复变函数论

张培璇

FUNCTIONS OF A COMPLEX VARIABLE

复 变 函 数 论

张 培 璇

山 东 大 学 出 版 社

鲁新登字09号

复变函数论

张培璇

*

山东大学出版社出版发行
山东省新华书店发行
山东大学印刷厂印刷

*

850×1168毫米　大32　8.125印张　210千字
1993年12月第1版　　1993年12月第1次印刷
印　数　1——1000册

ISBN7－5607－0847－1/O・51
定价：　4.50元

内容提要

本书是借鉴国外教材，结合教学实践编写的复变函数新教材，包含了作者的教学研究成果。

书中采用了新的编排：以初等函数、局部柯西定理及应用、大范围柯西定理及应用、解析延拓为主线；以多值函数单值化问题步步深入的研究为支线，展开复变函数的基本理论，以代替微分、积分、级数为序的传统安排。

书中的基本定理（柯西定理）采用了同调形式的表述和迪克松在 1971 年给出的最新证明. 难点多值函数，作者给出新的处理方法。

本书适合作为数学系的复变函数教材。

前　　言

随着现代数学的发展,近二、三十年复变函数中的基本定理——柯西(Cauchy)定理有了很大的变革,克服了传统表述和证明中的种种弊端,出现了许多新的形式,在国外很快地被普遍采用。

通过比较鉴别,教材中的柯西定理采用了同调形式的表述和约翰·迪克松(John Dixon)1971年在美国数学会会报上给出的简短明了的证明。

适应迪克松证明的需要,教材中的核心内容:柯西定理及其应用,分成局部和整体两部分,安排在第三章——第六章中。

线性变换和初等映照等放在前两章,这样从几何直观入手,便于教和学。

对于难点多值函数,不宜于脱离复变函数理论的中心内容孤立地进行处理。在第五章中利用单连通区域的柯西定理解决了初等多值解析函数

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com

的单值分支问题。

第七章涉及到理论的进一步发展，包含了罗朗(Laurent)级数、调和函数、解析延拓等内容，并用同伦方法证明了十分重要的单值定理，这一章内容可以根据不同情况选读。

严格地叙述复变函数理论是和平面拓扑的基本概念分不开的。指标、同调、同伦的概念，由于它们在复变函数中的广泛应用，已成为复变函数理论的基石，反复运用这些概念，常常会使同学们着迷。

在编写过程中，对各部分内容都尽量采用新的写法，为使教材既论证严谨，又可教可读，我们经过了长期的努力，但由于水平所限，不足之处实所难免，望大家批评指正。

作　者

1992年12月

目　录

第一章　复数的几何

§1　复数及其几何表示

1. 复数的概念

一对有序的实数 a,b 叫做复数，记作 (a,b)，其加法和乘法由下式定义：

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d),$$
$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc).$$

容易验证它满足加法、乘法的交换律、结合律和分配律. $(0,0)$ 和 $(1,0)$ 分别是零元素和单位元素，减法和除法作为逆运算来定义.

把复数 $(a,0)$ 看作实数 a，即 $(a,0)=a$. 于是复数是实数的推广.

在实数域中没有一个数的平方等于 -1，但是推广到复数域后，确实存在这样的数，它的平方等于 -1.

事实上，考虑复数 $(0,1)$，由乘法运算

$$(0,1)^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1.$$

记 $(0,1)=i$，于是 $i^2=-1$. i 叫做虚单位.

对于任何一个复数 (a,b)，由加法和乘法的定义知，

$$\begin{aligned}(a,b)&=(a,0)+(0,b)\\&=(a,0)+(b,0)(0,1)=a+bi.\end{aligned}$$

因此复数 (a,b) 可以写成 $a+bi$ 的形式，其中 a,b 都是实数，a 叫做

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

复数 $a+bi$ 的实部，b 叫做复数 $a+bi$ 的虚部. 以后对于复数就不再使用有序的实数对的记号了.

2. 复数的平面表示

(1)复平面

复数 $z=x+iy$ 可用平面直角坐标系中坐标为 x,y 的点来表示(图 1－1)，于是复数和平面中的点一一对应. 表示复数的平面叫做复平面，通常记作 C.

复数 $z=x+iy$ 也可用坐标为 x,y 的平面矢量来表示. 矢量的长度叫做复数 z 的模，记为 $|z|$. 当 $z\neq 0$ 时，矢量和 x 轴正向的倾角叫做复数 z 的辐角，记作 $\mathrm{Arg}z$.

