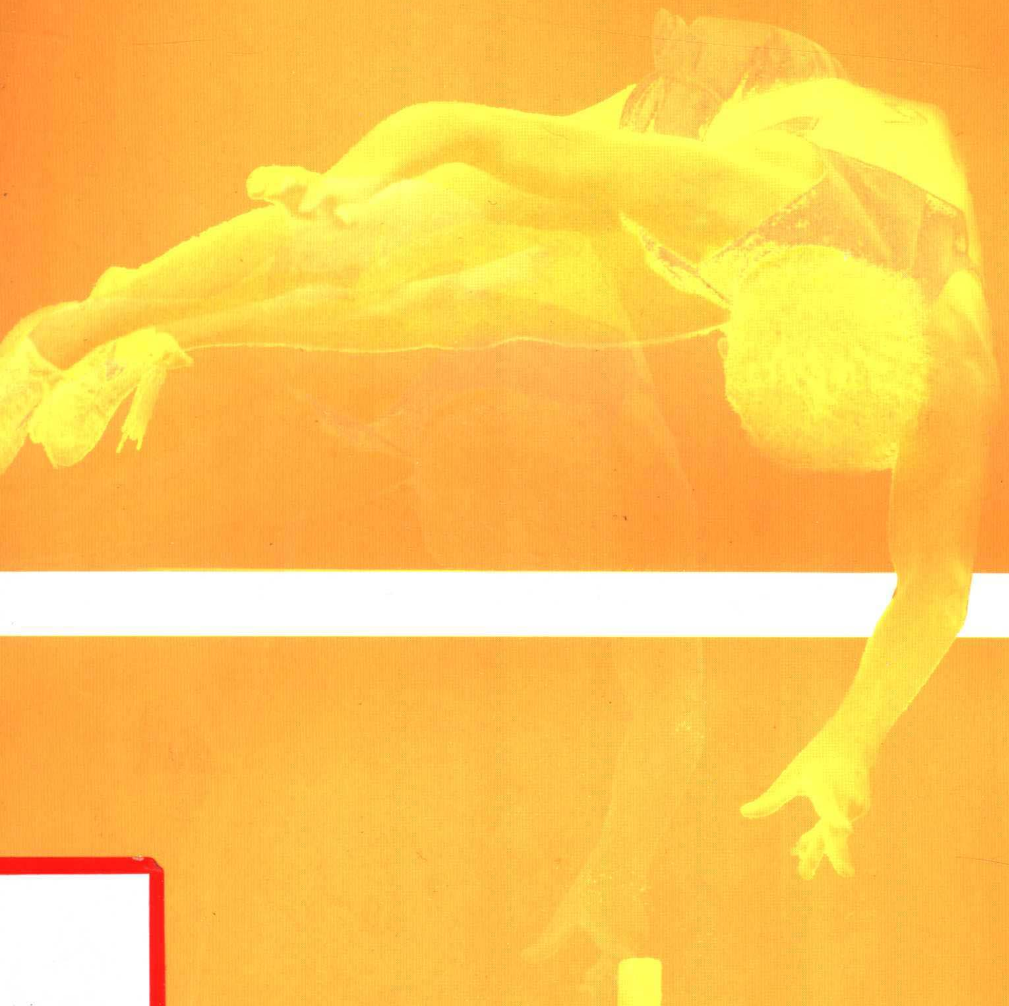
大学数学考研清华经典备考教程

概率论与数理统计

叶 俊 赵衡秀 编



清华大学出版社

大学数学考研清华经典备考教程

概率论与数理统计

叶　俊　赵衡秀　编

清华大学出版社
北　京

内容简介

本套书是以理工类、经管类大学本科数学教学大纲和全国研究生入学考试数学考试大纲的要求为基准编写的教学辅导书，作者为清华大学数学科学系主讲教授.

