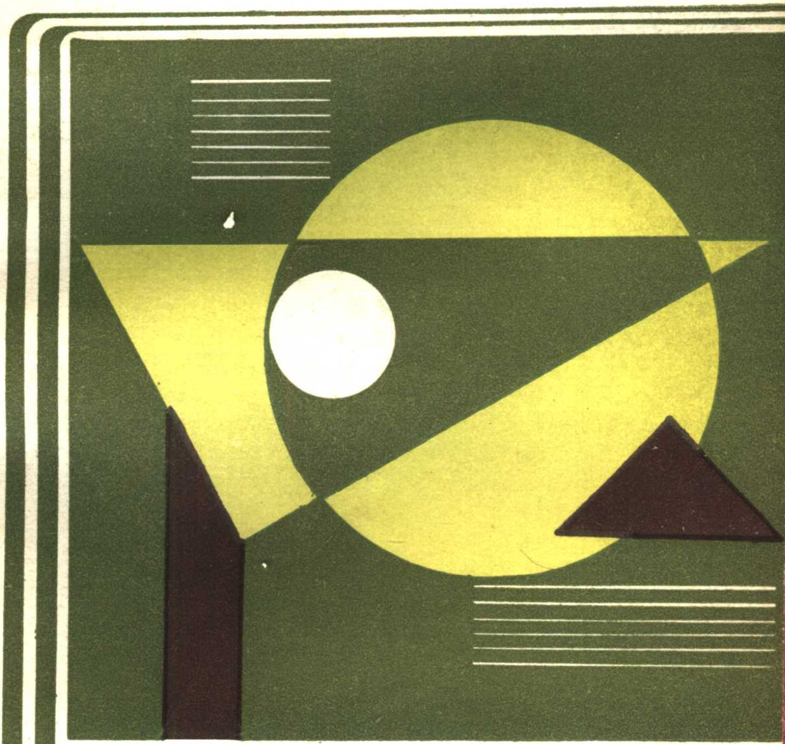
中学数学解题思维方法技巧

罗耀彬



广西教育出版社

中学数学
解题思维·方法·技巧

罗耀彬 编著

广西教育出版社

中学数学解题思维方法技巧
罗耀彬 编著

广西教育出版社出版
（南宁市民族大道7号）
广西新华书店发行
广西民族印刷厂印刷
*
开本 787×1092 1/32开 印张 6.375 138千字
1988年12月第一版第一次印刷
印 数：1—5,000 册
ISBN 7—5435—0433—2/G·363
定价：1.80 元

序

我的不少学生，他们已经当了多年中学教师了，见面时往往开玩笑似地说："老师当年教给我们的高等数学，现在统统还给你了。"言者也许无意，但听者却有心。我经常想："我教给你的知识全都忘了？都用不上了吗？果真如此，岂不令人太伤心了。"听多了，想多了，我觉得这恐怕就是旧的教学观念与方法的殆害吧！怎么说呢？旧教育观念把课本上现成知识当作教学的主要内容和任务，至于问题和结论是怎样提出来的？解题方法与技巧又是如何想到的？这些学生感兴趣而又难以回答的问题，对培养学生的能力十分重要的问题，教学中多是采取回避的态度，不予重视。即使讲一些，也是不自觉的，更不会让学生(连同教师本身)意识到这也是教学的主要内容和重要任务。

著名的美国数学教育家波利亚（G·Polya)认为："在教学中，技能比仅仅掌握一些知识更重要得多。所以在中学，也正如其他任何年级一样，在给学生传授一定数量的知识的同时，应该使学生具备一定程度的解题技能。"什么是数学技能呢？他说："数学技能就是解题能力——不仅能解决一般的问题，而且能解决需要某种程度的独立思考、判断力、独创性和想象力的问题。"这种观点是十分正确的。数学教学，不仅要使学生学到一些数学知识，而且要使他们获得一定的技能(包括分析思考问题的思维能力，应用已知知识解决问题的能力，甚至能独立提出问题的想象与创造能力等)，这是数学

教学的现代观念，它是培养具有创造性的四化建设人才的需要。如果在教学中这样做了，即既传授知识，同时又重视能力的培养，那么，学生毕业后即使少用或不用所学的具体知识，而对从学习中获得的技能，不管做什么工作，它总是用得上的。也就不会发出“统统还给老师”的感叹了。

