天气分析预报工程化若干问题与应用数学物理方法研究地质的类比

中国科学院大气物理研究所

1978.9

天气分析预报工程化若干问题

与应用数学物理方法研究地质的类比

王宗皓　　刘克武

（中国科学院大气物理研究所）

提　　要

本文介绍气象系统工程中分析预报自动化的数学物理方法，并提出分析预报工程化的理论模型。内容分：

一、气象研究与地质研究的类比

二、气象信息的压缩传输和质量控制

三、天气分析自动化

四、天气预报自动化

五、天气分析预报工程化理论模型

一、气象研究与地质研究的类比

气象、水文、地质都同属环境学科，与人类生活、生产活动有密切关係，簡單说来，气象是研究自地球表面以上直到50—80公里高空大气层的大气物理规律，即大气运动变化规律，以及大气中的声、光、电现象等。地质学科则是研究地面以下地核以外的物理规律。研究的目标一是天上，一是地下。但是作为数学物理问题研究的大气科学和地质科学，两者之间在学科思想、研究方法、研究工具，以及学科分支方面有许多类似之处，有许多值得相互学习和相互借鉴的地方，描述复杂的大气现象和地质现象的模型方面，都有确定模型式和概率模型式。学科分支方面有：大气物理、地质物理、大气化学、地质化学，高层大气、深部地质，大气遥测遥感、地质遥测遥感，气象卫星、资源卫星等々。研究工作步骤方面，气象上有下述步骤：

——天气现象观测、原始资料收集；

——资料整理分析计算；

——概念和理论形成，建立模式；

——分析推理、实验模拟、数值计标模拟，

——预报应用与观测事实对照检验。

在目前的技术水平上，這五个方面都可以在以电子计算机为主体的系统工程中实现自动化〔11〕见本文附流程图。在地质研究步骤上也是类似的〔4〕。

研究工具有天气图、地质图，都利用电子技术、数理统计和微分方程等。

但是气象和地质的研究对象，不仅有天上地下之分，还有气体和固体的区别。因此，对自然现象的研究方面各有侧重面，所要求探索的客观规律是有许多本质的区别，但這不防碍两个

学科中的工作者，在方法论上相互学习，相互借鉴和相互启发。甚至学科交缘而产生气象地质或地质气象，也非绝对不可能。

气象科学具有明显的学科交缘和学科综合特点，气象学科的发展，与数学、物理学、流体力学、电子技术、电子工业，以及空间技术的发展，有密切的关系。随着基础科学和技术科学的发展，气象科学由直观的经验的描述性的学科，逐渐成为精密的定量的有物理基础的学科，这与引用流体力学热力学理论和数学理论来描写大气运动的规律，奠定动力气象学和热力气象学，有很大的关系。

六十年代，由于空间技术的发展，气象卫星提供气象资料观测和气象通讯的空间基地。使气象学科的面貌大为改观。对气象工作者提出许多新的研究课题。在一些技术先进的国家里，气象资料自动观测站、计算机通讯系统都先后建成。初期出现自动遥测站，近年出现天气雷达回波的自动数码化处理。微型计算机自动处理原始资料，自动汇编资料，实现计算机控制的的传输线路网，收集资料，汇编通报，发布给指定的用户。天气分析实现自动化，包括对气象报告译码、检错、分析。五十年代初期，开始使用电子计算机和数值计算方法研究数值天气预报，以及大气环流数值模拟试验，推动气象学的理论研究和天气预报实践相结合，气象科学中出现一门新兴的学科分支，叫做数值天气预报，这门学科具有工程学的特点，运用现代大型电子计算机和最新的计算数学方法，不断引用现代基础科学的理论，装备最新的技术成果，如卫星、电子技术等，占据现代气象科学发展中的主导地位，推动气象科学逐步向现代科学领域前进。