本书讲述“概率论与数理统计”课程的基本概念、基本定理与知识点，从基本概念、基本定理的背景及其应用入手，延伸到解题的思路、方法和技巧，并通过一法多题、一题多解的方式兼顾知识的综合与交叉应用，在内容的安排上，既体现出各知识点间承上启下的关系，保持学科结构的系统性，又照顾到各知识点间的横向联系，为读者从全局上、总体上掌握所学的知识提供平台. 为巩固所学的基本概念和基本定理，安排了基本题、综合题(侧重本章知识点的综合)和交叉综合题(侧重各章知识点间的综合)供读者选用，并附有读者自测题，供读者选用.

考虑到教学大纲和考试大纲中对理工类学生或考生的要求涵盖了对经管类学生或考生的要求，只是对所涉及的知识范围及知识点的掌握程度的要求有所不同，所以编写时并没有将经管类的内容单独列出进行编写. 但在内容的编排及例题和习题的选择上，既体现了两者的不同之处，又兼顾了两者的共同之处. 因此，本书同时适用于理工类与经管类学生或考生.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/叶俊，赵衡秀编. —北京：清华大学出版社，2005.2
(大学数学考研清华经典备考教程)
ISBN 7-302-09566 3

Ⅰ.概… Ⅱ.①叶… ②赵… Ⅲ.①概率论—高等学校—教学参考资料 ②数理统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 098391 号

出 版 者：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**客户服务**：010-62776969
组稿编辑：刘　颖
文稿编辑：刘晓艳
印 刷 者：北京密云胶印厂
装 订 者：三河市金元装订厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　本：185×230　**印张**：19.25　**字数**：374 千字
版　次：2005 年 2 月第 1 版　2005 年 2 月第 1 次印刷
书　号：ISBN 7 302 09566-3/O・408
印　数：1～4000
定　价：26.00 元

前　言

《大学数学——概念、方法与技巧》是一套学习与复习大学数学的系列辅导教材，主要是为大学非数学类本科生与全国硕士研究生入学统一考试应试者，系统地复习大学数学内容，以求巩固提高所学知识，取得良好考试成绩而编写的．这套书包括《微积分（上）》、《微积分（下）》、《线性代数》及《概率论与数理统计》四本书．选材原则与教学要求是按照清华大学非数学类本科生数学教学大纲与教育部颁发的全国硕士研究生入学统一考试大纲而确定的．本教材也可作为大学数学的教学参考书．

本书是编者数十年教学经验的积累，是编者依据对课程内容的研究理解，并在综合分析学生认识规律的基础上编写而成的．许多教学资料是第一次对外公开．这些教师不但有丰富的教学经历，同时也多从事科研工作，对数学基本概念、基本方法的灵活运用特别重视．对全国硕士研究生入学统一考试大纲的要求与题型结构均有深入的研究．因此，本书的编写风格与内容取舍充分体现了他们注重知识的基础性、系统性、交叉性与技巧性的教学风范．同时，本书在整体内容上把平时的教学要求与考研复习的需要结合起来，既突出了基础，又具有较强的针对性，希望能对这两类读者都有全方位的指导意义，为他们训练数学思维与解题能力提供较为系统的帮助．

学好数学，重在基础．一味追求技巧，往往导致无所适从，望题生畏．本书在内容安排上强调基本概念与基本思维的训练，各章节均配有相当数量的基本例题（**例** *．*．*），其中蕴涵着基本概念、基本方法与技巧．应该说，扎实熟练的基本概念，加上对基本方法的深入思考，是技巧的真正源泉．另外，在大多数章节里，还选编了一定数量的综合例题（**综例** *．*．*．），体现知识的综合性与交叉性，以训练综合运用所学知识进行分析问题及解决问题的能力．基于综合性与交叉性的考虑，在个别例题中所涉及的内容可能超前本章的内容安排．读者在使用本书时，对书内例题应首先立足于独立思考，而后有选择地查阅解答过程，对一些典型题，应争取有自己的解题方法，很可能你的方法会优于书中提供的方法，果真如此，正说明你学习的深入．对准备考研的读者，鉴于国家每年公布的考试大纲会有局部变化以及四类数学试卷的分类，在使用本书时，可参照考试大纲，有选择地略去书内某些章节．

每章后配备了模拟练习题及答案．读者应力争独立选做其中的题目，以求达到良好效果．

每册书后附有清华大学相应课程的近期试题及答案，以供读者练习．

全书编写工作得到清华大学数学科学系副主任白峰杉教授与其他许多教师的支持与帮助.限于编者水平及撰稿时间仓促,对书中的疏漏与错误,敬请读者批评指出.

