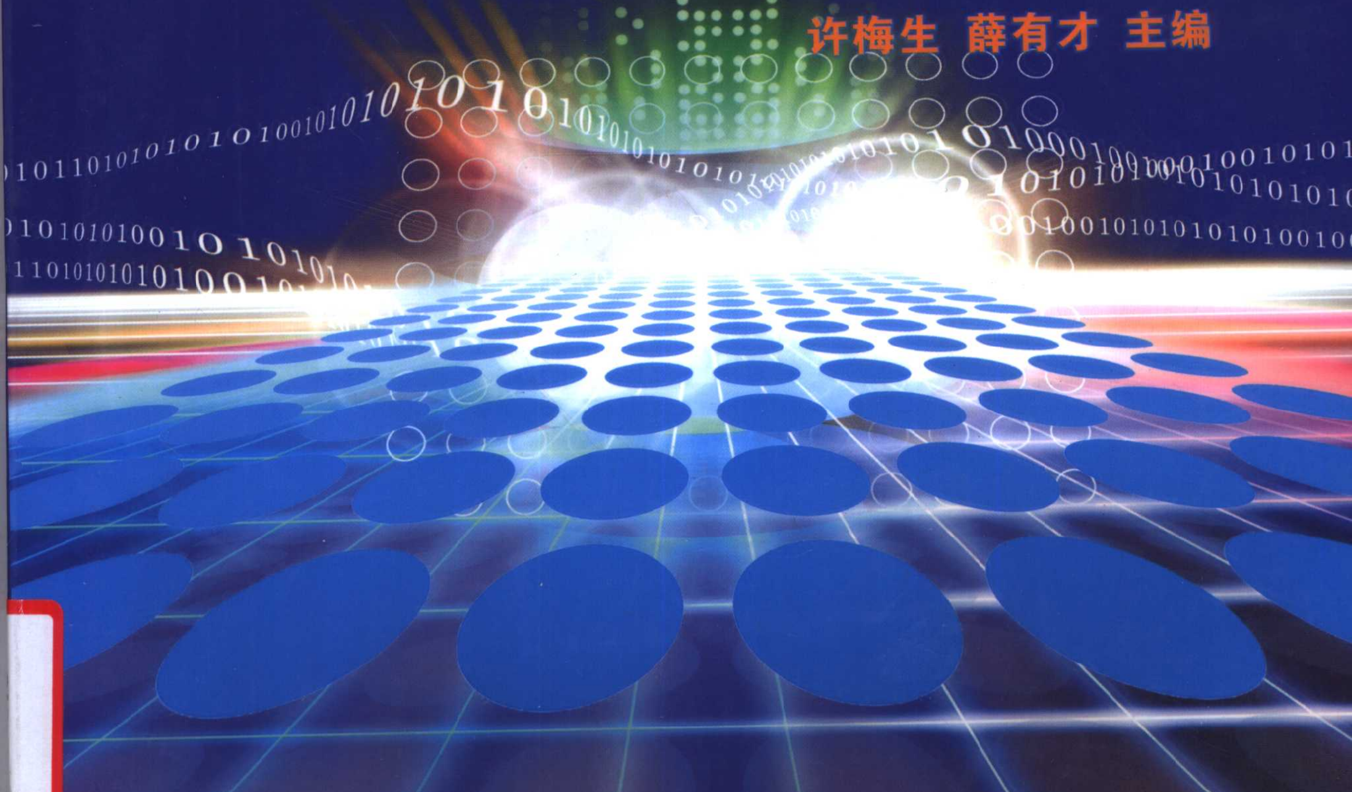
新世纪高等院校精品教材

线性代数

许梅生 薛有才 主编



浙江大学出版社

新世纪高等院校精品教材

线性代数

许梅生　薛有才　主编

浙江大學出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 / 许梅生，薛有才主编. 一杭州：浙江大学出版社，2003.7
ISBN 7-308-03344-9

Ⅰ. 线...　Ⅱ. ①许...②薛...　Ⅲ. 线性代数一高等学校一教材　Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 043439 号

责任编辑　徐素君
出版发行　浙江大学出版社
（杭州浙大路 38 号　邮政编码 310027）
（网址：http://www.zjupress.com）
（E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn）
排　　版　浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷　浙江大学印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16
印　　张　13.25
字　　数　242 千
版 印 次　2003 年 7 月第 1 版　2003 年 7 月第 1 次印刷
印　　数　0001－4000
书　　号　ISBN 7-308-03344-9/O・293
定　　价　21.00 元