当前，正在发展统计和动力相结合，经验的和理论的相结合的大气模式和气象系统工程〔11〕这是值得重视的。单独的统

计方法和动力方法，可能都难以研究和预报复杂的天气现象。

本文主要介绍天气分析预报工程化的若干问题，与地质的数学物理方法研究的类比。目的是抛砖引玉，达到在研究方法上相互借鉴，在学科上相互交缘。

二、气象信息量压缩传输和质量控制

先介绍气象资料观测、收集、传递的背景材料。地球表面层以上约30～40公里的大气层是天气现象（风、雨、阳、晴、雷、电等）形成、发展的空间。大气层受着太阳加热、地面海洋外界的影响。火山爆发尘岩、工业废气、二气化碳也影响空气质量和热力分布。

人们为着研究大气运动的规律，大约经过两百年的时间，在全球范围（海洋陆地）逐渐设置现在这样规模的气象观测网。用常规气象仪器如温度计、气压计、湿度计和风向风速记录仪等，定时测量空气中的温、压、风、湿等地面资料，还通过携带气象仪器的探空气球、火箭，以及航线飞机，测得高层气象资料。此外，非常规观测如气象卫星上拍摄的云图资料，以及用云运动推算的风资料，从卫星上遥测星下点气温资料等。

海洋漂浮站，定高气球、以及对危险天气灾害天气实时监视的雷达资料也需要及时分析和传递。

因此气象资料收集、传递的信息量相当大，以数码字符计算，一个区域气象中心站每天可以接收到的信息量，平均约有15～30兆字符，按1,200比特/秒的传递信息量速度，需要40小时，按4,800比特/秒速度计算，需要10小时，远远不能满足业务预报即时需用资料的要求。

气象资料的收集、传递可分为有线传递和无线传递，观测资料，经过编制气象电报，迅速逐级传递汇总，分析图和预报图又要迅速发送给用户。

气象资料的特点是

——种类繁多

——高度分散

——高度集中

——信息量大

——时间性强

因此，气象通讯中的首要问题是压缩气象信息量，比如要解决模拟传真图片速度慢的问题，可采用压缩编码数字传真方法，压缩率约为4：1，下面讨论的是另一种方法即取样方法。

信息量的压缩也就是资料压缩问题，实际上是资料的不同表示问题和资料取样问题。设由k个样本值表示若干个气象场的离散信号，组成k维空间的k维向量X，其分量是信号样本值（表1）资料压缩问题可提成为：找出某种变换W，使得

$$Z = W \cdot X, \qquad X = (X_1, X_2, \cdots X_n)$$

向量Z的维数 $n << k$，保证剩余的 $k-n$ 个分量，在用Z复原信号时，不致引起不能允许的误差。一般采用均方误差判断允许误差的大小。

这个问题可以引用经验正交函数组成的经验正交变换来实现[1]，其中W是由相关矩阵的特征向量组成的正交矩阵。

这样可压缩信息量到5:1～10:1，采用其它的正交变换也可以压缩信息量。但对气象要素场而言，看来以经验正交变换最适宜。

	气象要素场向量		
样本序号	X_1	X_2 ……	X_n
1	x_{11}	x_{21} ……	x_{k1}
2	x_{21}	x_{22} ……	x_{k2}
⋮	……	……	……
n	x_{n1}	x_{n2}	x_{kn}

表 1

信息质量控制问题，包括三个方面：测站布点、测量精度和传输差错，后者是测量仪器装备问题和通讯问题，属工程、工业和工艺水平问题，所以这里我们只讨论测站布点问题。

测站布点问题，实质上是在三度空间布置大气变化图像的取样点问题。一般说来，取样点密度大些，则从取得的样本复原大气的图像就清晰些，取样点稀疏些，则获得的大气变化图像就模糊些，但清晰度与所研究的问题有关，特别是气象要素值之间存在着有机联系和物理定律的约束。因此建立观测系统和布置测站网需要考虑下列问题：

