此也越来越需要把数学作为学校教育中必须学好的基础课程。

小学是打基础的阶段，其中重要任务之一，就是切实打好数学基础。因此，在小学把数学作为一门主课，以便学生为进一步学习中学数学、物理、化学等科打下良好基础。而在给小学生打好基础方面，教师起着非常重要的作用。为此，小学数学教师必须认真学习和研究算术基础理论和小学数学教材教法，努力学好这门专业课，掌握从事小学数学教学所必需的数学基础理论知识，以及小学数学教学的原则和方法，具有一定的分析、处理小学数学教材和进行教学的能力。只有这样，才能胜任小学数学教学，使小学数学教学在为我国社会主义现代化建设培养人才打好基础方面，起到它的重要作用。这本《算术基础理论》正是基于这个目的，为小学教师进修中等师范数学编写的。

算术是数学的一个重要分支，主要研究数的概念、性质和运算。本书共分七章，应用集合的观点讨论整数和分数等的基础理论，学习的重点是理解数的意义，学会四则运算，从理论上深入理解小学数学教材的基本算理，提高数学素养，

为正确、有效地进行小学数学教学奠定理论基础。

学习本书时，应注意以下几点：

一、提高学习的自觉性。如上所述，小学教师掌握中师数学的基础知识和基本技能，直接关系到小学数学教学的质量；学好《算术基础理论》是做一名合格的小学数学教师的必要条件。只有认识了这门课程的重要性，端正学习态度，才能积极地自觉地学好这门课程。那种认为“不学也能教好”的想法，不仅妨碍对本课程的进修学习，而且会直接影响小学数学教学质量的提高。因此，在进修中一定要学好这门《算术基础理论》。

二、要勤思考，多练习。学习本书时，对于每一个概念，运算的性质、定律、定理、法则，以及它们之间的联系，都要深刻地理解，牢固地掌握，并形成正确、迅速的运算能力和一定的逻辑思维能力。要以科学的态度，积极思考问题，认真完成作业，练好基本功，切实学好本书的理论知识，并以此指导小学数学教学。

三、要坚持自学，保证质量。小学教师进修学习，具有在职、业余的特点，学员必须认真自学，才能取得良好的学习效果。本书在编写的形式和内容上，力求通俗易懂，深入浅出，有利于自学。要坚持自学，不断改进学习方法，提高学习效果。在学习时间上，要建立严格的自学和听课制度，确保学习时间，保证学习质量。本书中标注“*”号的部分，为函授与在职学员的选学内容。

四、要理论联系实际，学以致用。学习本书，要适当接触小学数学教学实际，加深对小学数学教材理论知识的理解，以便驾驭小学数学教材，提高教学质量。

目 录

前 言	(1)
第一章 集合与映射	(1)
第一节 集合的概念	(1)
一、集合的概念	(1)
二、集合的表示方法	(4)
第二节 集合的包含与相等	(9)
一、包含关系	(9)
二、相等关系	(10)
第三节 集合的运算	(13)
一、并运算	(13)
二、交运算	(16)
三、差运算	(22)
四、补运算	(23)
第四节 映射	(27)
一、映射的概念	(27)
二、一一映射	(30)
第五节 等价集合、基数	(31)
一、等价集合(对等集合)	(31)
二、基数	(33)
小 结	(36)
习题一	(37)

第二章 整数	(39)
第一节 整数的认识	(39)
一、自然数和自然数列	(39)
二、零和扩大的自然数列	(43)
三、十进制计数法	(44)
四、其他进位制	(49)
第二节 整数的加法与减法	(55)
一、整数加法	(55)
二、整数减法	(61)
三、加减法中已知数与未知数之间的关系	(67)
四、已知数的变化所引起的和与差的变化	(68)
五、加减法应用题	(70)
第三节 整数的乘法与除法	(74)
一、整数乘法	(74)
二、整数除法	(84)
三、乘除法中已知数与未知数之间的关系	(93)
四、已知数的变化所引起的积与商的变化	(94)
五、乘除法应用题	(99)
第四节 四则混合运算和速算	(103)
一、运算顺序	(103)
二、速算	(104)
三、应用分解的方法	(105)
第五节 整数四则应用题	(108)
一、应用题的一般概念和分类	(108)
二、解答应用题的步骤	(109)
三、复合应用题的解题思路	(112)