前　言

《线性代数》教材，是浙江科技学院数学教研室根据多年的教学实践，对多年使用的自编教材进行修改后形成的一本面向21世纪的工程数学教材。

在传统的线性代数教材中，为了理解的方便，由行列式定义矩阵及向量组的秩。这样做，虽然有其方便之处，但也使得知识被分割成若干小块，知识前后贯通不是很好。近年来，随着教学改革的需要，出现了许多较好的新教材。特别是一些面向21世纪的《线性代数和解析几何》教材，起了很好的带头作用。我们结合多年的教学实践，在使教材结构更趋合理，教学更加方便，理论体系更加完整，突出应用及现代计算科学特点的教学改革目标指导下编写了此教材。本教材以中学解一次方程组为起点，以向量为主线重组线性代数内容；教材突出了初等变换的工具作用，一开始就从解方程组引出初等变换的概念，并在后续各章中多次介绍，使得学生能较好地掌握初等变换的方法；教材加强了空间概念，在第一章中就引入实 n 维向量空间概念，并依次介绍欧几里得空间、线性空间概念，使得学生能更好地掌握空间概念；教材通过线性代数知识在物理、工程中的几十个应用例子，体现了工程数学的应用性；教材介绍了部分有关线性代数的计算方法，且在每一章中介绍了相关的数学实验的例子，以满足学生对现代科学计算的要求。

本教材由许梅生、薛有才主编；参加编写工作的有：薛有才（第一章及数学实验），李未才（第二、三章），许梅生（第四、六章及应用举例），章迪平（第五章）。

本教材承邸继征教授、陶靖轩教授审阅，他们提出了许多宝贵意见，在此表示衷心的感谢。同时也要感谢狄福民副教授的大力协助。本教材在编写过程中使用了参考文献中的部分材料，恕不一一指出，在此一并表示感谢。

书中疏漏和不足之处，恳请读者批评指正。

编者

2003 年 5 月

目　　录

第一章　n 维向量和向量空间

在中学，我们已经学过二维向量的概念，而且知道，向量在力学、测量等许多领域有广泛的应用. 事实上，在很多理论和实际问题中，其研究对象常常可以用多个数字组成的有序数组来表示. n 维向量就是依据实际需要，由几何中的二维、三维向量推广而得到的.

本章介绍 n 维向量、矩阵等概念，并讨论向量组的线性相关性、向量组的秩等概念，它们是线性代数中应用最广泛的概念之一.

§1.1　n 维向量及其运算

一、引例

对于含有二三个未知数的一次方程组，大家已经很熟悉了. 我们首先就来看这样一个例子.

例 1.1.1　解三元一次方程组

$$\begin{cases}2x_1+2x_2-3x_3=9\\x_1+2x_2+x_3=4\\3x_1+9x_2+2x_3=19\end{cases}\tag{1}$$

解　我们应用中学学过的消元法解方程组. 为方便起见，将方程组(1) 中的第 1、2 两个方程组互换，方程组(1) 变为

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=4\\2x_1+2x_2-3x_3=9\\3x_1+9x_2+2x_3=19\end{cases}\tag{2}$$

将方程组(2) 中第 1 个方程两边分别乘以 -2 和 -3 加到第 2、3 个方程上去，得

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=4\\-2x_2-5x_3=1\\3x_2-x_3=7\end{cases}\tag{3}$$

在方程组(3) 中，将第 3 个方程两边同乘以 2，得

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=4\\-2x_2-5x_3=1\\6x_2-2x_3=14\end{cases}\tag{4}$$

再把方程组(4)中第2个方程两边同乘以3加到第3个方程上去,得

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=4\\-2x_2-5x_3=1\\-17x_3=17\end{cases}\tag{5}$$

在方程组(5)中,第3个方程是一元一次方程,解得$x_3=-1$,将它代入方程组(5)中第2个方程,解得$x_2=2$,再把$x_3=-1$,$x_2=2$代入方程组(5)中第1个方程,解得$x_1=1$,因为方程组(5)与方程组(1)同解,所以原方程组的解是

$$\begin{cases}x_1=1\\x_2=2\\x_3=-1\end{cases}$$

为了以后叙述的方便,我们称有n个未知数的一次方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\tag{1.1.1}$$

为**n元线性方程组**,简称为**线性方程组**.其中$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$是**系数**,$b_i(i=1,2,\cdots,m)$是**常数项**.若$b_1,b_2,\cdots,b_m$不全为0,称线性方程组(1.1.1)为**$n$元非齐次线性方程组**;若$b_1=b_2=\cdots=b_m=0$,称线性方程组(1.1.1)为**$n$元齐次线性方程组**.