如果把相等的矢量看作同一个矢量，复数和复平面的矢量也一一对应，而且这种对应关系使复数的加法和矢量的加法相一致，因此复数的加法可按平行四边形法则或三角形法则几何作图(如图 1－2 所示). 同样复数的减法，复数和实数的乘法也可以看成是相应的矢量运算，由此可以推出：

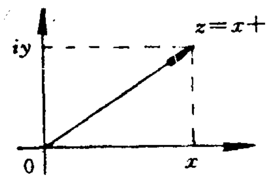

图 1—1

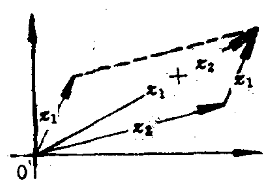

图 1—2

以点 z_1 为起点，点 z_2 为终点的矢量表示复数 z_2-z_1.

事实上，如图 1－3 所示，以原点 o 为起点的矢量 $\overrightarrow{oz_1}$ 表示复数 z_1，矢量 $\overrightarrow{oz_2}$ 表示复数 z_2，于是矢量 $\overrightarrow{z_1z_2}=\overrightarrow{oz_2}-\overrightarrow{oz_1}$ 表示复数 z_2-z_1.

这样一来，点 z_1 和点 z_2 的距离应为 $|z_1-z_2|$，矢量 $\overrightarrow{z_1z_2}$ 与 x 轴

正向的倾角应为 $\mathrm{Arg}(z_2-z_1)$(图 1—4).

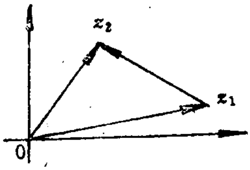

图 1—3

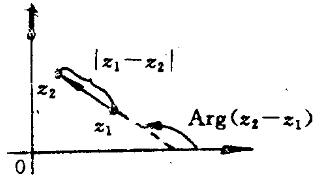

图 1—4

(2)复数的三角式

复数 $z=x+iy$ 的实部 x、虚部 y、模 r、辐角 θ 之间有如下的关系(图 1—5):

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \mathrm{tg}\theta=\frac{y}{x}.$$

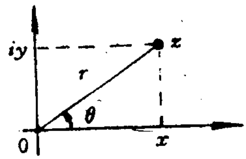

图 1—5

当 $z\neq0$ 时,辐角 $\mathrm{Arg}z$ 才有意义且是多值的,其各值之间相差 2π 的整数倍.它位在区间$(-\pi,\pi]$上的值叫做辐角的主值,记作 $\arg z$.于是

$$-\pi<\arg z\leqslant\pi,$$

$$\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi,\quad (k\text{ 为任意整数}).$$

复数也可用其模和辐角来表示,即

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

它叫做复数的三角式,用复数的三角式进行乘除运算是方便的.

若复数

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),\quad z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2),$$

于是由三角公式知,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)],$$

从而得到

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|,$$

$$\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg} z_1 + \mathrm{Arg} z_2.$$

类似地,有

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)] \qquad (z_2 \neq 0),$$

于是又得到

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\mathrm{Arg}(z_1/z_2) = \mathrm{Arg} z_1 - \mathrm{Arg} z_2.$$

上述两个关于辐角的等式,应理解为两边所取的值的集合相同.而对于辐角的主值,则有

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi,$$

其中 k 适当地选取 $0,-1,1$ 三个数之一,以保证上式右边的三数之和位在区间$(-\pi,\pi]$中.

以 z_1 为顶点,矢量$\overrightarrow{z_1 z_2}$为始边,矢量$\overrightarrow{z_1 z_3}$为终边的角数值上等于 $\mathrm{Arg}\,\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$. 由此知 z_1, z_2, z_3 三点共线的条件是比值$\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$为实数.

(3)共轭复数

对于 $z=x+iy$ 来说,$\bar{z}=x-iy$ 叫做它的共轭复数.它有如下的简单性质(其中 $\mathrm{Re}(z)$,$\mathrm{Im}(z)$分别表示 z 的实部和虚部):

$$z+\bar{z}=2\mathrm{Re}(z), \quad z-\bar{z}=2i\mathrm{Im}(z),$$

$$\bar{\bar{z}}=z, \quad |\bar{z}|=|z|, \quad z\bar{z}=|z|^2, \quad \overline{z_1 \pm z_2}=\bar{z}_1 \pm \bar{z}_2,$$

$$\overline{z_1 z_2}=\bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)}=\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} \qquad (z_1 \neq 0).$$

在复平面上,z 和 $\bar{z}$ 关于实轴对称,z 和 $-z$ 关于原点对称(如图 1-6 所示).

