代数王国导游

（初一下学期用）

SX 初中数学课外读物

代 数 王 国 导 游

（初一下学期用）

凡 响 编著

湖 北 少 年 儿 童 出 版 社

代 数 王 国 导 游

（初一下学期用）

凡　响　编著

湖北少年儿童出版社出版　　湖北省新华书店发行
孝感地区印刷厂印刷

787×1092毫米32开本　3.25印张　66,000字
1984年10月第1版　1984年10月第1次印刷

印数：1—143,400

统一书号：7305·112　　定价：0.36元

内 容 提 要

本书是初中一年级下学期代数课程的辅助读物。它以现行中学数学教学大纲为依据，按照课本的编排顺序，对课本中的有关知识作了比较系统的归纳和生动浅近的讲解，对其中的重点和难点内容作了比较深入的剖析，便于读者开阔眼界，启迪思维，深化对这些问题的认识。

书中安排了一定数量的练习题，便于读者巩固和复习所学的知识，进一步提高分析问题和解决问题的能力。

目　　录

在挥汗成雨的日子里

八〇年暑假，我回到了阔别已久的故乡——X镇。这是一个普普通通的山村小镇。一条清澈见底的小河，绕着这个小镇，从它的一侧流过去。在我的记忆里，这条小河，在夏天，一向是孩子们的乐园。我还记得当年我们三两成群偷偷去游泳而挨克的情景。但，这一次给我的印象是小河边充满了欢乐的笑声。一面鲜红的红旗迎风飘扬，上面写着“X镇中学暑假乐园”八个引人注目的大字。正是在这个环境里，我碰见了三十年前的老同学——王老师，也正是在这儿我第一次听说了小青和小明的故事。

“我们这里条件很差，比不上你们大城市。”王老师告诉我，“其实，我们的暑假乐园，活动也贫乏得很，无非是上午趁凉快组织一点讲座；下午组织一些体育活动；这你也看到了，主要就是游泳；机会好，电影队来了，偶然还可以看上一场露天电影。”

是的，这样的条件是算不上优越。但是比起三十多年前，不仅X镇没有中学，连上中学念书的人，全镇也没有几个。这不就是天翻地覆的变化吗！

“孩子们的劲头怎么样？”话题一转到这个方面，王老师的话匣子就真的打开了。他谈了学风的变化，谈了课外活动小组的组织过程和活动开展的情况，特别向我介绍了小青和小明。说着，还抽出一札笔记本来说：“这是他们最近才整理出来的笔记，基本上是上学期——初一下学期课外活动的内

容。农村的盛夏，蚊虫又厉害。X镇虽然谈不上张袂成云，可的确够得上挥汗成雨。但他们硬是顶着，在参加乐园活动之余，把它们整理出来了。我看了一遍，有些地方不但记下了我的原话，还提出了一些我没有考虑到的问题，真是后生可畏！”

“你也是教数学的”，王老师又说，“闲着没事，你是不是也帮我看看他们整理得怎样？”

就这样，在这个暑假里，我不但看了小青和小明整理的学习笔记，而且结识了两位少年朋友。

现在，这本小册子就摆在你们的面前。我愿意借这个机会忠告少年读者，学数学光动眼睛是不行的，一定得动手。否则是不可能敲开代数王国之门的。

一 从算术到方程

我们从一个在民间广为流传的数学问题说起。

“鸡兔同笼，足一百，头三十六，问鸡兔各多少？”

如果36只全是鸡，则只有72只脚；如果36只全是兔子，就有144只脚了；显然都不合“足100”这个条件。千万不要以为这是两手提篮子——左难右也难，实际上用算术解这道题的关键就在这左右为难之中，因为这两处碰壁正好说明36只既不全是鸡也不全是兔，而是一部分是鸡，一部分是兔。那么，这“一部分”怎样求？可以从“不全是鸡”着眼看看有多少不是鸡，也可以从“不全是兔”出发看看有多少不是兔。我们就从前一条路走吧。如果36只全是鸡，那么只72只脚，离100差$100-72=28$只脚。为什么差28只脚？就是因为不全是鸡。既然不全是鸡就要把一些鸡子换为兔子使脚增加到100。把一只鸡换为一只兔就会增加两只脚，于是就会想到，把多少只鸡换成兔子后才增加28只脚呢？这当然就是简单的算术了罗：$\frac{28}{2}=14$，即应把14只鸡换为兔子，笼中就正好100只脚了。答案随之而出：笼中14只兔子，$36-14=22$只鸡子。