我们仔细分析例1.1.1用消元法解方程组的过程,可以看出,用消元法解线性方程组的过程就是反复地将方程组进行以下三种基本变换以化简原方程组:

(1) 互换方程组中的两个方程的位置;

(2) 用一个非零的数乘一个方程;

(3) 用一个数乘一个方程后加到另一个方程上.

我们把以上三种变换称为**线性方程组的初等变换**.以后大家可以看到,这三种变换是我们经常使用的方法(我们将在第四章中证明初等变换把线性方程组变成其同解方程组).

再分析上述解线性方程组的过程，可以看出，在作初等变换简化方程组的时候，只是对这些方程的系数和常数项进行变换. 所以，为了简便起见，可以将未知量略去不写，而将系数和常数项列成一个表来计算. 这样做不仅简单，而且不易出错. 下面的例子就是通过这种方法求解的.

例 1.1.2　解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = -7 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

解　将方程组中的未知数略去不写，表述成以下矩形数表，并作初等变换化简：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & -7 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+(-2)r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & -1 & -9 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & -9 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -11 & 22 \end{pmatrix}$$

（注：$r_2 - r_1$ 表示第 2 行的各元素减去第 1 行对应元素；$r_3 + (-2)r_1$ 表示第 3 行的各元素加上第 1 行对应元素的(-2)倍，也可记为 $r_3 - 2r_1$；$\frac{1}{2}r_2$ 表示第 2 行的各元素乘上数 $\frac{1}{2}$；$r_3 + r_2$ 表示第 3 行的各元素加上第 2 行对应元素；等等）

最后一张数表对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = -7 \\ x_2 - 2x_3 = 6 \\ -11x_3 = 22 \end{cases}$$

解之得原方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

可以看出，这样利用数表化简解方程组的方法，简单明了.

我们把矩形数表

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & -7 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

称为矩阵.这个矩阵有 3 行 4 列,我们称其为一个 3×4 矩阵.一般地,我们有

定义 1.1.1　一个 m 行 n 列矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

称为一个 $\boldsymbol{m \times n}$ **矩阵**.

我们常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 等表示矩阵,如 $m \times n$ 矩阵可以记为 A 或 $A_{m\times n}$.矩阵(*)中的数称为矩阵(*)的**元素**.$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 称为矩阵(*)的第 i 行第 j 列元素;i 称为元素 a_{ij} 的行标,说明 a_{ij} 位于矩阵(*)的第 i 行;j 称为元素 a_{ij} 的列标,说明 a_{ij} 位于矩阵(*)的第 j 列.所以,有时候矩阵(*)也写作 $(a_{ij})_{m\times n}$.如果矩阵 $(a_{ij})_{m\times n}$ 的行数与列数相等,即 $m=n$,就称其为一个 $\boldsymbol{n}$ **阶矩阵**或 $\boldsymbol{n}$ **阶方阵**,简称为**方阵**.元素全是实数的矩阵称为**实矩阵**,元素是复数的矩阵称为**复矩阵**.在线性代数中,如不特别说明,我们所说的矩阵都是实矩阵.

二、n 维向量及其运算

我们知道,线性方程组的解的情况完全是由它的系数和常数项决定的,而与未知量的记号无关.所以,一个线性方程就与一个有顺序的数组存在一一对应的关系.一个线性方程组就对应于若干个有顺序的数组.因此为了便于问题的叙述,我们可将讨论线性方程组的问题转化成讨论若干个有顺序的数组问题.为此,以下我们引进 n 维向量的概念,并对向量进行一些研究.

定义 1.1.2　n 个有顺序的数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 所组成的数组

$$\alpha = (a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

叫做 $\boldsymbol{n}$ **维向量**(或 $\boldsymbol{n}$ **元向量**),数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 叫做向量 α 的**分量**(或**坐标**),其中第 i 个数 a_i 叫做向量 α 的第 i 个分量(或坐标),n 称为**向量的维数**.

例如,向量 $\alpha=(1,0,-1,2)$ 是一个 4 维向量.

分量都是实数的向量叫做**实向量**,分量是复数的向量叫做**复向量**.若干个同维数的向量构成的集合叫做一个**向量组**.

一般可用希腊字母 α、β、γ 等或粗体字母 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma}$ 等表示向量.