四、典型应用题	(114)
五、应用题的算术解法与代数解法的联系和区别	(125)
小 结	(129)
习题二	(130)
第三章 数的整除性	(135)
第一节 整除、约数和倍数	(135)
一、整除、约数和倍数的意义	(135)
二、充要条件	(136)
三、数的整除性定理	(140)
四、数的整除特征	(143)
第二节 最大公约数和最小公倍数的意义和性质	(152)
一、最大公约数的意义和性质	(152)
二、最小公倍数的意义和性质	(154)
第三节 质数与合数	(159)
一、质数与合数的概念	(159)
二、质数的判定	(161)
三、分解质因数	(162)
第四节 最大公约数和最小公倍数的求法和应用	(166)
一、最大公约数的求法	(166)
二、最小公倍数的求法	(171)
三、最大公约数和最小公倍数的应用题	(173)
第五节 同余的初步知识*	(177)
一、同余的概念和性质	(177)
二、中国剩余定理	(183)

小 结	(186)
习题三	(188)
第四章 分数	(191)
第一节 分数的概念和性质	(191)
一、分数的概念	(191)
二、分数的性质	(195)
三、约分与通分	(198)
四、分数大小的比较	(202)
五、真分数和假分数	(205)
第二节 分数的四则运算	(208)
一、分数加法	(208)
二、分数减法	(216)
三、分数乘法	(221)
四、分数除法	(227)
五、分数四则混合运算	(232)
六、繁分数	(233)
第三节 分数应用题	(238)
一、三种分数基本应用题	(239)
二、比较复杂的分数应用题	(243)
三、工程问题	(247)
小 结	(250)
习题四	(250)
第五章 小数	(256)
第一节 小数的概念和性质	(256)
一、小数的概念	(256)
二、小数的性质	(259)

三、小数大小的比较	(261)
第二节 小数的四则运算	(263)
一、小数的加法和减法	(264)
二、小数乘法	(265)
三、小数除法	(266)
四、有限小数和无限小数	(269)
五、近似数	(271)
第三节 小数与分数	(275)
一、化分数为小数	(275)
二、化小数为分数	(286)
三、分数、小数四则混合运算	(288)
第四节 百分数	(292)
一、百分数的概念	(292)
二、百分数应用题	(293)
第五节 近似计算	(297)
一、误差、精确度与有效数字	(297)
二、近似数的加法和减法	(301)
三、近似数的乘法和除法	(302)
四、近似数的混合运算	(304)
小 结	(308)
习题五	(309)
第六章 量的计量	(311)
第一节 量的概念和计量	(311)
一、量的概念	(311)
二、量的计量	(312)
第二节 计量制度	(314)

一、计量制度的发展概况	(314)
二、公、市制计量单位	(315)
第三节 名数	(321)
一、名数的概念	(321)
二、名数的化法和聚法	(321)
三、名数的四则运算	(323)
四、计算时间的应用题	(326)
小 结	(330)
习题六	(331)
第七章 比和比例	(335)
第一节 比的意义和性质	(336)
一、比的意义	(336)
二、求比的未知项	(338)
三、比的基本性质	(342)
四、反比和连比	(344)
第二节 比例	(346)
一、比例的定义	(346)
二、四个数成比例的充要条件	(347)
三、解比例	(251)
四、诱导比例	(353)
第三节 成比例的量	(357)
一、成正比例的量	(358)
二、成反比例的量	(361)
第四节 比例应用题	(364)
一、正(反)比例问题	(364)
二、按比例分配的问题	(369)

