代数矩阵与几何变换浅说

吕学礼

吉林教育出版社

代数矩阵与几何变换浅说

吕学礼　编

吉 林 教 育 出 版 社

代数矩阵与几何变换浅说　　　　吕学礼　编

责任编辑：王铁义　　　　封面设计：孙梦白

出版：吉林教育出版社　　787×1092毫米32开本6.875印张149 000字

发行：吉林省新华书店　　1991年11月第1版　1991年11月第1次印刷

印数：1—1049册　　定价：2.60元

印刷：长春市第五印刷厂　　ISBN 7-5383-1472-5/G·1294

前　言

矩阵是代数中的基本内容之一，变换是几何中的基本内容之一。对于中学数学教材改革来说，怎样把用途广泛的矩阵内容纳入代数教材，以及如何进一步用变换的观点来处理几何教材，都是值得考虑的问题。

这本小册子简单地介绍了一些关于矩阵和变换的初步知识。同时把两者结合起来，介绍了怎样利用矩阵表示变换，这样使矩阵得到一些应用，又便于对变换作进一步的研究。

希望本书能有助于读者初步了解这些内容，启发思考。还希望本书能为今后进一步教学改革准备一些条件。

编写时力求做到通俗浅显，适合高中水平的读者阅读。对每节都提供了一些练习题，并附有解答或提示。

本书可供爱好数学的高中学生课外阅读，并可供中学数学教师参考。

对本书的缺点错误，敬请批评指出，以便改正。

吕学礼

1988年3月

目　录

第一章 矩　　阵

1.1 什么是矩阵?

简单说来，矩阵就是一个矩形的表。

矩形是长方形的意思（也包括正方形）;阵就是阵势、阵图的意思，实际上可以理解为一个表。

把几个数排列成一个矩形的表，两边用括号括起来，就成为一个**矩阵**。例如，

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 8 & 7 \end{bmatrix}、\qquad \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

就是两个矩阵。

这里第二个矩阵是正方形的，象这样正方形的矩阵有时也叫做**方阵**。

矩阵两边的括号也可用圆括号，不用方括号。例如，上面的两个矩阵也可记作

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}、\qquad \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}。$$

但在本书中都将用前一种记法，就是括在矩阵两边的是方括号，而不是圆括号。

有人要问，把几个数排列成这样的矩形的表，这个表是不是代表什么数值呢?

回答是：一个矩阵就是一个表，整个矩阵并不代表什么数值。

知道行列式的人可能要问，象

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$$

是一个行列式。它有一个数值，即

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 5 \times 8 - 6 \times 4 = 16。$$

那么矩阵$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$与行列式$\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$有什么关系呢？

回答是，矩阵$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$是一个表，没有数值；行列式$\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$有一个值，即16；两者是不同的。矩阵是矩阵，行列式是行列式，并不一样。不过因为矩阵$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$与行列式$\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$都是由5、6、4、8这四个数组成的，而且这些数的排列情况也完全相同，所以我们把行列式$\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$叫做与矩阵$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$相应的行列式。例如，与矩阵

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

相应的行列式是

$$\begin{vmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 9 \end{vmatrix}。$$

当然，一个矩阵必须是方阵，才有与它相应的行列式。

如果你还没有遇到过行列式，那么上面一段话就可以暂时不管它。

矩阵既然并不表示什么数值，那么它的实际意义究竟是什么呢？

说来说去，矩阵的实际意义仍是由几个数排列成的一个矩形的表。实际上，这种表是很多的。

举例来说，甲、乙、丙三个车间，每月生产A、B、C、D四种产品的件数可以列成一个表

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} 甲 \\ 乙 \\ 丙 \end{array} & \begin{bmatrix} 20 & 25 & 24 & 28 \\ 16 & 21 & 19 & 18 \\ 32 & 30 & 33 & 32 \end{bmatrix} \end{array}$$

这个表就是一个矩阵。

又如，张、王两个学生，数、理、化、生、地某次测验的成绩可以列成一个表

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 数 & 理 & 化 & 生 & 地 \end{array} \\ \begin{array}{c} 张 \\ 王 \end{array} & \begin{bmatrix} 85 & 79 & 63 & 94 & 96 \\ 100 & 87 & 92 & 76 & 61 \end{bmatrix} \end{array}$$