有了向量概念,一个线性方程组就对应于一个向量组,如例 1.1.1 的方程组(1)就对应于三个 4 维向量构成的向量组

$$\alpha_1=(2,2,-3,9),\alpha_2=(1,2,1,4),\alpha_3=(3,9,2,19)$$

因此,我们可以由向量来研究线性方程组.

向量这一概念在平面及空间解析几何中曾经讨论过. n 维向量是解析几何中 2 维及 3 维向量的推广. 要注意的是 n 维向量($n > 3$ 时)不像 2 维及 3 维向量那样有直观的几何意义,只是沿用了几何术语而已.

与解析几何中的向量一样,分量都为零的向量叫做**零向量**,记作0或O,即 $0 = (0,0,\cdots,0)$. 要注意维数不同的零向量是不同的.

我们称向量$(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$为向量$\alpha = (a_1,a_2,\cdots,a_n)$的**负向量**,记为 $-\alpha$.

下面我们仿照平面二维向量的运算来讨论一般的 n 维向量的运算. 为此,我们有

定义 1.1.3　如果n维向量$\alpha = (a_1,a_2,\cdots,a_n)$,$\beta = (b_1,b_2,\cdots,b_n)$的对应分量相等,即 $a_i = b_i (i = 1,2,\cdots,n)$,则称向量 α 与向量 β **相等**,记作 $\alpha = \beta$.

定义 1.1.4　设向量 $\alpha = (a_1,a_2,\cdots,a_n)$,$\beta = (b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 都为 n 维向量,则$(a_1 + b_1,a_2 + b_2,\cdots,a_n + b_n)$称为向量 α 与 β 的**和**,记作 $\alpha + \beta$,即

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1,a_2 + b_2,\cdots,a_n + b_n).$$

而向量$(a_1 - b_1,a_2 - b_2,\cdots,a_n - b_n)$叫做向量 α 与 β 的**差**,记作 $\alpha - \beta$,即 $\alpha - \beta = (a_1 - b_1,a_2 - b_2,\cdots,a_n - b_n)$. 其实 $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$.

定义 1.1.5　设 k 是一个数,则向量$(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$叫做数 k 与向量 $\alpha = (a_1,a_2,\cdots,a_n)$的**乘积**,记作 $k\alpha$,即 $k\alpha = (ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$.

可以看出,负向量 $-\alpha = (-1)\alpha$.

例 1.1.3　(1) 设向量 $\alpha = (1,-2,3)$,$\beta = \left(-\frac{2}{3},\frac{4}{3},-2\right)$,求 $2\alpha + 3\beta$.

(2) 设向量 $\alpha + \beta = (-1,3,2)$,$\alpha - \beta = (1,1,4)$,求 α,β.

解　(1)　$2\alpha + 3\beta = (2,-4,6) + (-2,4,-6) = 0$

(2)　$(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta) = 2\alpha$

所以

$$\alpha = \frac{1}{2}[(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)] = \frac{1}{2}[(-1,3,2) + (1,1,4)] = \frac{1}{2}(0,4,6) = (0,2,3)$$

同理,有

$$\beta = \frac{1}{2}[(\alpha + \beta) - (\alpha - \beta)] = \frac{1}{2}[(-1,3,2) - (1,1,4)] = \frac{1}{2}(-2,2,-2) = (-1,1,-1)$$

向量的和与数乘向量两种运算称为**向量的线性运算**. 向量的线性运算满足以下运算规律(设 α,β,γ 都为 n 维向量,k,l 是实数):

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$

(2) $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$

(3) $\alpha+0=0+\alpha$

(4) $\alpha+(-\alpha)=0$

(5) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$

(6) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

(7) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$

(8) $1\cdot\alpha=\alpha$

(1) ~ (8) 条是向量运算的基本规则,它们都可以用定义直接验证,留给读者作为习题.

向量通常写成一行:$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,但根据需要,有时也可以写成一列:

$$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$$

为了区别,横写的叫**行向量**,竖写的叫**列向量**. 此外,还可将向量与矩阵联系起来,n 维行向量可以看做是一个 $1\times n$ 矩阵或叫做**行矩阵**,而 n 维列向量可以看做是一个 $n\times 1$ 的矩阵或叫做**列矩阵**.

定义 1.1.6 设向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,我们称向量

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$$

为向量 α 的**转置向量**,记作 α^T 或 α'.