所幸的是，新的数学教学观念已逐渐被人们所接受，并且许多有识之士在教学中不断试验探索，不断总结出经验。最近几年许多数学杂志对此也展开热烈讨论，介绍有益的经验，有关著作也相继问世。罗耀彬同志的《中学数学解题思维·方法·技巧》一书，就是他对二十多年中学数学教学实践的总结，在广西民族学院从事数学教学法教学工作的体会。他以解题为中心，阐述数学思维的规律，介绍解题的方法与技巧。其中凝聚着一位苦心钻研，勇于探索的普通数学教师的心血，有不少新的见解和体会。这本书不仅从内容上，而且从钻研与探索的精神上都是值得学习的。

我们相信，根据“三个面向”的要求，数学教学改革在我国将更深入开展，更多更好的数学教育的文章与著作问世。

方初宝

1987年8月

目　录

第一章　为什么要研究解题

美国《数学月刊》主编哈尔莫斯（P. R. Halmos）说过："数学究竟是由什么组成的，公理吗?定理吗?证明吗?概念吗?定义吗?理论?公式?方法?诚然，没有这些组成部分，数学就不存在，这些都是数学的必要组成部分。但是，它们中的任何一个都不是数学的心脏。这个观点是站得住脚的。数学家存在的理由就是解问题。因此，数学的真正部分是问题和解。"

学习数学，正如学习其他理论一样，都是为了解决问题。因此，解题的教与学，就显得十分重要。要真正认识解题的重要性，必须从探讨数学习题的功能入手。

一、数学习题的功能

一般来说，中学数学的习题具有以下的功能：

（一）教学的功能

首先，正如苏联的奥加涅相等所指出的，数学习题是"使学生建立基本概念（表象，消化和巩固概念）；概念间的各种联系（从种到类，一科内部的联系以及几科之间的联系等等）；主要的思想、定律、法则、原理等；主要的思想、定律、判断之间，以及它们在结构关系上的各种联系等；推理的基本形式，引用的方法；课程的主要技能技巧，运用相

应的术语和符号的技能技巧；把数学内容模型化的技能技巧（借助图表等）。”一句话，数学习题是形成概念、理解和掌握知识所必需的。

例如，学生在学完二倍角公式 $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ 后，对公式中的角 α 的任意性缺乏认识，因而对应用二倍角公式化简 $\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}$ 束手无策，这就要在解题中提高。

又如，在学过三角形的外心、垂心概念后，往往以为它们在三角形内部，而解答习题："已知 $Rt\triangle ABC$ 三边长分别为 3 、 4 、 5 ，求三角形垂心到外心的距离。”就有助于这些概念的完整理解，消除误会。

其次，数学习题还是检查教学情况，提供反馈信息的材料。教师正是通过学生解答习题的信息反馈，不断改变教学方法，提高教学质量。

(二)教育的功能

包含两个方面．1．学生从解题的成功中得到愉快，体会知识的应用，就能更好地激发学习的自觉性、积极性．可以想象，一位年仅十二、三岁的初中生，在解“化简 $\sqrt{17-12\sqrt{2}}$ ”的题中，能从自己已有知识出发，想到 $17-12\sqrt{2}$ 应是两数差的平方，$12\sqrt{2}$ 应是两数乘积的两倍，并从 $2\cdot6\sqrt{2}$、$2\cdot3\cdot2\sqrt{2}$ 及 $2\cdot2\cdot3\sqrt{2}$ 中，由 $3^2+(2\sqrt{2})^2=17$，以及 $17=9+8$，从而得出结论．这成功的喜悦会促使他作更多的解题尝试．因此，布置学生智力的“最近发展区”的习题，多提供学生获得成功的机会，让他们看到自己学习的潜力，就会调动学习的积极性、主动性。

2．学生从老师的讲解中学到思维的方法，增强学习的信心。

例如，讲解“已知 a^2、b^2、c^2 成等差数列，求证$\frac{1}{b+c}$、$\frac{1}{c+a}$、$\frac{1}{a+b}$也成等差数列。”