这个解答显得很机智，可就是得动脑筋。有没有其他更简单、更直接的办法来解这道题呢？

这问题中需要求的数量有两个：鸡子多少只，兔子多少只；要满足的条件有两个，头36，足100。后两个条件本身

是清楚明白的，因为谁都知道一只鸡子两只脚，一只兔子四只脚。只要知道有多少只鸡、多少只兔，马上就知道有多少只脚。可惜就是不知道有多少鸡多少兔，所以就曾经难住了一些人。一个相当简单却相当绝妙的办法是，管他鸡子多少，总是一个数目吧，用一个符号表示，比如用x表示；同样地，兔子的数目用y表示。那不就可以"直接计算"了吗？

$$x+y=36 \qquad (1)$$

$$2x+4y=100 \qquad (2)$$

可是，在你还不会解方程以前，你会在心里发笑：这叫什么"直接计算"呀！x表示什么数？y表示什么数？不是仍然不知道吗？还说是"绝妙"的法子呢！

当你知道了方程的概念与方程的解法以后，你就可以断定：尽管(1)式与(2)式中的x与y并不曾变为具体数目字，但可以通过一些计算知道满足(1)式与(2)式的x与y的取值只能是哪些数，这些数就是题目要求的答案。

将(1)式乘以2，得

$$2x+2y=72 \qquad (3)$$

从(2)式两边分别减去(3)式两边，得

$$2y=28$$

两边同除以2，得

$$y=14$$

代入(1)式，得

$$x=36-14=22$$

即有22只鸡，14只兔，与前面用算术方法得到的结果完全一致。但这里不需要什么费力的思考，全是简单的计算。

请想一想，我们开始时根本不去管鸡子、兔子到底是多少，而只是用两个符号来代替它们；然后通过简单的计算居然知道了答案，这与前面的算术解法相比较，不是多少带着“神秘”色彩吗？当你一旦悟出了方程的这种“妙用”以后，“神秘”色彩就消失了，而只剩下“绝妙”的赞叹。

一般地讲，用列方程来解应用题比用算术方法解应用题要容易些。而且，有的题目只能用列方程的办法来解，无法用算术方法解。列方程解应用题的优越性，同学们将在进一步的学习中逐渐体会到。

现在就以上面这个例子来说明算术解法与方程解法有什么不同。

算术解法只能从已知的数量出发，逐步计算推导出未知的结果。当这种推导碰到困难时，就只得象前面解鸡兔问题那样转弯抹角地设想，假设等等，就需要很多技巧，需要思路开阔而且敏捷。

但列方程的解法呢，几乎可说是一种“少动脑筋”的机械方法。先看看题目中有哪些数量，如果是未知的就用字母来代替它们；再看看这些数量满足一些什么关系(同学们现在碰到的多是等量关系)，用数学式子(现在使用的多是等式)把它们表达出来，这就得到了方程。也就是说，列方程相当于一种翻译工作，把文字语言翻译成数学语言就行了。比如说，关于鸡兔问题的方程就是象下面这样翻译出来的：

文字语言	数学语言
鸡多少？	x
兔多少？	y
同笼头36．	$x+y=36$

问笼足100。　　　　$2x+4y=100$

翻译完了，方程就出来了。

有很多列方程的经验之谈，如“恰当地设未知数”，“善于寻找和发现等量关系”，等等。但不论怎么说，实质上带根本性的东西就是上述“翻译”能力，也就是把实际问题转化为数学问题的能力。对于列方程来说，更准确的提法是把实际问题转化为代数语言的能力。培养这种能力不仅对同学们现在学代数显得重要，而且对于同学们今后学习其他数学课程以及学习物理、化学等来说，都是一项至关重要的“基本建设”。

把列方程说成仅仅是一种“翻译”工作，是不是就是说列方程很容易了呢？也不一定。因为列方程时必需对所涉及的概念及数量关系十分熟悉，了如指掌，才会使翻译工作十分顺利。由于鸡兔问题所涉及的概念与数量关系很简单，所以无论谁读到上面的“翻译”都会觉得确实简单。其他各类应用问题则有各自的独特的需要掌握的数量关系，比如行程问题，工程问题，百分数问题等等。同学们以后掌握了更多的科学知识后，就能运用列方程的方法，解决更多的更复杂的实际问题了。从这个意义上来讲，工作在科学前哨的科技工作者的思维过程，与一个中学生的思维过程本质上是一样的。