例如,向量 $\alpha=(1,2,1,-1)$ 的转置向量是

$$\alpha^T=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-1\end{pmatrix}$$

可见,一个行向量经转置变成了一个列向量. 同样,一个列向量转置后就

变成一个行向量. 显然,我们有关系式

$$(\alpha^T)^T=\alpha$$

从向量角度讲,n 维行向量 α 与 n 维列向量 α^T 应是一样的,只是写法上的不同;但为了与矩阵对应,今后我们规定:当 $n>1$ 时,n 维行向量 α 与 n 维列向量 α^T 是两个不同的向量,行向量即行矩阵,列向量即列矩阵.

对矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 来说,它的每一行元素可构成一行向量,若记 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$,$(i=1,2,\cdots,m)$,则 $m\times n$ 矩阵 A 可看做是由 m 个 n 维行向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 所构成;如此,矩阵 A 可表示为

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$$

其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 叫做矩阵 A 的**行向量组**,而 α_i 叫做矩阵 A 的第 i 个行向量.

同样地,$m\times n$ 矩阵 A 也可看做是由 n 个 m 维列向量所构成,若记

$$\beta_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix},\ j=1,2,\cdots,n$$

则矩阵 A 可表示为:$A=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ 或 $A=(\beta_1\quad\beta_2\quad\cdots\quad\beta_n)$.

在这里,$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 叫做矩阵 A 的**列向量组**,而 β_j 叫做矩阵 A 的第 j 个列向量.

总之,一矩阵可看做是由有限个有顺序的行向量(或列向量)所组成,而一个含有有限个向量的向量组可构成矩阵.

§1.2　向量组的线性相关性

讨论线性方程组就需讨论方程组中各个方程间的关系,若用向量来处理也就是要讨论一向量组中向量间的关系。例如,线性方程组

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x-3y+z=1 \\ 4x+y-z=3 \end{cases}$$

中的第三个方程是第一个方程的 2 倍与第二个方程的和. 这一关系用向量来表示就是

$$(4,1,-1,3)=2(1,2,-1,1)+(2,-3,1,1)$$

若依次用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 记上式中的三个向量，则有 $\alpha_3=2\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_3$ 可经 α_1，α_2 线性运算得出，此时我们说 α_3 是 α_1,α_2 的线性组合，或者说 α_3 可由 α_1,α_2 线性表示. 一般地，我们有

定义 1.2.1 对于 n 维向量 $\alpha,\alpha_1,\cdots,\alpha_m$，如果存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使

$$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$$

则称向量 α 是向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 的一个**线性组合**，或者说向量 α 可由向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ **线性表示**.

例 1.2.1 任何一个 n 维向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 都是向量组 $\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0)$，$\varepsilon_2=(0,1,\cdots,0)$，$\cdots$，$\varepsilon_n=(0,0,\cdots,1)$ 的一个线性组合，因为 $\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n$.

向量组 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 叫做 n **维单位坐标向量组**.

显然，零向量是任一向量组的线性组合(只要取系数全为 0 就可).

在一个线性方程组中，若有某一个方程对应的向量能被其余方程所对应的向量线性表示。例如，设某一线性方程组对应的向量组为

$$\alpha_1=(1,2,-1,1),\alpha_2=(2,-3,1,1),\alpha_3=(4,1,-1,3),$$

则 $\alpha_3=2\alpha_1+\alpha_2$，所以 $\alpha_3-2\alpha_1-\alpha_2=0$. 也就是说，通过方程组的初等变换，第三个方程的所有系数和常数项都可化为 0；所以，这个方程在方程组中是多余的，或称为不独立的. 在解方程组时，就可以把它去掉. 因此，一个线性方程组中有没有多余方程，就相当于方程组对应的向量组中有没有向量能由其余向量线性表示.

如果在 m 个向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 中，有一向量是其余 $m-1$ 个向量的线性组合，则有不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0 \tag{1.2.1}$$

反之，假如(1.2.1)式中系数不全为0，则 m 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中必有一个向量是其余 $m-1$ 个向量的线性组合. 我们不妨设 $k_m\neq 0$，则有

$$\alpha_m=-\frac{k_1}{k_m}\alpha_1-\frac{k_2}{k_m}\alpha_2-\cdots-\frac{k_{m-1}}{k_m}\alpha_{m-1}$$

即 α_m 是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{m-1}$ 的线性组合. 因此，m 个向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 中有一个向量是其余 $m-1$ 个向量的线性组合的充分必要条件是满足式(1.2.1)的系数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 不全为零. 这是向量组的一个重要性质，叫做向量组的线性相关性. 对

此，我们有

定义 1.2.2　设有 n 维向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$，如果存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$$

则称向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ **线性相关**；否则称它**线性无关**. 换句话说，当且仅当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$ 时(1.2.1)式才成立，则称向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

向量组的线性无关及线性相关通常是指向量组中向量的个数 $m \geqslant 2$ 的情形. 但定义 1.2.2 也适用于 $m = 1$ 的情形，故作为特殊情形. 当向量组只含一个向量时，若该向量是零向量，就称它是线性相关；若该向量是非零向量，称它是线性无关. 两个向量 α,β 线性相关的充分必要条件是它们的分量对应成比例，即有一个数，使 $\beta = k\alpha$.