——必须观测的大气变量（参数）有哪些？

——这些变量（或参数）的特征时间空间尺度是多少？

——测量这些变量要达到的精度范围？

——要达到特定的观测目的，最优观测系统如何建立？

以上这些问题可以通过比较稳定的动力模型进行数值模拟试研试验确定。其思想是：(1) 先给出一组观测系统的观测资料作初值，作模拟预报试验，(2) 修改原先给出的初值，比如随机地去掉或增加一些测站资料，或分布的均一性不同，再用同样的动力模型作预报试验。(3) 比较试验的精确度如均方差大小等。 (4)综合考虑现有的技术资源条件，提出测站最优布局，提出观测系统的观测误差要求和最佳配置的理论依据。

资料传递误差可以通过各种经验的（比如数值变化区间）和物理的检查方法（比如地转风关系，热成风关系，静力平衡关系等）发现传递误差（包括观测误差等）。并用正确的或可信的资料，代替错误资料等等。这里不详细介绍，可参考[3]，[5]和[15]，在观测系统模拟试验基础上建立的观测系统是经济合用的，所获取的气象资料是满足气象理论研究和实际预报

应用的要求，因此也是对特定 观测目的的最优观测系统。

三、天气分析自动化

中心气象台接收到的气象情报资料，水平分布上是不规律的。常规观测资料是定时的间断的全球统一时间观测的。非常规观测资料是非定时的连续的轨道带状地区性的观测资料，这些分布极不规则的资料，需要插值到规则分布的格网点上，提供数值天气预报使用，计算机分析天气图使用等等。自动分析也叫做客观分析，包括：

(1) 由观测的样本资料客观的复原气象场，最优的表示出大气的瞬间状态；

(2) 从不完全的历史资料推断大气的现在状态；

(3) 给出格点上物理上协调的气象要素值。

电子计算机出现以后，利用计算机模仿人工分析天气图的分析经验和分析方法，自动地分析接收来的资料，内插出格网点上的气象要素值。这里包括从气象卫星上发送来的实时资料与定时资料的"同化"。60年代后期，已经在许多国家先后实现。我国在国庆20周年初步实现高度场和风场客观分析和数值预报模式的联合作业。上海市气象局1974年稳定现实自动业务数值分析预报〔5〕，武汉中心气象台和长办已在实现自动分析预报。

目前，国内外的客观分析方法主要有两大类：多项式方法和统计方法。

多项式方法包括：

——逐步订正法——有限元方法——样条方法—— 正交化多项式展开——线性化预报方程的特征函数展开等々；

统计方法就是多元线性回归统计，也叫做最优内插方法，

即线性插值方法在统计意义下均方误差最小。

若将动力初值形成、四維资料作为初始资料分析，则可增加一种动态分析方法。

在日常业务分析中，小范围的气象场分析应用逐步订正法全球范围的分析，则应用哈佛（Hough）函数展开方法；统计内插方法正在业务分析中试用，对全球大尺度天气系统分析已經显出一定的优越性，特别在使用卫星观测资料，进行四維资料同化方面，当前統计内插方法是唯一的简单的适用方法。

但是应强调的，是這些数学方法和气象场的物理特点，和动力学关係相结合应用。下面我们以等压面高度分析为例，说明数学物理如何相结合的。

逐点订正法

此法采用数值预报的结果或多项式内插值作为分析场的第一近似（初猜值），然后秝出测站上的实测值与初猜值差，即订正值（E_i），最后将订正值按距离加数，与格点上的初猜值相加，得分析值。同样的过程重复若干次，得最后的分析值。在影响半径 R（约2000 公里）内分三种情况计秝订正值 E_i，這里只对有测风报和高度报的站计秝订正值 [3]

$$E_i = Z_i^{(0)} + \left(\Delta x \cdot \frac{\partial Z}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial Z}{\partial y}\right) - Z_g$$

式中的梯 $\partial Z/\partial x$ 和 $\partial Z/\partial y$ 项，不只是数学处理，而是引用自由大气中存在的地转风关係定出，即根据

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{1.08}{m_0 g} f v$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = -\frac{1.08}{m_0 g} f u$$