本套书主编为刘坤林.《微积分(上)》的编者为刘坤林(1～13 章),《微积分(下)》的编者为谭泽光(14～23 章);《线性代数》的编者为俞正光(1～3 章),王飞燕(4～6 章);《概率论与数理统计》的编者为叶俊(1～5 章),赵衡秀(6～8 章).

作　者

2004 年 9 月于清华园

作者简介

谭泽光

1962 年毕业于清华大学. 清华大学责任教授.

长期在清华大学从事数学基础课程教学和应用数学及运筹学方面的科研工作，曾在奥地利 Graz University 任访问教授. 讲授过高等数学、线性代数、最优化理论基础等多门课程，分析系列课程负责人. 长期担任水木艾迪考研辅导班数学主讲.

负责过多项科研项目，发表学术论文 20 多篇，并编著数学规划等教材. 先后获省部级以上奖励四次，1992 年获国家科技进步二等奖.

任《高校应用数学学报》编委. 1997 年开始担任国家工科基础课程教学(清华数学)基地负责人，投入较多精力从事数学教改研究工作，2001 年获国家教学改革成果二等奖.

俞正光

1962 年毕业于清华大学. 清华大学责任教授.

清华大学代数系列课程负责人. 从事组合图论的研究，发表学术论文 10 多篇. 主编《线性代数与解析几何》、《理工科代数基础》等著作.

长期担任水木艾迪考研辅导班数学主讲. 1997 年开始担任国家工科基础课程教学(清华数学)基地负责人，从事数学教改研究工作.

曾参加全国工商管理硕士研究生入学考试研究中心组织编写的《MBA 联考考前辅导教材》，主编《全国工程硕士研究生入学考试数学考试大纲及考前辅导教材》等各类考研数学辅导教材.

刘坤林

1970 年清华大学数学力学系毕业. 清华大学责任教授.

从事基础数学与应用数学教学工作，两次获清华大学教学优秀奖. 研究方向：控制理论与系统辨识，随机系统建模及预测，并行计算. 1994 年至 1995 年在美国 Texas A&M University 与 Duke University 任访问研究教授并讲学. 发表学术论文 30 多篇，著有教材《工程数学》，《系统与系统辨识》. 先后七次获国家及省市部级科学技术进步奖. 水木艾迪考研辅导班主讲.

中国工业与应用数学学会常务理事，副秘书长. 系统与控制专业委员会委员，《控制

理论及其应用》特邀审稿专家.

赵衡秀　女

1962年毕业于清华大学. 清华大学数学科学系副教授.

研究方向为概率统计应用. 长期讲授“概率统计”及“微积分”等课程. 并担任水木艾迪考研辅导班数学主讲,清华大学MBA入学辅导数学主讲.

参加编写《MBA全国联考应试清华辅导数学教材》、《MBA入学命题预测数学试卷》、《考研数学常考知识点》等各类考研数学辅导教材.

王飞燕　女

1967年毕业于清华大学. 清华大学数学科学系教授.

主要研究方向:运筹学,经济数学. 参编过《线性代数》、《线性代数辅导》等书籍. 长期在清华大学从事数学教学与教学研究. 主要讲授的课程有:高等数学,代数与几何,数学模型等. 长期担任水木艾迪考研辅导班数学主讲.

曾获清华大学优秀教学成果奖.

叶俊

1993年北京师范大学数学系博士研究生毕业. 清华大学副教授.

专业方向:概率统计,应用数学. 主要从事随机过程及其应用、金融数学、时间序列分析等方面的研究. 曾编写《随机数学》等教材.

主要讲授本科生和研究生的概率统计、随机数学方法、微积分及高等概率等课程. 曾获清华大学首届青年教师教学优秀奖,1996,1997年度清华大学优秀教学成果特等奖,1999年获宝钢优秀教师奖.

