

复变函数论

FUNCTIONS OF
A COMPLEX
VARIABLE

张培璇

复变函数论

张培璇

山东大学出版社

鲁新登字 09 号

复变函数论

张培琰

*

山东大学出版社出版发行

山东省新华书店发行

山东大学印刷厂印刷

*

850×1168 毫米 大 32 8.125 印张 210 千字
1993 年 12 月第 1 版 1993 年 12 月第 1 次印刷
印 数 1—1000 册

ISBN7-5607-0847-1/O·51

定价： 4.50 元

内 容 提 要

本书是借鉴国外教材,结合教学实践编写的复变函数新教材,包含了作者的教学研究成果。

书中采用了新的编排:以初等函数、局部柯西定理及应用、大范围柯西定理及应用、解析延拓为主线;以多值函数单值化问题步步深入的研究为支线,展开复变函数的基本理论,以代替微分、积分、级数为序的传统安排。

书中的基本定理(柯西定理)采用了同调形式的表述和迪克松在1971年给出的最新证明.难点多值函数,作者给出新的处理方法。

本书适合作为数学系的复变函数教材。

前 言

随着现代数学的发展,近二、三十年复变函数中的基本定理——柯西(Cauchy)定理有了很大的变革,克服了传统表述和证明中的种种弊端,出现了许多新的形式,在国外很快地被普遍采用。

通过比较鉴别,教材中的柯西定理采用了同调形式的表述和约翰·迪克松(John Dixon)1971年在美国数学会会报上给出的简短明了的证明。

适应迪克松证明的需要,教材中的核心内容:柯西定理及其应用,分成局部和整体两部分,安排在第三章——第六章中。

线性变换和初等映照等放在前两章,这样从几何直观入手,便于教和学。

对于难点多值函数,不宜于脱离复变函数理论的中心内容孤立地进行处理。在第五章中利用单连通区域的柯西定理解决了初等多值解析函数

的单值分支问题。

第七章涉及到理论的进一步发展,包含了罗朗(Laurent)级数、调和函数、解析延拓等内容,并用同伦方法证明了十分重要的单值定理,这一章内容可以根据不同情况选读。

严格地叙述复变函数理论是和平面拓扑的基本概念分不开的。指标、同调、同伦的概念,由于它们在复变函数中的广泛应用,已成为复变函数理论的基石,反复运用这些概念,常常会使同学们着迷。

在编写过程中,对各部分内容都尽量采用新的写法,为使教材既论证严谨,又可教可读,我们经过了长期的努力,但由于水平所限,不足之处实所难免,望大家批评指正。

作 者

1992年12月

目 录

第一章 复数的几何	(1)
§ 1 复数及其几何表示	(1)
1. 复数的概念	(1)
2. 复数的平面表示	(2)
3. 复数的球面表示	(8)
§ 2 复平面拓扑	(12)
1. 平面收敛点列	(12)
2. 开集、闭集	(14)
3. 紧集	(17)
4. 连续映照	(20)
5. 路径和区域	(23)
§ 3 线性变换	(30)
1. 基本性质	(30)
2. 典型的线性变换	(35)
3. 非欧几何学	(36)
第二章 初等函数及其映照	(40)
§ 1 幂级数	(40)
1. 级数	(40)
2. 幂级数的收敛圆	(41)
§ 2 初等函数	(44)
1. 指数函数、三角函数	(44)
2. 对数函数、幂函数	(48)
§ 3 解析函数	(52)

1. 解析的概念	(52)
2. 初等函数的解析性	(57)
3. 柯西——黎曼方程	(61)
§ 4 初等映照	(65)
1. 导数的几何意义	(65)
2. 映照 $\omega = z^n$	(67)
3. 映照 $\omega = e^z$	(70)
4. 映照 $\omega = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$	(71)
5. 例题	(72)
第三章 局部柯西定理	(78)
§ 1 复变函数的积分	(78)
1. 沿路径的积分	(78)
2. 闭路径的指标	(81)
§ 2 凸域中的柯西定理	(85)
1. 预备定理	(85)
2. 三角形的柯西定理	(86)
3. 凸域中的柯西定理	(90)
4. 凸域中的柯西公式	(92)
§ 3 幂级数展开	(94)
1. 泰勒定理	(94)
2. 摩勒尔定理、刘维尔定理	(97)
第四章 解析函数的局部性质	(103)
§ 1 零点	(103)
1. 零点的孤立性	(103)
2. 恒等定理	(106)
§ 2 最大模原理、希瓦兹引理	(107)
1. 最大模、最小模	(107)
2. 应用	(110)