就好比踢足球，首先，足球队员得有技术与战术，但还得有技术战术意识，也就是在球场上很自然地恰当地组织起战术来。掌握概念与数量关系，就好比是技术战术，而临到解决实际问题时很自然地几乎是“本能”地利用概念与数量关系进行语言的转化，就是一种战术意识。也就好比足球

运动员需从小训练一样，同学们从开始学习代数起就应培养好这种数学上的乃至科学上的基本功。

最后再以一个例子来说明上面这些话。

某人在1984年时的岁数正好等于他出生年份的数字之和，问这人1984年是多少岁？

这既不是行程问题，也不是百分数问题，等等，而是课本上很少见到的问题。同学们该怎么办？一个数与一个数的各位数字之和的差别，一个人的岁数怎么算，这些都是常识。面对这些常识，好的“战术意识”就是：应该用一些数学式子把题目的意思表达出来。如果设此人1984年的岁数为x，由于这人的生年不知道，那么“各位数字之和”这个意思就无法表达了；当然，这时表示他的生年的数应是$1984-x$。但从这个式子不能知道这个数的各位数字。即便把他的生年设为x，同样地，“各位数字之和”怎么表达呢？仍然无法。因此，应把他的生年的四位数字设出来。但稍一沉思就会想到，年份数字都是四个，四个数字之和最多是$9+9+9+9=36$，就是说此人是36岁以下，那么他的生年的前两个数字就肯定是1与9了，即为19××年。看来只要设生年的十位数字为x，个位数字为y就行了。于是，生年的数字之和就是$1+9+x+y$。另一方面还要算他的年龄，这时就需要知道生年这个数而不是数字和了。这四位数应是$19xy$，注意，这里指的是这个四位数的数字写法，并不是19乘以x乘以y！这写法也不能表示这个数的实际大小。这个数应当这样算：19两数字表示的数是1900，而x表示数$10x$，y表示的数就是y，所以生年这个数应是$1900+10x+y$。那么年龄就好算了，应为$1984-(1900+10x+y)$。现在题目的意思就可以

用一个等式来表示了：

$$1984-(1900+10x+y)=1+9+x+y$$

整理一下，就是

$$11x+2y=74$$

方程就这样列出来了，但又产生了新问题。两个未知数一个方程怎么解呢？检查一下原题，我们确实把题目意思都表达出来了，就这一个方程。再仔细一点就会想到，x、y表示0、1……、9这些数字，即使逐一试验，也可找出x与y应是多少。稍一试验又会发现，由于$0\leqslant y\leqslant 9$，即$0\leqslant 2y\leqslant 18$，所以$74-18\leqslant 11x\leqslant 74-0$就是$5\frac{1}{11}\leqslant x\leqslant 6\frac{7}{11}$。由于$x$是整数，只能是$x=6$。那么$y=\frac{74-11\times 6}{2}=4$。这一下答案就出来了，此人生于1964年，到1984年他20岁。

看，有了好的“战术意识”，这题目解答下来就顺理成章了。

下面一个问题留给同学们练习。

一个学生问他的数学老师多少岁，老师说，我象你这么大时你才1岁；等你到了我这么大时，我就40岁了。你听了这段对话后能算出这个学生与他的老师的年龄吗？

二 等量公理

我们已经看到，方程是解决实际问题的一种很好的工具。要有效地使用这个工具，就得会解方程。

很多同学已经能熟练地解一元一次方程了，但如果进一步问，解方程的最基本的手段与根据是什么？恐怕能回答上来的同学就不多了。

一位著名的作家说，人要有三个头脑，天生的一个头脑，从书中得来的一个头脑，从生活中得来的一个头脑。

实际上，解方程的手段与根据在我们周围的平凡生活中也能看到。为了说明浅显的知识中蕴育着深奥的道理，我们有时候会把一些在多数同学看来很简单的东西也叙述得很详细，而另一些时候又会说一些多数同学暂时不容易理解的话。请同学们不论读到那些简单得不屑一顾的地方，还是读到那些令你莫名其妙的地方，都认真地悟一悟其中的道理。

让我们先来剖析一个例子，看看方程是通过哪些步骤解出来的。这些步骤将写得很详细，以便深入分析。

解方程 $\frac{x}{2}+\frac{4x-3}{5}=\frac{2x-1}{3}+\frac{3x-2}{4}$

解：$\frac{x}{2}+\frac{4x-3}{5}=\frac{2x-1}{3}+\frac{3x-2}{4}$ (1)