*三、混合比例问题	(373)
小 结	(377)
习题七	(380)

第一章 集合与映射

集合与映射，是数学的基本概念，集合论是现代数学的基本工具。现在的中小学教材中，也增加或渗透了一些集合论的内容和思想，这样可以扩大学生的知识面，加深对传统数学知识的理解，有利于学生今后进一步学习。在这一章里，我们将要学习集合论的一些初步知识。

第一节 集合的概念

一、集合的概念

在日常生活中，我们对“集合”一词并不陌生。例如，我们说同学们在参加课间操时，按班级排成队伍集合在一起。这里所讲的集合，与我们在本章所要讲述的集合不是一回事。那么，数学里“集合”的涵义是什么呢？我们先来看几个例子：

1. 育新学校里的全体学生，可以看作一个集合；
2. 从1到10的偶数的全体，可以看作是一个集合；
3. 所有的自然数，可以看作一个集合；
4. 直线上所有的点，可以看作一个集合；
5. 所有等腰三角形，可以看作一个集合。等等。

以上都可以作为集合的例子。它们是由一些学生、一些

数、一些点和一些图形组成的整体。所以，对于集合的概念，我们用以下的语言来描述*：

集合是指具有明确范围的一些确定的对象的全体。集合也简称为“集”。

集合里的每一个对象，都叫做集合的**元素**（或简称为**元**）。

集合一般用大写字母 $A, B, C, \dots$ 来表示。集合的元素一般用小写字母 $a, b, c, \dots$ 来表示。

对于给定的集合 A 和确定的元素 a ，如果 a 是集合 A 的元素，就说“元素 a 属于集合 A ”，用符号记作：

$$a \in A$$

读做： a 属于 A 。

如果 a 不是集合 A 的元素，就说“元素 a 不属于集合 A ”，用符号记作：

$$a \notin A \text{ (或 } a \notin A),$$

读做： a 不属于 A 。

例如，我们用 N 来表示自然数集， 1 是自然数集 N 的元素，记为 $1 \in N$ ； $\frac{1}{2}$ 不是自然数集 N 的元素，记为 $\frac{1}{2} \notin N$ 等等。

组成集合的元素可以是各种各样的事物，如果组成集合的元素是数，这个集合就叫做**数集**，例如自然数集、整数集、偶数集、质数集等等；如果组成集合的元素是点，这个集合就叫做**点集**，例如几何图形都是点的集合。

关于集合这一概念，通常有以下几点我们认为是不言

* “集合”是一个不下定义的原始概念。

而喻的:

1. “集合”是指某一类事物(或对象)的全体,而不是指其中的个别事物。例如,所有质数和合数组成的集合不能叫做自然数集,因为它不包含自然数1。

2. 集合所包含的事物的范围是明确的,就是说集合中的元素是确定的。所谓给定了一个集合,是说我们能够判定任一事物是属于这个集合,还是不属于这个集合,二者必居其一,且只居其一。这就是说,一个集合的界限必须是分明的,不能含混不清*。例如,“一切自然数”,它有确定的界限,组成一个集合;而“一切大的自然数”却没有明确的界限,我们无法断定10,000或100,000,000这样的数是不是在它的范围之内,所以,“一切大的自然数”不能组成集合。

3. 在一般的情况下,集合中的元素是不相同的。即不能有重复的元素出现。例如,1、2、3、4这四个数组成一个集合,而不能由1、1、1、2组成一个集合,因为这里三个1是同一个数。事实上它是由1、2这两个数组成的集合。