3. 希瓦兹引理	(112)
§ 3 奇点	(114)
1. 可去奇点	(114)
2. 极点	(115)
3. 本性奇点	(118)
4. 越过直线的解析延拓	(121)
第五章 大范围的柯西定理	(126)
§ 1 含参变量的积分	(126)
§ 2 大范围的柯西定理	(129)
1. 圈、同调	(129)
2. 大范围的柯西定理的表述和证明	(132)
§ 3 同伦、单连通区域	(136)
1. 同伦的概念	(136)
2. 同伦和同调的关系	(139)
3. 单连通区域的柯西定理	(145)
§ 4 $\text{Log}\varphi(z)$ 的单值解析分支	(147)
1. $\varphi(z)$ 是解析函数	(147)
2. $\varphi(z)$ 是有理函数	(150)
3. 例题	(152)
第六章 留数	(161)
§ 1 留数定理	(161)
§ 2 用留数计算积分	(166)
1. 计算实积分	(166)
2. 涉及到多值函数的积分	(177)
§ 3 级数求和	(184)
§ 4 解析函数的零点个数	(187)
1. 辐角原理	(187)
2. 路歇定理	(190)

第七章 理论的进一步发展	(194)
§ 1 罗朗级数	(194)
1. 外斯特拉斯定理	(194)
2. 罗朗定理	(197)
3. 函数在无穷远点的性质	(205)
§ 2 调和函数	(209)
1. 基本性质	(209)
2. 波阿松公式	(215)
3. 狄里赫勒问题	(217)
§ 3 解析延拓原理	(223)
1. 概述	(223)
2. 解析延拓的一般方法	(225)
3. 整体解析函数	(230)
§ 4. 单值定理	(233)
1. 沿连续曲线的解析延拓	(233)
2. 具有公共端点的同伦曲线	(237)
3. 单值定理的表述和证明	(238)

第一章 复数的几何

§ 1 复数及其几何表示

1. 复数的概念

一对有序的实数 a, b 叫做复数, 记作 (a, b) , 其加法和乘法由下式定义:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

容易验证它满足加法、乘法的交换律、结合律和分配律. $(0, 0)$ 和 $(1, 0)$ 分别是零元素和单位元素, 减法和除法作为逆运算来定义.

把复数 $(a, 0)$ 看作实数 a , 即 $(a, 0) = a$. 于是复数是实数的推广.

在实数域中没有一个数的平方等于 -1 , 但是推广到复数域后, 确实存在这样的数, 它的平方等于 -1 .

事实上, 考虑复数 $(0, 1)$, 由乘法运算

$$(0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

记 $(0, 1) = i$, 于是 $i^2 = -1$. i 叫做虚单位.

对于任何一个复数 (a, b) , 由加法和乘法的定义知,

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b)$$

$$= (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi.$$

因此复数 (a, b) 可以写成 $a + bi$ 的形式, 其中 a, b 都是实数, a 叫做

复数 $a+bi$ 的实部, b 叫做复数 $a+bi$ 的虚部. 以后对于复数就不再使用有序的实数对的记号了.

2. 复数的平面表示

(1) 复平面

复数 $z=x+iy$ 可用平面直角坐标系中坐标为 x, y 的点来表示(图 1-1), 于是复数和平面中的点一一对应. 表示复数的平面叫做复平面, 通常记作 C .

复数 $z=x+iy$ 也可用坐标为 x, y 的平面矢量来表示. 矢量的长度叫做复数 z 的模, 记为 $|z|$. 当 $z \neq 0$ 时, 矢量和 x 轴正向的倾角叫做复数 z 的辐角, 记作 $\text{Arg}z$.