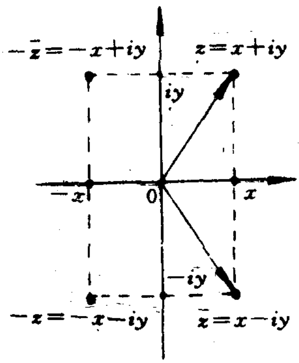

图 1—6

(4)例题.

例 1　试证下面公式：

$|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)+|z_2|^2.$

证　$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})$

$$=z_1\bar{z}_1+\bar{z}_1z_2+z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_2$$

$$=|z_1|^2+2\mathrm{Re}(\bar{z}_1z_2)+|z_2|^2.$$

利用例 1 且注意到 $|\mathrm{Re}(\bar{z}_1z_2)|\leqslant|z_1z_2|=|z_1||z_2|$，我们立刻推得复数的模的三角不等式：

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|,$$

$$|z_1+z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||.$$

(其几何意义是三角形两边之和大于第三边.)

在例 1 中，记 z_1、z_2 的辐角为 θ_1、θ_2，于是

$$\mathrm{Re}(\bar{z}_1z_2)=|z_1||z_2|\cos(\theta_2-\theta_1)$$

$$=-|z_1||z_2|\cos\theta \qquad (\theta\text{ 如图 1－7 所示}),$$

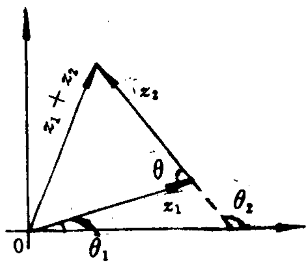

图 1—7

由此得到平面三角的余弦公式：

$$|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1||z_2|\cos\theta.$$

例 2　解方程：　$z^n=a\qquad(a\neq0).$

解　令 $a=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$，$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，因而

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta).$$

于是方程可改写为：

$$r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

故有

$$r^n=\rho;\ n\theta=\varphi+2k\pi\quad(k\text{——整数}),$$

亦即　　$r=\sqrt[n]{\rho}$（算术根）；$\theta=\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}$，

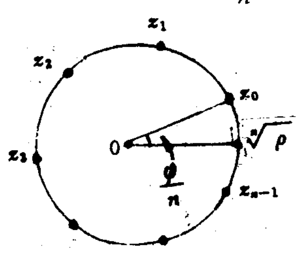

图 1—8

从而

$$z=\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\ (k=0,1,\cdots,n-1).$$

这 n 个根均匀分布在以原点为心，以 $\sqrt[n]{\rho}$ 为半径的圆周上(图 1—8).

(5)圆、直线

在复平面中，圆和直线的方程用复数 z 表示常常更方便.

方程
$$|z-z_o|=R$$
表示以 z_o 为心，R 为半径的圆；$|z-z_o|<R$ 表示圆的内部，常记作 $D(z_o,R)$；而 $|z-z_o|>R$ 表示圆的外部. 以 z_o 为心的圆域也常叫作 z_o 的邻域.

方程
$$z=z_1+\lambda(z_2-z_1)(-\infty<\lambda<+\infty)$$
表示过点 z_1 和 z_2 的直线，其中 $0\leqslant\lambda\leqslant1$ 的部分表示连结 z_1 和 z_2 的线段，记作 $[z_1,z_2]$.

若 a 是直线上的一点，b 所表示的矢量是直线的方向矢量，则直线的方程应为 $z=a+bt(-\infty<t<\infty)$，若 $b\neq0$，也可写成 $\mathrm{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right)=0$. 不等式 $\mathrm{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right)>0$，$\mathrm{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right)<0$ 分别表示它所确定的两个半平面，特别地 $\mathrm{Im}z=0$ 是实轴，$\mathrm{Im}z>0$ 和 $\mathrm{Im}z<0$ 是上半平面和下半平面.

两条直线
$$z=a_1+b_1t\quad(-\infty<t<+\infty,b_1\neq0)$$
和
$$z=a_2+b_2t\quad(-\infty<t<+\infty,b_2\neq0)$$
是平行的充要条件是 $\frac{b_1}{b_2}$ 为实数，是正交的充要条件是 $\frac{b_1}{b_2}$ 是纯虚数.

例 3　过点 i 作直线 $z=(1+i)t\ (-\infty<t<+\infty)$ 的垂线，并

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com