引进测风资料，這样使得分析的高度场和风场，在地转关係意义下是协调的。式中1.08是实测风与地转风的统计比例数，$m\delta$是此图投影放大條数，g为重力加速度。

同样，在统计内插方案中也采用地转关係。下面介绍具体方案。

统计内插法

用格点附近影响半径之内的观测高度h_i和水平风速分量u_i，v_i，估计格点上的h_g，u_g，v_g；分析方案可写成矩阵向量形式

$$\begin{pmatrix} h_g \\ u_g \\ v_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_f \\ u_f \\ v_f \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{n} A_i \begin{pmatrix} E_{ih} \\ E_{iu} \\ E_{iv} \end{pmatrix}$$

式中 $E_{ih}=h_i-h_{fi}$，$E_{iu}=u_i-u_{if}$，$E_{iv}=v_i-v_{if}$，下标"f"表示初猜值。用$\langle E_{ih}\cdot E_{ih}\rangle$，$\langle E_{ih}\cdot E_{iu}\rangle$等表示方差和协方差。令

$$E_{t\cdot g}^{(a)}=a_t-a_g,\quad a=h,u,v.$$

a_t 表示真值，在误差的方差

$$\langle E_{t\cdot g}^{(a)},\ E_{t\cdot g}^{(a)}\rangle,\qquad a=h,u,v$$

同时达到极小的条件下，确定3×3係数矩阵A_i，其形式解为

$$(A_1,A_2,\cdots\cdots,A_n)=(C_{g1},C_{g2},\cdots\cdots,C_{gn})\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots\cdots & C_{1n} \\ \vdots & & \\ C_{n1} & \cdots\cdots & C_{nn} \end{pmatrix}^{-1}$$

式中3×3矩阵为

$$C_{i,j}=\begin{pmatrix}\langle E_{ih},E_{ih}\rangle & \langle E_{ih},E_{iu}\rangle & \langle E_{ih},E_{iv}\rangle\\ \langle E_{iu},E_{ih}\rangle & \langle E_{iu},E_{iu}\rangle & \langle E_{iu},E_{iv}\rangle\\ \langle E_{iv},E_{ih}\rangle & \langle E_{iv},E_{iu}\rangle & \langle E_{iv},E_{iv}\rangle\end{pmatrix}.$$

若均值 $\overline{E}_{i,h}=\overline{E}_{iu}=\overline{E}_{iv}=0$，则 C_{ij} 为协方差矩阵，3×3 矩阵 C_{gi} 中的元素是用 $E^{(a)}_{i,g}$ 代替 E_{ia} 的结果。由于真值 h_t，u_t，v_t 不能精确获得，协方差必须根据资料用数学方法模拟，比如

$$\langle E_{ih},E_{jh}\rangle=C_1\exp(-C_2S^2_{ij})$$

或

$$\langle E_{ih},E_{jh}\rangle=(C_1'\cos(C_2'S_{ij})+C_3)(1+C_4S^2_{ij})^{-C_5}$$

式中 $C_1=\langle E_{ih},E_{ih}\rangle=0.96$；$C_2=1.24$；$C_1'=0.71$；$C_2'=0.94$；$C_3=0.27$；$C_4=0.71$；$C_5=0.34$；$S_{ij}$ 表示 i 点到 j 站的距离（单位千公里）。

$$S_{ij}=[(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)]^{\frac{1}{2}},$$

但是高度和高度（h）的协方差研究较多，也较简单，而风和风，风和高度等的协方差比较复杂，一般引用地转风关系，用高度的协方差代替风的协方差，比如

$$\langle E_{ih},E_{ju}\rangle=\langle E_{ih},-\frac{m6g}{108f}\frac{\partial}{\partial y_j}E_{jh}\rangle$$

$$=-\frac{m6g}{108f}\langle E_{ih},E_{jh}\rangle\cdot 2C_2(y_i-y_j),$$

$$\langle E_{ih},E_{jv}\rangle=2C_2\frac{m6g}{108f}(x_i-x_j)\langle E_{ih},E_{jh}\rangle.$$