如果把相等的矢量看作同一个矢量, 复数和复平面的矢量也一一对应, 而且这种对应关系使复数的加法和矢量的加法相一致, 因此复数的加法可按平行四边形法则或三角形法则几何作图(如图 1-2 所示). 同样复数的减法, 复数和实数的乘法也可以看成是相应的矢量运算, 由此可以推出:

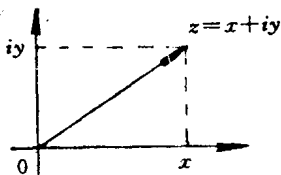


图 1-1

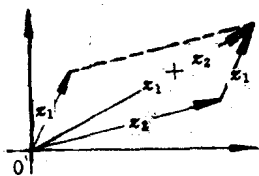


图 1-2

以点 z_1 为起点, 点 z_2 为终点的矢量表示复数 $z_2 - z_1$.

事实上, 如图 1-3 所示, 以原点 o 为起点的矢量 $\vec{oz_1}$ 表示复数 z_1 , 矢量 $\vec{oz_2}$ 表示复数 z_2 , 于是矢量 $\vec{z_1z_2} = \vec{oz_2} - \vec{oz_1}$ 表示复数 $z_2 - z_1$.

这样一来, 点 z_1 和点 z_2 的距离应为 $|z_1 - z_2|$, 矢量 $\vec{z_1z_2}$ 与 x 轴

正向的倾角应为 $\text{Arg}(z_2 - z_1)$ (图 1-4).

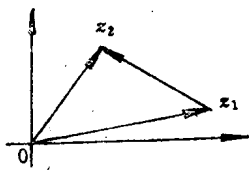


图 1-3

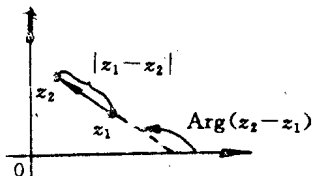


图 1-4

(2) 复数的三角式

复数 $z = x + iy$ 的实部 x 、虚部 y 、模 r 、辐角 θ 之间有如下关系(图 1-5):

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{tg} \theta = \frac{y}{x}.$$

当 $z \neq 0$ 时, 辐角 $\text{Arg}z$ 才有意义且是多值的, 其各值之间相差 2π 的整数倍. 它位在区间 $(-\pi, \pi]$ 上的值叫做辐角的主值, 记作 $\text{arg}z$. 于是

$$-\pi < \text{arg}z \leq \pi,$$

$$\text{Arg}z = \text{arg}z + 2k\pi, \quad (k \text{ 为任意整数}).$$

复数也可用其模和辐角来表示, 即

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

它叫做复数的三角式, 用复数的三角式进行乘除运算是方便的.

若复数

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), \quad z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2),$$

于是由三角公式知,

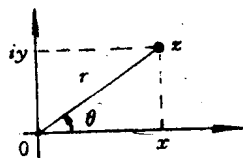


图 1-5

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)],$$

从而得到

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|,$$

$$\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg} z_1 + \text{Arg} z_2.$$

类似地,有

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)] \quad (z_2 \neq 0),$$

于是又得到

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\text{Arg}(z_1/z_2) = \text{Arg} z_1 - \text{Arg} z_2.$$

上述两个关于辐角的等式,应理解为两边所取的值的集合相同.而对于辐角的主值,则有

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi,$$

其中 k 适当地选取 $0, -1, 1$ 三个数之一,以保证上式右边的三数之和位在区间 $(-\pi, \pi]$ 中.

以 z_1 为顶点, 矢量 $\vec{z_1 z_2}$ 为始边, 矢量 $\vec{z_1 z_3}$ 为终边的角数值上等于 $\text{Arg} \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$. 由此知 z_1, z_2, z_3 三点共线的条件是比值 $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ 为实数.

(3) 共轭复数

对于 $z = x + iy$ 来说, $\bar{z} = x - iy$ 叫做它的共轭复数. 它有如下简单性质(其中 $\text{Re}(z), \text{Im}(z)$ 分别表示 z 的实部和虚部):

$$z + \bar{z} = 2\text{Re}(z), \quad z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z),$$

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad |\bar{z}| = |z|, \quad z\bar{z} = |z|^2, \quad \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2,$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)} = \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} \quad (z_1 \neq 0).$$

在复平面上, z 和 \bar{z} 关于实轴对称, z 和 $-z$ 关于原点对称(如图 1-6 所示).