4. 在一般情况下,集合只与组成它的元素有关,而与它的元素的顺序无关。例如,由1、2、3、4组成的集合与由2、4、3、1组成的集合,我们认为是同一个集合。

在小学数学中,常常要求学生运用集合的思想方法来对事物进行分类,以培养学生按事物的属性来分类归纳的能力。

* 界限不分明的集合,叫做模糊集合,本书不讨论这样的集合。

二、集合的表示方法

表示一个集合，一般采用以下三种方法。

1. 图示法（也叫韦恩图法） 把集合的所有元素用一条封闭曲线圈起来表示一个集合，叫做图示法。

这个方法比较直观、形象，便于看出集合之间的关系，易于被初学者所接受。在小学数学教学中都采用这种方法。

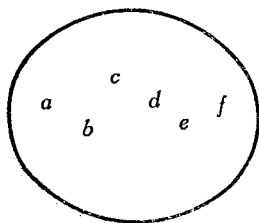
例如



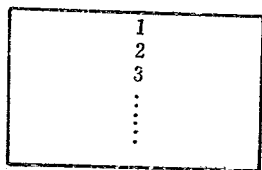
5 只羊的集合



由东，西，南，北组成的集合



由 a, b, c, d, e, f
6 个元素组成的集合



自然数集合

2.列举法 把一个集合的所有元素都写出来,再用大括号括起来表示一个集合,叫做列举法.

例 1 由 1 至 10 的偶数组成的集合 A , 可记为

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}.$$

例 2 全体自然数组成的集合 N , 可记为

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

例 3 8 和 12 的最大公约数的集合 C , 可记为

$$C = \{4\}.$$

一般地, 由元素 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ 组成的集合 A , 可记为

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}.$$

3.描述法

用语言或者数学表达式来给出集合中元素的特征, 表示一个集合, 叫做描述法.

例 4 全体自然数组成的集合 N , 可记为

$$N = \{\text{自然数}\}. \text{ 或 } N = \{n \mid n \text{ 为自然数}\}$$

例 5 方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的根的集合 M , 可记为

$$M = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}.$$

在这里, 大括号中竖线右边是一个数学表达式, 它表示与集合 M 的元素 x 有关的条件, 这个条件给出了元素的特征, 集合 M 是由全体满足这个条件的元素 x 所组成的.

例 6 由 1 至 10 的自然数所组成的数集 D , 可以表示成

$$D = \{x \mid x \in N, 1 \leq x \leq 10\}.$$

至于用哪一种方法来表示一个集合, 要由具体情况来决定.

为了方便, 我们用 N 表示自然数集, 用 Z 表示整数集,

用 Q 表示有理数集，用 R 表示实数集；用 Z^+ 表示正整数集，用 Q^+ 表示正有理数集，用 R^+ 表示正实数集等等。

根据集合中元素个数的情况，我们把集合分为有限集与无限集。

在前面的例子中，例1、例3、例5、例6中的集合的元素个数是有限的，我们把由有限个元素组成的集合叫做**有限集**。例2中集合的元素个数是无限的，我们把由无限个元素组成的集合叫做**无限集**。

例7 $E = \{x \mid 0 < x < 1,000,000,000, x \text{ 是自然数}\}$ ，集 E 是有限集。

例8 设 $P = \{\text{偶数}\}$ ，则集 P 是无限集。

例9 $G = \{x \mid 2 \text{ 和 } 3 \text{ 的最小公倍数}\}$ ，
则 G 是只有一个元素“6”的集合。

在例9中，集合 G 只有一个元素，只含有一个元素的集合，叫做**单元素集**。

例10 $X = \{x \mid 2x + 1 = 0\}$ 。

集 X 是单元素集，它只有一个元素 $-\frac{1}{2}$ 。

例11 $Y = \{x \mid -1 < x < 1, x \text{ 是整数}\}$ 。

集 Y 是单元素集，它只含有一个元素0，即

$$Y = \{0\}.$$

有时不知道一个集合是不是有元素，为了方便，我们也谈论这样的集合。例如，李老师说：“明天缺课的同学星期日到学校来补课”。我们把“明天缺课的同学”看作一个集合，但第二天没有缺课的同学，于是这个集合没有元素。一个元素也没有的集合，叫做**空集**。空集一般用符号 ϕ （或