长期担任水木艾迪考研辅导班数学主讲.

目　录

第 1 章　随机事件及其概率

1.1 引　　言

本章是概率论与数理统计的基础内容. 读者必须首先理解随机事件及其概率的有关概念，掌握事件的运算及用其表示事件的方法，熟悉事件间的关系. 熟练掌握概率的基本性质，会计算常见的古典概率、几何概率. 掌握利用概率的加法公式、乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式以及事件的独立性来计算相应事件的概率或条件概率.

随机事件以及事件之间的关系与运算是概率论中重要的基本概念. 在概率论中，许多题目就是计算某些事件的概率. 为此，首先要对所要讨论的事件有一个比较清楚的理解，要搞清楚所研究的问题是在一个什么样的样本空间中进行的，这是研究和解决概率问题的重要前提. 对一些比较复杂的事件，往往需要把它分解成若干个比较简单的事件的并、交、差等运算来表示，这种分解的方法需要大家在学习时加以注意，并会熟练地运用. 另外，在解题过程中，要经常利用集合的“文氏图”来考虑问题，这样能帮助我们全面地理解问题，而不致有所遗漏. 这类手段都是我们学习概率论需要掌握的基本方法.

本章的重点是概率的计算，除了古典概率与几何概率的直接计算外，要求读者熟练掌握各种概率计算公式，特别要注意在事件满足一定关系（包含、互不相容、独立）时计算公式的异同之处. 值得强调的是，作为本章的最主要内容之一的条件概率，本身就是一个概率，因此具有概率的全部性质，并且利用条件概率，也可以使我们从比较简单及容易知道概率（或条件概率）的事件去求出更复杂的事件的概率. 在这个过程中，乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式等起着关键的作用. 在使用它们时，关键要会“分情况”，即要学会将所求概率的事件适当地分解成互不相容的事件的并、交、差等，这是本章的难点，同样也是本章的重点.

本章的另一个主题是事件的独立性，它是概率论的最富有特色的概念之一. 要求大家掌握好独立性的定义，特别是要弄清多个事件相互独立的含义，学会利用独立性来计算事件的概率，特别是要学会利用 n 重伯努利试验等来处理相关问题.

1.2 事件的关系和运算

1. 三个基本概念

(1) 随机试验

如果试验满足下列三个特性：

① 可以在相同的条件下重复进行；

② 每次试验的可能结果不止一个，并且事先可以明确试验的所有可能结果；

③ 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

则称该试验为随机试验，简称试验，用 E 表示.

(2) 样本空间

试验的所有可能结果所构成的集合，称为该试验的样本空间，用 Ω 表示. 样本空间中的元素，即 E 的每个结果，称为样本点(或基本事件).

(3) 随机事件

在一次试验中可能发生也可能不发生，而在大量的重复试验中具有某种规律性的试验结果，称为随机事件，简称事件.

通常我们将事件理解为样本空间的一个子集. 在试验中当且仅当事件 A 所包含的某个样本点出现时，事件 A 才发生.

2. 事件之间的关系与运算

由于事件是样本空间的子集，所以事件之间的关系与运算就是集合的关系与运算，只是术语不同且赋予了概率的含义.

(1) 事件之间的四种关系

关　系	符　号	概　率　论	集 合 论
包含关系	$A\subset B$	事件 A 发生必有事件 B 发生	A 是 B 的子集
等价关系	$A=B$	事件 A 与事件 B 相等	A 与 B 相等
对立关系	$\overline{A}$	事件 A 的对立事件	A 的余集
互斥关系	$AB=\varnothing$	事件 A 与事件 B 不能同时发生(或互不相容)	A 与 B 无公共元素

（2）事件之间的三种运算

运 算	符 号	概 率 论	集 合 论
事件的和(并)	$A\cup B$(或 $A+B$)	事件"A 与 B 至少有一个发生"	A 与 B 的并集
	$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$	事件"$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生"	$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并集
事件的积(交)	$A\cap B$(或 AB)	事件"A 与 B 同时发生"	A 与 B 的交集
	$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$	事件"$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生"	$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交集
事件的差	$A-B$	事件"A 发生而 B 不发生"	A 与 B 的差集