等等，三度空间资料分析，还要引用静力平衡关系和热成风关

係参加分析[16]。

特征函数展开方析

因为地转风关係在低纬度地区不适用，用在全球资料分析有困难，這里介绍目前全球分析包括低纬度分析的哈佛(Hough)函数调和分析方法。哈佛函数是大气潮汐方程的特征函数。比如正压大气（密度只是气压的函数）潮汐方程是正压初始方程（球坐标系）

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}-\left(2\Omega+\dfrac{u}{a\cos\varphi}\right)v\sin\varphi=-\dfrac{g}{a\cos\varphi}\dfrac{\partial h}{\partial\lambda} \\ \dfrac{dv}{dt}+\left(2\Omega+\dfrac{u}{a\cos\varphi}\right)u\sin\varphi=-\dfrac{g}{a\cos\varphi}\dfrac{\partial h}{\partial\varphi} \\ \dfrac{dh}{dt}+\dfrac{h}{a\cos\varphi}\left[\dfrac{\partial u}{\partial\lambda}+\dfrac{\partial}{\partial\varphi}(v\cos\varphi)\right]=0 \end{cases}$$

$$\frac{d()}{dt}=\frac{\partial()}{\partial t}+\frac{u}{a\cos\varphi}\frac{\partial()}{\partial\lambda}+\frac{v}{a}\frac{\partial()}{\partial\varphi}.$$

对静止状态的线性化形式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-2\Omega v\sin\varphi-\dfrac{g}{a\cos\varphi}\dfrac{\partial h}{\partial\lambda}=0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+2\Omega u\sin\varphi-\dfrac{g}{a\cos\varphi}\dfrac{\partial h}{\partial\varphi}=0 \\ \dfrac{\partial h}{\partial t}+\dfrac{h_0}{a\cos\varphi}\left[\dfrac{\partial u}{\partial\lambda}+\dfrac{\partial}{\partial\varphi}(v\cos\varphi)\right]=0 \end{cases}$$

上式中 t 表示时间，λ，φ 为经纬度，a 为地球半径，Ω 为地转角速度，u，v 为经纬向扰动水平分速度。上列方程组表示比地转风关係更广泛的风压场关係，由此方程定出的 λ、φ 方向的风压关係是一个向易：

$$H_{\ell}^{S}(\lambda,\varphi)=\begin{pmatrix}u_{\ell}^{S}\\ v_{\ell}^{S}\\ h_{\ell}^{S}\end{pmatrix},$$

$H_{\ell}^{S}(\lambda,\varphi)$称为哈佛函数，是完备正交函数族，其中$S$，$\ell$分别为纬圈和经圈波指数。利用哈佛函数作为基底函数，可以按经纬度格点值将风和高度（压）同时展开，保持风压之间的自然协调，适合作气象要素场的客观分析（计算机自动分析），初始动力方程的初值形成和四维资料同化，还可以作为初始方程的谱标法的基底含数，详见材料〔6〕。

综上所述，气象要素（风、压、温、湿）之间有物理上的关联，並满足一定的动力学方程和热力学方程的约束。因此，场的分析问题不能看成是单纯的数学上的逼近，而要充分利用气象上固有的物理关联和动力——热力学约束，即使应用统计方法也要把物理关係引用进去，這样才能取得较好的分析结果。

四、天气预报自动化

随着电子技术、计算机科学的发展，並在气象问题中广泛应用新技术，天气预报這个非常复杂、非常困难的操作过程，也正在向分析——预报——图像显示的高度自动化业务系统方向发展，正在向气象系统工程方向发展〔11〕，比如美国的AFOS係统。现在的预报是用天气学方法、近代概率统计模型和动力模型（数值预报）作的，后两者相结合应用的预报方法之一，叫做MOS（model output statistical），正在地面风、最低最高温度、雷暴、云另、能见度、降水类型和降水概率等气象要素预报中广泛应用，效果较好，這就是动力模式输出的预报值，加天气学方法和预报员经验因子，用统计方法作