两边乘以60，得

$$30x+12(4x-3)=20(2x-1)+15(3x-2) \quad (2)$$

左边去括号，合并同类项，得

$$78x-36=20(2x-1)+15(3x-2) \qquad (3)$$

右边去括号，合并同类项，得

$$78x-36=85x-50 \qquad (4)$$

两边加上$-78x$，得

$$78x-36-78x=85x-50-78x \qquad (5)$$

两边各自合并同类项，得

$$-36=7x-50 \qquad (6)$$

两边加上50，得

$$-36+50=7x-50+50 \qquad (7)$$

两边分别计算，得

$$14=7x \qquad (8)$$

两边同除以7，得

$$2=x \qquad (9)$$

所以原方程的解是$x=2$。

解答的过程就是通过各种变形，逐步以一个方程代替另一方程，最后得到的(9)式是一个最简单的“不用再解”的“方程”$x=2$。

仔细考查这些变形，可将其分为两大类。

第一类是只在方程的一边进行了运算，即只在方程的一边进行了恒等变形。如(2)⇨(3)，(3)⇨(4)，(5)⇨(6)，(7)⇨(8)等都属于这一类。

第二类是在方程两边同时进行了同一种变形。如(1)⇨(2)在方程两边同时乘以60，还有(4)⇨(5)，(6)⇨(7)，(8)⇨(9)等也都属于这一类。

现在我们打破砂锅问到底，分别对两类变形进行分析。

第一类变形，以(2)⇨(3)为例。为什么可以用方程(3)

来代替方程(2)？

同学们会说，这还用问吗？因为$30x+12(4x-3)=78x-36$，当然可以在方程(2)中用$78x-36$代替$30x+12(4x-3)$，得到方程(3)。

这回答是正确的。在数学中，不论是计算，还是其他什么变形，一个量总可以用与它相等的另一个量来代替它。这是常识，是人们的生活实践反复告诉人们的真理。这种最基本的常识被称为公理。上述公理是等量公理中的一条，简称为等量代换公理。

我国三国时代的曹操，是一个有雄才大略的人物。据说有一次他遇到了这么一个难题。吴国的孙权送了一头大象给他，面对大象这个庞然大物，他很想知道大象究竟有多重，可是却束手无策。因为当时还没有这么大的秤能称出大象的重量！他求教于大臣们，满朝文武也都面面相觑。这时少年曹冲说，这很简单。曹冲命人把大象带到河边，弄来了船，把大象牵上船，船稳住以后，他就在船帮上与水面相齐的地方做了记号。然后把大象牵下船，这时候船当然又浮起了许多，做的记号就在水面之上了。曹冲又命人往船上装砂石，一担一担的砂石都要过秤，记上数目。直到原来做的记号重新与水面相齐了，曹冲才说，行了，不用装了。他把装上船的砂石的总数加起来以后，就说道，这就是那头大象的重量！

这就是有名的"曹冲称象"的故事。

请同学们注意，曹冲称的究竟是大象还是砂石？显然，曹冲称的是砂石而不是大象。但是人们却都说曹冲聪明，想了一个巧妙的办法称出了大象的重量。从古至今，没有一个

人出来反驳说：曹冲并没有称出大象的重量 他仅仅称出了船上砂石的重量！

这是为什么？

因为有等量代换公理！仅从重量来说，大象的重量与船上砂石的重量是相同的。曹冲的聪明就在于他作了等量代换：用称砂石代替了称大象。对砂石可以分为一担一担地称，对大象却不能把它分割成一小块一小块地称。看来人人都默认等量可以代换的道理，因此称它为"公理"倒也名符其实。但并非人人都会灵活地运用公理去解决实际问题，所以曹冲能够这样做就被称赞为"聪明的孩子"。

再来看第二类变形，以(6)⇨(7)为例。即

$$-36=7x-50 \tag{6}$$

$$\Downarrow$$

$$-36+50=7x-50+50 \tag{7}$$

同样地，我们要问为什么能用(7)来代替(6)？(7)式与(6)式的差别在于：在(6)式的两边同时加上50得(7)式，那么只要原等式(6)成立，所得(7)式就也能成立。我们设想(6)式是一个天平，等号两边是天平两边秤盘里的东西。等式成立就是说天平平衡了。这时再在天平两边的秤盘上加上同样重量的东西，经验告诉我们，这时天平仍然平衡，即(7)式仍然成立。

看来同第一类变形一样，第二类变形所依据的也是一种"常识"，即"公理"。上面讲的是另一类等量公理：等量加等量，其和相等。类似的公理还有：等量减等量，其差相等；等量乘以等量，其积相等；等量除以非零的等量，其商相等；等等。我们讲的第二类变形都是依据这类等量公理在