向量组的线性相关及线性无关其实反映了向量间是否有线性关系：m 个向量如果线性相关，则称它们之间具有线性关系；如果线性无关，那么它们之间就没有线性关系.

由定义 1.2.2 前的讨论及定义 1.2.2，我们可得

定理 1.2.1　**向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性相关的充分必要条件是向量组中至少有一个向量可由其余 $m-1$ 个向量线性表示.**

例 1.2.2　讨论 n 维单位坐标向量组 $\varepsilon_1 = (1,0,\cdots,0)$，$\varepsilon_2 = (0,1,\cdots,0)$，$\cdots$，$\varepsilon_n = (0,0,\cdots,1)$ 的线性相关性.

解　设有数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，使

$$k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + \cdots + k_n\varepsilon_n = 0$$

即

$$(k_1,k_2,\cdots,k_n) = (0,0,\cdots,0)$$

从而有 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$，所以 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性无关.

例 1.2.3　零向量是任意向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 的线性组合，这是因为

$$0 = 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \cdots + 0\alpha_m$$

例 1.2.3 说明零向量可以由任意向量组线性表示，而例 1.2.1 说明任一 n 维向量 α 都可由单位坐标向量组线性表示，且表示式中的系数刚好是 α 的 n 个分量. 下面通过例子说明如何由定义出发判断一给定向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 的线性相关性.

例 1.2.4　讨论向量组 $\alpha_1 = (5,2,9)$，$\alpha_2 = (2,-1,-1)$，$\alpha_3 = (7,1,8)$ 的线性相关性.

解　设有数 x_1,x_2,x_3，使

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$$

即 $(5x_1+2x_2+7x_3,2x_1-x_2+x_3,9x_1-x_2+8x_3)=(0,0,0)$.

故
$$\begin{cases}5x_1+2x_2+7x_3=0\\2x_1-x_2+x_3=0\\9x_1-x_2+8x_3=0\end{cases}$$

由第3式得 $x_2=9x_1+8x_3$,代入前面两个方程,得
$$\begin{cases}23x_1+23x_3=0\\-7x_1-7x_3=0\end{cases}$$
任取 $x_3=-1$,可得 $x_1=x_2=1$,于是有一组不全为零的数 $1,1,-1$,使
$$1\cdot\alpha_1+1\cdot\alpha_2+(-1)\cdot\alpha_3=0$$
所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.

一个向量组或者是线性相关的,或者是线性无关的,两者必具且仅具其一.所以,我们可以从关于向量组线性相关的事实,推得相应的关于向量组线性无关的事实.例如,由例1.2.3,用线性无关的语言来说就是,一个线性无关的向量组一定不能包含零向量.特别地,一个向量线性无关的充分必要条件就是这个向量不是零向量.在以后的讨论中,我们经常只用一种方式来叙述,希望读者能联想到另一种方式并能够灵活地运用.

由例1.2.4我们知道,判断一组向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的线性相关性,可以把它转化成一个齐次线性方程组,并讨论方程组的解的情况.一般地,对于给定的向量组
$$\begin{cases}\alpha_1=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})\\\alpha_2=(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n})\\\qquad\vdots\\\alpha_s=(a_{s1},a_{s2},\cdots,a_{sn})\end{cases}\tag{1.2.2}$$
如何判断它的线性相关性?根据定义1.2.2,就是要看有没有一组不全为零的数 $x_1,x_2,\cdots,x_s$ 是方程
$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$$
的解,按分量写出来,就是看有没有一组不全为零的数是齐次线性方程组
$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{s1}x_s=0\\a_{12}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{s2}x_s=0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\cdots+a_{sn}x_s=0\end{cases}\tag{1.2.3}$$
的解;若存在(我们称这个解为上述齐次线性方程组的非零解),则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关;若不存在(我们称上述齐次线性方程组仅有零解),则向量