（3）事件的运算法则

分配律：$AB\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$	交换律：$A\cup B=B\cup A,AB=BA$
德摩根律(对偶律)：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B},\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$	结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C);(AB)C=A(BC)$
补元律：$A\overline{A}=\varnothing,A\cup\overline{A}=\Omega$	还原律：$\overline{\overline{A}}=A$
吸收律：若 $A\subset B$，则 $AB=A$，且 $A\cup B=B$	分解律：若 $A\subset B$，则 $B=A\cup\overline{A}B$
蕴涵律：若 $AB=\varnothing$，则 $A\subset\overline{B},B\subset\overline{A}$	排中律：$A\cup\overline{A}=\Omega$
矛盾律：$A\cap\overline{A}=\varnothing$	差积转换律：$A-B=A\cap\overline{B}=A-(A\cap B)$

例 1.2.1 一个工人生产了 3 个零件，以事件 A_i 表示他生产的第 i 个零件是合格品 $(i=1,2,3)$，试用 $A_i(i=1,2,3)$ 表示下列事件：

① 只有第 1 个零件是合格品(B_1)；

② 3 个零件中只有 1 个合格品(B_2)；

③ 第 1 个是合格品，但后两个零件中至少有 1 个次品(B_3)；

④ 3 个零件中最多只有两个合格品(B_4)；

⑤ 3 个零件都是次品 (B_5)；

⑥ 3 个零件中最多有 1 个次品.

【解】 ① B_1 等价于"第 1 个零件是合格品，同时第 2 个和第 3 个都是次品"，故有 $B_1=A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$.

② B_2 等价于"第 1 个是合格品而第 2，第 3 个是次品"或"第 2 个是合格品而第 1，第 3 个是次品"或"第 3 个是合格品而第 1，第 2 个是次品"，故有 $B_2=A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$.

③ $B_3=A_1(\overline{A_2}\cup\overline{A_3})$.

④（方法 1）事件 B_4 的逆事件是"3 个零件都是合格品"，故 $B_4=\overline{A_1A_2A_3}$.

（方法 2）与 B_4 等价的事件是"3 个零件中至少有 1 个次品"，于是 $B_4=\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\overline{A}_3$.

⑤ $B_5=\overline{A}_1\,\overline{A}_2\,\overline{A}_3$，当然也可以利用事件"3 个零件中至少有 1 个次品"的逆事件与 B_5 等价，得出 $B_5=\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}$.

⑥ B_6 等价于"3 个零件中无次品"或"3 个零件中只有 1 个次品"，故有

$$B_6=A_1A_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3\cup A_1\,\overline{A}_2A_3\cup A_1A_2\,\overline{A}_3.$$

另外，也可以利用 B_6 与事件"3 个零件中至少有两个合格品"等价，知

$$B_6=A_1A_2\cup A_2A_3\cup A_1A_3.$$

【解毕】

【寓意】 本题的实质是考查用事件的运算符号来描述用普通语言表达的随机事件，以便今后运用公式计算概率. 同时，B_4 与 B_5 中的两个结果，验证了德摩根律的成立. 另外，从 B_4，B_5，B_6 的结果都可以发现，一个事件往往有多个等价的表达方式，在以后的概率计算中，要选择一个容易利用概率公式的表达方式，如在 B_6 的两个表达式中，第一种两两互不相容的分解表达式一般是较适合概率计算的.

例 1.2.2 设随机事件 A,B,C 满足 $C\supset AB,\overline{C}\supset\overline{A}\,\overline{B}$. 证明：$AC=C\overline{B}\cup AB$.

【思路】 要证 $AC=C\overline{B}\cup AB$，由于左边没有 B 出现，故可利用 B 和 $\overline{B}$ 构成 Ω 的一个划分，将 AC 写成 $AC=AC\Omega=AC(B\cup\overline{B})=ACB\cup AC\overline{B}$，再利用题设的条件来证明.