这个表也是一个矩阵。

当然，象这种表，不一定要用矩阵表示，更不必要用矩阵的理论来进行研究。这里只是用这些例子来说明矩阵的确可以表示某些实际情况而已。

矩阵的主要用处，在于表示数学中和其他科技中的许多表格。举例来说，二元一次方程组写成下面的形式

$$\begin{cases} 3x + 4y = 7, \\ 8x - 5y = 3。 \end{cases}$$

即等号右边是常数项，等号左边第一项是 x 项，第二项是 y

项，那么x项和y项的系数组成的矩阵

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$$

叫做这个二元一次方程组的系数矩阵；x 项和y项的系数以及常数项组成的矩阵

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 8 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

叫做这个二元一次方程组的增广矩阵。这样的矩阵，对于研究多元一次方程组（也叫线性方程组）用处很大。

在这本书的最后一章，我们要利用矩阵来表示几何变换。

总之，一个矩阵实际上就是一组数（当然也可以是表示数的字母)，这一组数排列成矩形的形式。

在一个矩阵中，横排着的几个数叫做一行，竖排着的几个数叫做一列。例如，在上面的矩阵

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 8 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

中，3 4 7是第一行，8 -5 3是第二行。$\begin{matrix}3\\8\end{matrix}$是第一列，$\begin{matrix}4\\-5\end{matrix}$是第二列，$\begin{matrix}7\\3\end{matrix}$是第三列。这个矩阵有2行3列，叫做一个$(2\times3)$矩阵。一般地，如果一个矩阵有m个行，有n个列，这个矩阵就叫做一个$(m\times n)$**矩阵**。一个$(n\times n)$矩阵是一个方阵。

在一个$(m\times n)$矩阵中，m和n可以是任意的自然数。当然，m可以是1，n也可以是1。就是说，一个矩阵，可以是只有一行的矩阵，例如，[15 7 18 24]，这是一个(1×4)

矩阵；也可以是只有一列的矩阵，例如，$\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$，这是一个（3×1）矩阵。

那么，有没有（1×1）矩阵呢？有的。象〔5〕就是一个（1×1）矩阵。这个矩阵〔5〕与数5有什么区别呢？矩阵〔5〕是矩阵，只是它只有一行一列，它并不等于什么数；数5是一个数；两者是不同的，不能混淆。正象一个单元素集合{5}是一个集合，其中只有一个元素5，但集合{5}并不等于5，这个集合与这个数是不同的两个东西，不能混淆。

在这节的最后，来说一下两个矩阵相等的问题。有的读者也许要说，既然矩阵并不表示什么数值，那么哪里还有相等不相等的问题呢？是的，矩阵并不表示数值，矩阵与数不能相等。但是，矩阵与矩阵可以相等，正如集合与集合可以相等。两个矩阵相等，就是说这两个矩阵是一样的。例如，有两个矩阵，一个是$\begin{bmatrix}3 & 7 & 8\\6 & 5 & -4\end{bmatrix}$，另一个是$\begin{bmatrix}3 & 7 & 8\\6 & 5 & -4\end{bmatrix}$，这两个矩阵完全一样，我们就说它们是相等的矩阵。

一般地，我们说：两个矩阵，由同样的一些数组成，并且这些数的排列情况完全相同，那么这两个矩阵**相等**。注意，这是矩阵相等的定义。这个定义包括两方面的意思，就是说，一方面，如果两个矩阵是由同样的数按相同的排列组成的，那么这两个矩阵相等；另一方面，如果两个矩阵相等，那么它们必须是由相同的数按相同的排列组成的。

今后我们常用一个黑体的大写字母代表一个矩阵。例如：

$$A=\begin{bmatrix}3&4&0&8\\5&2&9&7\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}6\\-7\\1\end{bmatrix}。$$

练习1.1

1. 任意写出一个有实际意义的矩阵。
2. 写出三元一次方程组

$$\begin{cases}5x+2y+3z=0,\\6x-2y-z=5,\\4x+5y-2z=20\end{cases}$$

的系数矩阵和增广矩阵。

3. $\begin{bmatrix}4&7&2\\5&-2&1\\3&0&6\\2&1&-3\end{bmatrix}$是几行几列的矩阵？它的第 3 行是什么？