如果教师照本宣科：

因为 a^2、b^2、c^2 成等差数列，而等差数列各项同加一个数，不会改变等差性，所以，$a^2+(ab+bc+ca)$、$b^2+(ab+bc+ca)$、$c^2+(ab+ba+ca)$也是等差数列．即$(a+b)(a+c)$、$(a+b)(b+c)$、$(a+c)(b+c)$成等差数列．又等差数列同除以同一个非零数，也不会改变等差性（只改变公差）．故

$$\frac{(a+b)(a+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)},\ \frac{(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)},$$

$\frac{(a+c)(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$成等差数列．即$\frac{1}{b+c}$、$\frac{1}{a+c}$、$\frac{1}{a+b}$成等差数列．

显然，从逻辑上，从传授知识的角度来看，这种讲解是无可指责的．但从培养学生思维能力看，这种讲解是不可取的．因为对此，学生除了佩服老师“高明”之外，只能得出“数学真难”等自卑和害怕心理．他们无法从中悟出任何思维方法．因此，教师讲题时，应该尽量接近于思维过程：

从已知推出求证，一时还看不清，原因是结论的形式我们太陌生，因此，首先要改变它的形式：要证$\frac{1}{b+c}$，$\frac{1}{a+c}$，$\frac{1}{a+b}$成等差数列，只需证$\frac{2}{a+c}=\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}$．仍感陌生，再化为：$2(a+b)(b+c)=(a+c)(a+b)+(a+c)(b+c)$，即

$2(b^2+ab+bc+ca)=(a^2+ab+bc+ca)+(c^2+ab+bc+ca)$，这正好是已知的 $2b^2=a^2+c^2$。

学生可以从后一种讲法中学到解题的思维方法，无疑会增强学好数学的信心。

再如，推证等比数列$\{a_n\}$前n项和公式$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$，其中$q\neq 1$。如果教师照书讲：乘以公比$q\longrightarrow$相减，…。学生顶多能熟记公式的形式，而对解题思维和解题技巧失之交臂。

如果这样讲：前面我们按著名数学家塔尔塔哥夫斯基提出的“抓特点”法，发现等差数列$\{a_n\}$的前n项和公式。现在，我们能否也借助“抓特点”法来求出等比数列$\{a_n\}$前n项的和呢？

等比数列的特点是：第二项起，后项是它前项的q倍，故

$$
\begin{array}{rl}
S_n= & a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1} \\
-)\ q\cdot S_n= & \quad\ +a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}+a_1q^n \\
\hline
(1-q)S_n= & a_1-a_1q^n
\end{array}
$$

$$\therefore S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.\ (q\neq 1)$$

这样，学生既可以进一步得到“抓特点”法的数学解题思维训练，又可掌握“错位求和”的解题技巧，可谓一举多得。以后遇到类似以下的问题，他们就不至于束手无策了。

(1) 求和$S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{3}{8}+\cdots+\dfrac{n}{2^n}$.

(2) 求和$S_n=1^2+2^2x+3^2x^2+\cdots+n^2x^{n-1}$.

(3) 求和$S_n=a+(a+1)x+(a+2)x^2+\cdots+(a+n-1)x^{n-1}$.

(4) 求证：$\lg(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt[8]{8}\cdots\sqrt[2^n]{2^n}<\lg 4$.

目前使用的教科书，往往侧重于知识的介绍和积累，极少注意到解题思维能力的训练。它只给出定理的内容和解题的过程，很少提及发现定理的线索、过程及解法寻觅的线索和过程。因此，教师要通过讲授知识来培养学生的思维能力，就必须在讲课时，抛弃照本宣科，把发现定理的线索，寻觅解法的过程，解题中问题的转化，自然产生的联想，猜测等加以阐述。可以这样说，揭示数学思维过程，形成和发展具有数学思维特点的智力结构，应该作为教师讲题的一个重要教学原则，也应该是学生看题或解题后反思回味的重要一环。因为只有掌握了正确的数学思维和不断地归纳总结解题的方法和技巧，才能有效地发展智力。单纯地把解题当作巩固和检验知识手段的旧教学思想该收起来束之高阁了，因为它已不适应培养现代化人才的需要。

（三）发展的功能

解题是一种独立的创造性活动，习题提供的问题情境，需要探索思维和整理思维，因此可以多方面地培养人的观察、归纳、类比、直觉及寻找结论的方法、精确而简要地表述等一系列技能，能给学生以施展才华，发展智力的机会。