【证】 由于 $\overline{C}\supset\overline{A}\,\overline{B}$，故 $C\subset A\cup B$，从而

$$C\overline{B}\subset(A\cup B)\overline{B}=A\overline{B},$$

$$CA\overline{B}=C\overline{B}\cap A\overline{B}=C\overline{B},$$

$$ACB=C\cap AB=AB,$$

故 $AC=AC(B\cup\overline{B})=AC\overline{B}\cup ACB=C\overline{B}\cup AB.$ 【证毕】

【技巧】 像这类问题，可首先利用文氏图（见图 1.2.1）来考察，从而可直观地给出事件之间的关系.

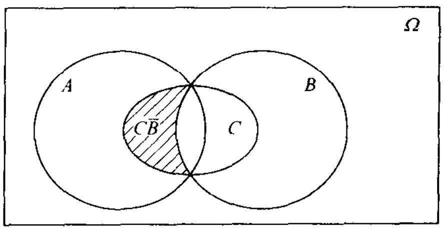


图 1.2.1

1.3 事件的概率

1. 概率的定义

(1) 概率的古典定义

若试验结果一共有 n 个基本事件 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$，且每次试验中各基本事件出现的可能性完全相同，而事件 A 由其中的 m 个基本事件 $\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_m}$ $(m\leqslant n)$ 组成，则事件 A 的概率 $P(A)=\dfrac{m}{n}$.

【注】 概率的古典定义要求试验具有两个特点：试验的样本空间中的样本点的有限性以及每次试验中每个样本点 ω_i 出现的等可能性，我们称具有上述两个特点的试验为古典概型随机试验，简称古典概型.

(2) 概率的几何定义

我们把具有如下特点的随机试验称为几何概型的随机试验，简称几何概型：

① 样本空间 Ω 是一个几何区域；

② 每个试验结果出现的可能性是相同的(即试验结果落在 Ω 中任一区域的可能性与该区域的几何测度成正比，其中，几何测度可以是长度、面积或体积).

在几何概型中，事件 A 发生的概率定义为

$$P(A)=\frac{A\text{ 的几何测度}}{\Omega\text{ 的几何测度}},\quad A\subset\Omega.$$

(3) 概率的统计定义

在 n 次重复独立试验中，事件 A 发生的频率具有稳定性，即它在某一数 p 附近波动，且当 n 越大时，波动幅度越小，则定义频率的稳定值 p 为事件 A 发生的概率，即 $P(A)=p$.

(4) 概率的公理化定义

设 E 是一个随机试验，Ω 为其样本空间，以 E 中所有事件组成的集合为定义域，对于任一事件 A，规定一个实数 $P(A)$，如果 $P(A)$ 满足下列三条公理：

① 非负性：$P(A)\geqslant 0$；

② 规范性：$P(\Omega)=1$；

③ 可列可加性：如果事件 $A_1,A_2,\cdots$ 互不相容，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i).$$

则称 $P(A)$ 是事件 A 的概率.

【注】 概率的前三个定义，均可理解为概率公理化定义的特例.

(5) 条件概率的定义

设 A 与 B 是两个随机事件，其中 $P(B)>0$，规定

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的条件概率.

在同一条件下，条件概率具有概率的一切性质.

2. 概率的直接计算法

(1) 古典概型的概率计算

古典概型的概率计算，既有问题的多样性，又有方法与技巧的灵活性，在概率论的长期发展与实践中，人们发现实际中许多具体问题可以大致归纳为三类，这三类问题是：

(Ⅰ) 摸球问题

例 1.3.1 袋中装有 α 个白球及 β 个黑球.

① 从袋中任取 $a+b$ 个球，试求所取的球恰含 a 个白球和 b 个黑球的概率($a\leqslant\alpha$, $b\leqslant\beta$)；

② 从袋中任意地接连取出 $k+1(k+1\leqslant\alpha+\beta)$ 个球，如果每球被取出后不放回，试求最后取出的球是白球的概率.

【解】 ① 从 $\alpha+\beta$ 个球中取出 $a+b$ 个球，总共有 $C_{\alpha+\beta}^{a+b}$ 种取法.