的最后预报，发给用户的预报。目前，国内外正在探索随机动力预报新方向。随着天气分析预报自动化程度的进一步发展，随机动力预报将来可能应用于业务预报。下面，我们简要介绍天气预报自动化和工程化过程中应用的基本方法的基本思想。

概率统计天气预报

关于天气预报中的概率统计方法在〔2〕中有比较全面的总结。基本观点是按照天气学和预报经验选择预报因子，天气——动力——统计相结合。具体说来是

——预报概型的形成，参放天气学背景模式，动力模式中谐物理因子的配置；

——统计模式中预报量和预报因子的选择和表达；

——统计方程和天气的物理过程相结合；

——计算机上应用的统计方程和程序设计。

最近五年中，国内外统计天气预报的发展主要兴趣是统计——动力——天气结合方面。特别是MOS方法的实际应用方面。新的统计方法的发展和应用，有多元聚类分析和布尔代数方面。

如何模拟动力模式和天气学模式建立概率统计模式，这是个复杂的问题，这里举例说明。

马尔柯夫过程和动力模式的比拟说明：

马尔柯夫概型	动力模式
随机概型	确定概型
决定状态	决定预报量
开始概率	初始条件
近期状态转移（多重链）	多时间层资料（中央差分是三时间层）
转移矩阵外推	动力模式外推
因果关系不太清楚	因果关系清楚

1934年前后，馬尔柯夫过程在理论上就比较完整，1947年运用来研究天气型的转移，其后的一些工作多数是用来研究气候问题，用来研究天气预报的工作甚少，馬尔柯夫链未能广泛地应用于天气预报的原因可能是：(1)单重链的假定，对天气运动特别是天气过程的近似程度太差，多维多重链的计标另又太大，甚至无法实现；(2)从上表看出，与动力预报比较，转移概率和转移矩阵对天气过程的描述显得十分粗糙，而真实天气状态随时间的变化是相当复杂的。用简單的馬氏链来描写，必须克服链的局限性。

从表中看出动力预报和馬链预报的主要差别，在于动力模式对天气系统发生、发展和转变过程的因果关係描述比较细緻比如在预报降水的动力模式中，除开细緻地描写出风压场的配置、温压场的结构之外，还考虑水汽凝結热释放反馈作用，可感热交换，地形起伏动力和热力作用、地面摩擦、水平和垂直动量热量水汽交换，大中尺度运动相互作用等。而概率转移矩陣，目前还未能完善的考虑多要素对降水天气的影响。所以要设法克服多维链的实际计标困难，而模拟动力模式和天气学模式中所考虑的因子，建立相应的多维馬尔科夫链的概型〔12〕。在〔2〕中第三章讨论依据天气学模式挑选预报因子的方法。

动力预报模式

数值天气预报模式是由动力学和热力学定律組成的，即动量平衡、质量平衡、热量平衡、水汽平衡等方程和状态方程組成的。若讨论随机动力模式，还要增加概率密度平衡方程（见下节）〔2〕，由这些基本的平衡方程出发，按描写对象不同、物理因子考虑不同、计标方案不同，可以区分为若干种不同的数值天气预报模式〔7〕，对任何一种数值预报模式，数学和物理都是同等重要的，数值预报方程本身就是数学物理方程，数

值预报问题，实际上是预报方程在一定的边值初值条件下的定解问题。

下面是一种大尺度降水预报的初始方程模式：

$$\frac{\partial \pi u}{\partial t}+\mathcal{L}(u)=-m\left[\pi\frac{\partial\phi}{\partial x}+RT\frac{\partial\pi}{\partial x}\right]+f^{*}(\pi v)+F_u$$

$$\frac{\partial \pi v}{\partial t}+\mathcal{L}(v)=-m\left[\pi\frac{\partial\phi}{\partial y}+RT\frac{\partial\pi}{\partial y}\right]-f^{*}(\pi u)+F_v$$