通过解题，可以培养、发展学生以下必不可少的思维品质：

1．思维的深刻性。

它的特征是能分清主次，能揭示推理的逻辑结构，能洞察每一问题的实质，能揭示被掩盖的某些个别有用的特征等。

例如，已知 α、β、γ 是方程 $x^3-x+1=0$ 的三个根。求 $\alpha^5+\beta^5+\gamma^5$ 的值。

本题表面上似乎只要把方程的三个根求出代入即可。但

这三个根不好求．联想到韦达定理，有

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1\\ \alpha\beta\gamma=-1\end{cases}$$

想到这一步就意味着有了突破，若下一步能从研究的条件、结论中揭示被掩盖的某些特性，问题就迎刃而解了．

$\because \alpha^3=\alpha-1$，$\beta^3=\beta-1$，$\gamma^3=\gamma-1$。

$$\begin{aligned}\therefore \text{原式}&=\alpha^3\alpha^2+\beta^3\beta^2+\gamma^3\gamma^2\\ &=(\alpha-1)\alpha^2+(\beta-1)\beta^2+(\gamma-1)\gamma^2\\ &=\alpha^3-\alpha^2+\beta^3-\beta^2+\gamma^3-\gamma^2\\ &=\alpha-1-\alpha^2+\beta-1-\beta^2+\gamma-1-\gamma^2\\ &=(\alpha+\beta+\gamma)-3-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\\ &=0-3-[(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)]\\ &=-3-[0-2(-1)]\\ &=-5.\end{aligned}$$

2．思维的灵活性．

它的特征是迁移能力强，能从不同的角度、方向，用多种不同的方法解题．

例如，解关于 x 、 y 、 z 的方程组：

$$\begin{cases}(b+c)(y+z)-ax=b-c\\ (c+a)(z+x)-by=c-a\\ (a+b)(x+y)-cz=a-b\end{cases}$$

这里 $a+b+c\neq0$。

思维灵活的学生，能反复观察题目的特征，广泛联想，

从 $k-k$ 的技巧应用中，找到以下简捷的解法：

化原方程组为

$$\begin{cases}(b+c)(x+y+z)-x(a+b+c)=b-c\\(c+a)(x+y+z)-y(a+b+c)=c-a\\(a+b)(x+y+z)-z(a+b+c)=a-b\end{cases}$$

三式相加，得 $2(a+b+c)(x+y+z)-(a+b+c)\cdot(x+y+z)=0\Rightarrow x+y+z=0$。

$$\therefore\begin{cases}-x(a+b+c)=b-c\\-y(a+b+c)=c-a\\-z(a+b+c)=a-b\end{cases} 即\begin{cases}x=\dfrac{c-b}{a+b+c}\\y=\dfrac{a-c}{a+b+c}\\z=\dfrac{b-a}{a+b+c}\end{cases}$$

3．思维的开阔性．

它的特征是能概括出有意义的方法，这方法迁移范围广，能抓住问题的全貌，着眼于事物间的联系．

例如，a、b 同号，证明$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geqslant 2$。

此题解答后，若学生能发现并扩大应用于下列题组，就表明有较大的思维开阔性．

（1）x 为任意实数，求证：$\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\geqslant 2$。

（2）求证：$\lg\pi+\log_\pi 10>2$。

（3）求证：$(x^{11}+x^{-11}-1)^{-1}\leqslant 1$。

（4）若 $x>0$，求 $y=1-x^3-x^2-x-x^{-1}-x^{-2}-x^{-3}$ 极值．

（5）若A、B为 Rt△两锐角，求证：$\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B\geqslant 2$。

(6) 若A、B、C为$\triangle ABC$三内角，且都是锐角．求证：

$$\operatorname{tg}A(\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C)+\operatorname{tg}B(\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}A)$$
$$+\operatorname{tg}C(\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B)\geqslant 6.$$