它的第 2 列是什么？

4. 写出一个 5 行 1 列的矩阵，又写出一个 1 行 6 列的矩阵。
5. 甲乙两厂，一、二、三月份的生产总值（单位：万元）如下：

$$\begin{array}{c|ccc} & \text{一月份} & \text{二月份} & \text{三月份}\\ \hline \text{甲厂} & 20 & 19 & 23\\ \text{乙厂} & 52 & 52 & 58\end{array}$$

这是一个（？×？）矩阵？能否把它改写成一个（3×2）矩阵？

6．设$\mathbf{X}=\begin{bmatrix}2 & 9\\ x & 0\end{bmatrix}$，$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}2 & 9\\ 3 & y\end{bmatrix}$。又已知$\mathbf{X}=\mathbf{Y}$，求x、y。

1.2 矩阵的加减法

既然矩阵不表示数值，怎样进行加减呢？

能够相加减的东西，不一定是数。例如，这一班的同学和那一班的同学都集合在操场上，可以看作是两班同学的相加。从一盘苹果中吃掉其中的一部分，可以看作是苹果减去苹果。

矩阵和矩阵也可以相加减，得到的仍是矩阵，而不是数值。

我们看两个矩阵：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}5 & 4 & 8\\ 3 & -1 & 7\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}6 & -2 & 0\\ 9 & 1 & 3\end{bmatrix}。$$

它们都是（2×3）矩阵。把它们相加，只要把相同位置上的数相加就可以了。就是说，

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix}5+6 & 4+(-2) & 8+0\\ 3+9 & (-1)+1 & 7+3\end{bmatrix},$$

即 $$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix}11 & 2 & 8\\ 12 & 0 & 10\end{bmatrix}。$$

从上面看到，两个矩阵，同是（m×n）矩阵，可以相加；并且，两个矩阵要能够相加，它们必须都是（m×n）矩阵。

一般地，我们说，两个（m×n）矩阵相加所得的和，也是一个（m×n）矩阵，其中每一个数就是原来两个矩阵上相应位置上的数的和。

矩阵的加法有没有实际例子呢？

有的。象下面的例子可以说明矩阵加法的意义。

甲、乙、丙三个分店，上半年销售A、B、C、D四种商品的销售量（以千件为单位）由矩阵M表示：

$$M = \begin{array}{c} \\ 甲 \\ 乙 \\ 丙 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 8 & 16 & 300 & 59 \\ 10 & 21 & 250 & 75 \\ 5 & 24 & 486 & 47 \end{bmatrix} \end{array}。$$

这些分店下半年销售这些商品的销售量（以千件为单位）由矩阵N表示：

$$N = \begin{array}{c} \\ 甲 \\ 乙 \\ 丙 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 9 & 18 & 320 & 61 \\ 9 & 23 & 270 & 80 \\ 4 & 20 & 525 & 63 \end{bmatrix} \end{array}。$$

那么这些分店全年销售这些商品的销售量（以千件为单位）就可由矩阵M＋N表示：

$$M+N = \begin{array}{c} \\ 甲 \\ 乙 \\ 丙 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 17 & 34 & 620 & 120 \\ 19 & 44 & 520 & 155 \\ 9 & 44 & 1011 & 110 \end{bmatrix} \end{array}。$$

两个以上的矩阵也可象两个矩阵那样相加（当然必须同是（m×n）矩阵)。下面是说明这种加法的实例。

张、王、李、刘四个学生，他们五门功课语文、数学、物理、化学、外语某次测验的成绩分别用（4×1）矩阵A、B、C、D、E表示，即

$$\begin{array}{c} \\ \text{张} \\ \text{王} \\ \text{李} \\ \text{刘} \end{array} \quad \mathbf{A}=\begin{array}{c} \text{语文} \\ \begin{bmatrix} 62 \\ 84 \\ 95 \\ 94 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \mathbf{B}=\begin{array}{c} \text{数学} \\ \begin{bmatrix} 98 \\ 84 \\ 100 \\ 63 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \mathbf{C}=\begin{array}{c} \text{物理} \\ \begin{bmatrix} 84 \\ 73 \\ 98 \\ 65 \end{bmatrix} \end{array},$$

$$\mathbf{D}=\begin{array}{c} \text{化学} \\ \begin{bmatrix} 73 \\ 96 \\ 96 \\ 70 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \mathbf{E}=\begin{array}{c} \text{外语} \\ \begin{bmatrix} 65 \\ 55 \\ 84 \\ 75 \end{bmatrix} \end{array}。$$