$$\frac{\partial \pi T}{\partial t}+\mathcal{L}(T)=-\frac{L}{c_p}\cdot\frac{Q}{\sigma}+\frac{RT}{c_p}\frac{W}{\sigma}+\frac{g}{c_p}\frac{\partial}{\partial\sigma}E_T+F_T$$

$$\frac{\partial \pi q}{\partial t}+\mathcal{L}(q)=\frac{Q}{\sigma}+g\frac{\partial}{\partial\sigma}E_q+F_q$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial t}+m^2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\pi u}{m}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\pi v}{m}\right)\right]+\frac{\partial \pi\dot{\sigma}}{\partial\sigma}=0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\sigma}=-\frac{RT}{\sigma}$$

$$W=-\int_0^{\sigma}m^2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\pi u}{m}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\pi v}{m}\right)\right]d\sigma+\sigma\cdot m\left[u+v\frac{\partial\pi}{\partial y}\right]$$

$$\pi\dot{\sigma}=-(1-\sigma)\int_0^{\sigma}m^2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\pi u}{m}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\pi v}{m}\right)\right]d\sigma+$$
$$+\sigma\int_{\sigma}^{1}m^2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\pi u}{m}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\pi v}{m}\right)\right]d\sigma$$

在這組方程中预报量是风速的三个分量 u，v，$\dot{\sigma}=d\sigma/dt$，$\sigma=p/\pi$，垂直速度 $W=dp/dt$，气温 T，比湿 q，位势高度 ϕ，场面气压 π，其它符号意义如下

$$\mathcal{L}(a)=m^2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\pi u a}{m}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\pi v a}{m}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial\sigma}(\pi\dot{\sigma}a)$$

$$f^{*}=2\Omega\sin\varphi-\left[v\frac{\partial m}{\partial x}-u\frac{\partial m}{\partial y}\right],\quad a=u,v,T,q,$$

這里 Ω 为地转角速度，φ 为緯度，m 为地图投影放大系数，侧向和垂直湍流扩散项及摩擦（地面风）应力：

$$F_u = \mu m^2 \nabla_\pi^2 u + K\frac{1}{\pi}\frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2} + g\frac{\partial \tau_x}{\partial \sigma},$$

$$F_v = \mu m^2 \nabla^2_\pi v + K\frac{1}{\pi}\frac{\partial^2 v}{\partial \sigma^2} + g\frac{\partial \tau_y}{\partial \sigma},$$

其中地面摩擦：

$$\tau_{x,0} = -\rho_k C_D |V_k| u_k$$

$$\tau_{y,0} = -\rho_k C_D |V_k| v_k$$

ρ_k，u_k，v_k 分别表示模式中底层上的空气密度和水平风速分量，$|V_k| = (u_k^2 + v_k^2)^{\frac{1}{2}}$。阻力係数取成 $C_D = C_d(1 + 0.002\Phi_t/\Delta Z)$，$C_d$ 是常用的阻力係数 2.5×10^{-3}；Φ_t 为地形位势高度，μ，K 为水平和垂直方向的扩散系数。取 $\Delta Z = 10$ 米。对流层低层和边界层的高层空气内摩擦应力：

$$\tau_x = -\bar{\rho}^2 g K_g \frac{1}{\pi}\frac{\partial u}{\partial \sigma},$$

$$\tau_y = -\bar{\rho}^2 g K_g \frac{1}{\pi}\frac{\partial v}{\partial \sigma},$$

式中 K_g 为垂直混合系数，$\bar{\rho}$ 为垂直平均标准大气密度。$\nabla^2()$ 为水平拉普拉斯箅子，凝结潛热 $L = 596 - 0.6°t$，C_p 定压比热。地一气可感热交换：

$$\begin{cases} E_T = \rho_k C_p C_D |V_k| (T_t - T_k), \\ E_T = 0, \quad 当 T_k \geq T_t。\end{cases}$$

“k”下标均表示模式中底层上的物理量，温度水平、垂直扩散项：