4．思维的批判性．

它的特征是能评价解题思路的选择是否正确，以及评价这种思路必然导致的结果，能考虑正、反两方面的论据，找出和改正自己的解题错误，愿意进行各种方式的检验等．

5．思维的论证性．

它的特征是能耐心和精细地搜集足以进行某种判断的事实，善于去伪存真，揭示题设与题断间的必然关系，能进行一系列有充足根据的合乎逻辑的推理等．

例如，平面上有 $2n+3$ 个点，其中任意三点不共线，任意四点不共圆．求证：必定可以在其中找到三点作圆，使其余 $2n$ 个点中 n 个在圆外，n 个在圆内．

解本题，易想到取三点求出外接圆心，再比较其余各点到圆心的距离．但这涉及许多难以建立联系的变量．思维开阔、灵活、论证性强的学生会立即抛弃这想法，转而考虑单变量：若固定两点，让另一点动，考虑到动点到两定点的张角，于是选定张角作为单变量．得到如下的证明：

不难证明：在设 $2n+3$ 个点中，总可以取两点M、N，使其余各点在MN直线的同旁．剩下的 $2n+1$ 个点分别向M、N所作的张角中没有相等的两个．（假定有$\angle MA_hN=\angle MA_iN$，则$M$、$A_h$、$A_i$、$N$四点共圆，与原设矛盾．）故 $2n+1$个点可按它们向M、N所作张角由小到大依次为 A_1，A_2，A_3，…，A_{2n+1}，其中点 A_{n+1} 和M、N 的外接圆，使点A_1，A_2，…，A_n 在圆外．（它们向MN张角小于圆周角$\angle MA_{n+1}N$．）类似地 A_{n+2}，A_{n+3}，…，A_{2n+1} 在圆内．

二、数学习题的分类与教学

怎样教学生解题？显然，这是最复杂的问题之一。因为没有（也不可能有）一种通用的（可能的）方法。掌握了它就保证能解任何问题。

苏联的 *А.А.*斯托利亚尔（А.А.СТОЛЯР）把数学习题分为两大类：Ⅰ典型题。即有特殊解法（已解决了算法）的许多种类（类型）的问题。如线性方程的解法及其研究；二元线性方程（组）的解法及其研究；二次方程的解法及其研究；解一次及二次不等式；解简单超越方程；各种函数的研究等等。Ⅱ非典型题。即没有（不可能有或还没有找到）算法的种类（类型）的问题。

斯托利亚尔认为，“教学生解这两种问题都是必要的。”他认为，当存在特殊算法时，教者应引导学生发现和掌握算法以便遇同类的其它问题时，一下子就用上这种方法；当算法不适用时，教师应提出某些有益的、能促使学生求解的建议，引导学生去寻求解法。

因此，研究解题，充分发挥习题的功能，培养、发展学生的思维品质，从解题中学会思考，应该是十分重要的。但是，在教学中，许多教师由于没有很好地认识习题的功能。加上高考又以解题的形式出现，因而出现“题海战术”的现象，不少教师舍本求末，抽去了习题本来具有的使概念具体完整、启迪学生创新的功能这一本质东西，以大量的死套的模式、题型——离开了主干的末梢性的知识来充斥课堂。同时，教法上包办代替，照本宣科，使学生失去了自己去发现、探索、归纳等应有的思维训练。其结果，只能使学生高分低能，不会思索，成为不适应社会主义现代化所需的人才。

第二章　提高解题能力的三要素

要发挥数学习题的功能，提高解题能力，首先必须熟练、准确地掌握数学的基本知识，好比一位武士，要克敌制胜，首先要具有较好的体力一样．而数学的解题方法和技巧，就好比武士的十八般武艺．正确的解题思维，好比武士取得比武胜利的战略和策略．有勇有谋，才能立于不败之地．所以，(1)熟练地掌握基础知识；(2)掌握常用的解题方法和技巧；(3)掌握正确的解题思维，是解题的三要素．它们互相联系，互相渗透，有机地结合在一块．

一、熟练掌握基础知识

离开基本知识，根本谈不上解题能力．

例1．若 x，y 为实数，且 $y=\sqrt{\dfrac{2x+1}{4x-3}}+\sqrt{\dfrac{2x+1}{3-4x}}+1$，试求 $y+xy+x^2y+\cdots+x^{n-1}y+\cdots$．

如果拿到题目，立即盲目地进行平方运算，试图找到 x、y 的关系，将是徒劳无益的，但是若对基础知识熟悉，便会很快发现：

(1) 被开方数恰为相反数；

(2) 由算术根的意义，有 $\dfrac{2x+1}{4x-3}\geqslant 0$，$\dfrac{2x+1}{3-4x}\geqslant 0$，从而