设 $A=\{$恰好取中 a 个白球，b 个黑球$\}$，故 A 中所含样本点数为 $C_\alpha^a \cdot C_\beta^b$. 从而

$$P(A) = \frac{C_\alpha^a \cdot C_\beta^b}{C_{\alpha+\beta}^{a+b}}.$$

② 从 $\alpha+\beta$ 个球中接连不放回地取出 $k+1$ 个球，由于注意了次序，所以应考虑排列. 因此这样的取法总共有 $P_{\alpha+\beta}^{k+1}$ 种.

设 $B=\{$最后取出的球为白球$\}$，则 B 中所含样本点数可以通过乘法原理来计算：即先从 α 个白球中任取一个(即第 $k+1$ 个球为白球)，有 α 种取法；而其余的 k 个在余下的 $\alpha+\beta-1$ 个中任取 k 个，有 $P_{\alpha+\beta-1}^k$ 种取法(同样要考虑排列). 因而 B 中包含的样本点共有 $\alpha \cdot P_{\alpha+\beta-1}^k$ 个. 故

$$P(B)=\frac{\alpha \cdot P_{\alpha+\beta-1}^k}{P_{\alpha+\beta}^{k+1}}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$ 【解毕】

【注】 ① 从上例知，在计算样本点总数以及事件所含的样本点的数目时，必须在同一确定的样本空间中考虑，如果一个考虑了顺序，则另一个的计算也必须按同样方法考虑顺序.

② 如果我们将“白球”、“黑球”换成“合格品”、“次品”等，就得到各种各样的摸球问题，这就是摸球问题的典型意义所在.

③ 在上例的两个问题中，我们采取的抽样方式实际上都是不放回的抽样，如果我们

改用有放回的抽样,即每次摸出球后仍放回袋中,则容易知道

$$P(A)=C_{a+b}^{a}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^{a}\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^{b},$$

$$P(B)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

对第一个问题(即事件 A),在“不放回抽样”与“放回抽样”情形下的问题的答案,恰好是我们以后所介绍的“超几何分布”与“二项分布”的实际背景.对第二个问题(即事件 B),无论是“不放回抽样”,还是“放回抽样”,答案都是$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$,其结果与 k 无关,此结果说明了日常生活中抓阄分票的合理性.

(Ⅱ)分房问题

例 1.3.2 将 n 个人等可能地分配到 $N(n\leqslant N)$ 间房中去,试求下列事件的概率:

$A=\{$某指定的 n 间房中各有一人$\}$;

$B=\{$恰有 n 间房,其中各有一人$\}$;

$C=\{$某指定的房中恰有 m $(m\leqslant n)$ 个人$\}$.

【解】 把 n 个人等可能地分配到 N 间房中去,由于并没有限定每一间房中的人数,故是一可重复的排列问题,这样的分法共有 N^n 种.

对于事件 A,今固定某 n 间房,第一个人可分配到 n 间房的任一间,有 n 种分法;第二个人可分配到余下的 $n-1$ 间房中的任一间,有 $n-1$ 种分法,以此类推,得到 A 共含有 $n!$ 个样本点,故

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}.$$

对于事件 B,因为 n 间房没有指定,所以可先在 N 间房中任意选出 n 间房(共有 C_N^n 种选法),然后对于选出的某 n 间房,按照上面的分析,可知 B 共含有 $C_N^n\cdot n!$ 个样本点,从而

$$P(B)=\frac{C_N^n\cdot n!}{N^n}.$$

对于事件 C,由于 m 个人可自 n 个人中任意选出,并不是指定的,因此有 C_n^m 种选法,而其余的 $n-m$ 个人可任意地分配到其余的 $N-1$ 间房中,共有$(N-1)^{n-m}$种分配法,故 C 中共含有 $C_n^m\cdot(N-1)^{n-m}$个样本点,因此

$$P(C)=\frac{C_n^m(N-1)^{n-m}}{N^n}=C_n^m\left(\frac{1}{N}\right)^m\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-m}$$ 【解毕】

【注】 可归入“分房问题”来处理的古典概型的实际问题非常多,例如:

① 生日问题:n 个人的生日的可能情形,这时 $N=365$ 天$(n\leqslant 365)$;