那么这四个学生在这次测验中这五门功课各自的总分可以用矩阵$\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}+\mathbf{D}+\mathbf{E}$表示，即

$$\begin{array}{c} \\ \text{张} \\ \text{王} \\ \text{李} \\ \text{刘} \end{array} \quad \mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}+\mathbf{D}+\mathbf{E}=\begin{array}{c} \text{总分} \\ \begin{bmatrix} 382 \\ 392 \\ 473 \\ 367 \end{bmatrix} \end{array}。$$

从这个矩阵中可以看出，李的总分最多，刘的总分最少。

我们知道，数的加法满足加法交换律

$$a+b=b+a,$$

如
$$5+3=3+5;$$

又满足加法结合律

$$(a+b)+c=a+(b+c),$$

如
$$(5+3)+4=5+(3+4)。$$

那么矩阵的加法是不是也有这些性质呢？

有的。矩阵的加法，也满足交换律和结合律。就是说，

对于任意矩阵A、B、C（当然要是同样的（$m\times n$）矩阵），有：

$$A+B=B+A,$$
$$(A+B)+C=A+(B+C)。$$

矩阵的加法交换律$A+B=B+A$　可以证明如下：

设

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b^{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}。$$

那么

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix},$$

$$B+A=\begin{bmatrix} b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12} & \cdots & b_{1n}+a_{1n} \\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22} & \cdots & b_{2n}+a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1}+a_{m1} & b_{m2}+a_{m2} & \cdots & b_{mn}+a_{mn} \end{bmatrix}。$$

但因数的加法满足交换律，所以$a_{11}+b_{11}=b_{11}+a_{11}$，$a_{12}+b_{12}=b_{12}+a_{12}$，$\cdots a_{mn}+b_{mn}=b_{mn}+a_{mn}$。就是说，矩阵$A+B$和$B+A$中，在相应位置上的数都相等，因而$A+B=B+A$。

用同样的方法，可以证明矩阵的加法结合律$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$。

上面我们讲了矩阵的加法，现在来说一下矩阵的减法。

说到这里，有的读者可能要说："好了好了，你不必往下说了。矩阵的减法我已经知道了。"

还说："两个矩阵，同是（$m\times n$）矩阵，第一个矩阵减去第二个矩阵所得的差，也是一个$(m\times n)$矩阵，它的每一个数就是原来第一个矩阵中相应位置上的数减去第二个矩阵中相应位置上的数所得的差。"

还说："例如，**A**和**B**是两个(2×3)矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}4 & 7 & 8\\ 1 & 5 & -3\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}6 & 2 & 9\\ 0 & -7 & 8\end{bmatrix},$$

那么

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\begin{bmatrix}4-6 & 7-2 & 8-9\\ 1-0 & 5-(-7) & (-3)-8\end{bmatrix},$$

即

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\begin{bmatrix}-2 & 5 & -1\\ 1 & 12 & -11\end{bmatrix}。"$$

这位读者说得不错。矩阵的减法的确可以这样来规定。

矩阵的减法还可以用另一种方法来规定，就是作为加法的逆运算。下面我们说一说矩阵的减法的这另一种规定。

两个（$m\times n$）矩阵**A**和**B**，**A**减去**B**的差$\mathbf{A}-\mathbf{B}$，是能使**X**与**B**的和等于**A**的这样一个矩阵**X**。就是说，$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{X}$，其中**X**能满足$\mathbf{X}+\mathbf{B}=\mathbf{A}$。

现在设 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix},$$

我们求$\mathbf{A}-\mathbf{B}$的差，就是求一个$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}$,

能使$\mathbf{X}+\mathbf{B}=\mathbf{A}$。由$\mathbf{X}+\mathbf{B}=\mathbf{A}$，得

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

即

$$\begin{bmatrix} x_{11}+b_{11} & x_{12}+b_{12} & \cdots & x_{1n}+b_{1n} \\ x_{21}+b_{21} & x_{22}+b_{22} & \cdots & x_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1}+b_{m1} & x_{m2}+b_{m2} & \cdots & x_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$