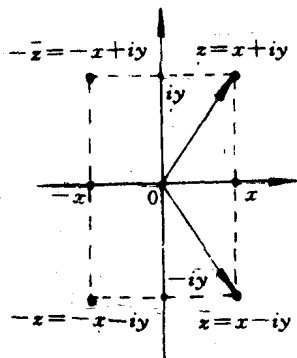


图 1-6

(4) 例题.

例 1 试证下面公式:

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2.$$

$$\begin{aligned} \text{证 } |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) \\ &= z_1 \bar{z}_1 + \bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{z}_1 z_2) + |z_2|^2. \end{aligned}$$

利用例 1 且注意到 $|\operatorname{Re}(\bar{z}_1 z_2)| \leq |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$, 我们立刻推得复数的模的三角不等式:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$

$$|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||.$$

(其几何意义是三角形两边之和大于第三边.)

在例 1 中, 记 z_1, z_2 的辐角为 θ_1, θ_2 , 于是

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\bar{z}_1 z_2) &= |z_1| |z_2| \cos(\theta_2 - \theta_1) \\ &= -|z_1| |z_2| \cos\theta \quad (\theta \text{ 如图 1-7 所示}), \end{aligned}$$

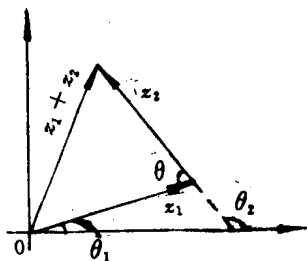


图 1-7

由此得到平面三角的余弦公式：

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1||z_2|\cos\theta.$$

例 2 解方程： $z^n = a$ ($a \neq 0$).

解 令 $a = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, 因而

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

于是方程可改写为：

$$r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

故有

$$r^n = \rho; \quad n\theta = \varphi + 2k\pi \quad (k \text{——整数}),$$

亦即 $r = \sqrt[n]{\rho}$ (算术根); $\theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$,

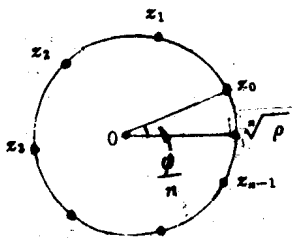


图 1-8

从而

$$z = \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \quad (k=0, 1, \dots, n-1).$$

这 n 个根均匀分布在以原点为心, 以 $\sqrt[n]{\rho}$ 为半径的圆周上(图 1-8).

(5) 圆、直线

在复平面中, 圆和直线的方程用复数 z 表示常常更方便.

$$\text{方程} \quad |z - z_0| = R$$

表示以 z_0 为心, R 为半径的圆; $|z - z_0| < R$ 表示圆的内部, 常记作 $D(z_0, R)$; 而 $|z - z_0| > R$ 表示圆的外部. 以 z_0 为心的圆域也常叫作 z_0 的邻域.

方程

$$z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1) \quad (-\infty < \lambda < +\infty)$$

表示过点 z_1 和 z_2 的直线, 其中 $0 \leq \lambda \leq 1$ 的部分表示连结 z_1 和 z_2 的线段, 记作 $[z_1, z_2]$.

若 a 是直线上的一点, b 所表示的矢量是直线的方向矢量, 则直线的方程应为 $z = a + bt \quad (-\infty < t < +\infty)$, 若 $b \neq 0$, 也可写成 $\text{Im} \left(\frac{z-a}{b} \right) = 0$. 不等式 $\text{Im} \left(\frac{z-a}{b} \right) > 0$, $\text{Im} \left(\frac{z-a}{b} \right) < 0$ 分别表示它所确定的两个半平面, 特别地 $\text{Im} z = 0$ 是实轴, $\text{Im} z > 0$ 和 $\text{Im} z < 0$ 是上半平面和下半平面.

两条直线

$$z = a_1 + b_1 t \quad (-\infty < t < +\infty, b_1 \neq 0)$$

和

$$z = a_2 + b_2 t \quad (-\infty < t < +\infty, b_2 \neq 0)$$

是平行的充要条件是 $\frac{b_1}{b_2}$ 为实数, 是正交的充要条件是 $\frac{b_1}{b_2}$ 是纯虚数.

例 3 过点 i 作直线 $z = (1+i)t \quad (-\infty < t < +\infty)$ 的垂线, 并