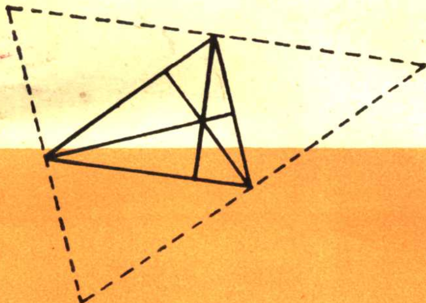
初中数学课外阅读丛书



巧设辅助线

主编　崔连林

编著　蒋省吾　章士藻

初中数学课外阅读丛书

巧设辅助线

主编　翟连林

编者　蒋省吾　章士藻

河南教育出版社

初中数学课外阅读丛书

巧 设 辅 助 线

主编　翟连林

编者　蒋省吾　章士藻

责任编辑　温光

河 南 教 育 出 版 社 出 版
河 南 省 汝 南 县 印 刷 厂 印 刷
河 南 省 新 华 书 店 发 行

787×1092毫米　32开　6.125印张　310千字
1985年1月第1版　1985年1月第1次印刷
印数　1—17,700 册
统一书号 7356.44　　定价 0.63 元

前　　言

初中是学生打基础的重要阶段。为了培养学生学习数学的兴趣，提高灵活运用知识的能力，开发智力，并活跃他们的课余生活，我们编写了这套“初中数学课外阅读丛书”，本书是其中的一种。

我们在解平面几何题时，不论是证明、计算、作图分析，或是轨迹的探求，经常要添设一些辅助线。由于几何题的形式五花八门，内容千变万化，所以添设辅助线的方法也就形形色色，途径千差万别，没有一个固定的模式可以遵循。由于这些原因，所以不论是教师教，还是学生学，都感到添设辅助线的问题是一个比较棘手的问题。

本书是从如下几个方面进行讨论和研究的：

什么是辅助线？为什么要添设辅助线？根据什么去添辅助线？常见的辅助线的类型有哪些？添设辅助线有哪些基本方法和途径？在中学中应该怎样进行关于添设辅助线的启蒙教学？

在本书编写过程中，得到王连甲、阮光南二位同志的大力支持和帮助，在此一并表示感谢。由于我们的水平所限，书中如有缺点和错误，欢迎读者批评指正。

编　　者

1983年11月

目　录

一、什么是辅助线

几何学是研究物体的形状、大小以及它们相互之间的位置关系的科学，也就是研究几何图形性质的一门学科。解一个几何题的过程，实际上就是对这个问题的有关几何图形性质的研究和应用。在解题时，我们通常总是从题设条件所给定的有关几何图形出发，根据这个几何图形的性质（已学过的公理、定理等）逐步推导，最终获得所求的结论。因此，这些几何图形的性质，是随着图形的给定而客观存在的。例如，如果题设条件中所给定的几何图形是一个三角形，那么不仅这个三角形的三条边和三个角的大小是已知的，而且还应该认为与这个三角形有关的图形及其性质也是已知的.譬如：

三个内角的和等于180°；

三条边上的中线、高线、中垂线，三个角的角平分线及外角平分线；

三条中位线；

三角形的内心、外心、重心、垂心、旁心；

每条边的中点和按定比内分或外分的点（包括黄金分割点）；

将一条边或某一线段延长，过某一定点引平行于一条边或某一线段的平行线或引垂线；

三角形的外接圆、内切圆、旁切圆；等等.

可以看出，这些图形都依附于所给定的三角形图形之中，或者与三角形有密切的关联。尽管在题设条件中并没有明确指出，但它们都是随着三角形图形的给出而客观存在的，我们不可能也没有必要把上述这些与三角形有关的图形及其性质全部画出来或在条件中都罗列出来，但当解题时需要，就可以用基本作图法把它们画出来。由于这些图形在题设条件中没有明显地提出，在给定的图形中也没有画出，而是隐含在所给定条件的图形之中，我们把这些图形看作是题设条件的辅助图形，当解题需要而把它们画出来时，通常就称为辅助线（点、直线、射线、线段、圆弧、圆等）。

二、添设辅助线的作用

为什么要添置辅助线呢？也就是说添设辅助线能起到什么作用呢？归纳起来，添设辅助线大体有如下一些作用：

（一）把分散的元素集中，起汇集作用

如果由题设条件所给出的图形和要求解的有关元素之间的位置关系比较分散，而通过添设适当辅助线能把分散的元素集中到某一个图形中来，使这些原来分散的元素彼此间发生关联，这样的辅助线就起着汇聚作用。

例 1 设M、N分别是任意四边形$ABCD$的对角线AC、

BD的中点（如图1）。求证：$MN<\frac{1}{2}(AD+BC)$。

分析：要求证的有关元素MN、AD、BC所处的位置关系比较分散，虽说有AC、BD都连着AD、MN、BC这三条线段，但却找不到它们之间的关联。

要证的不等关系实际上就是$MN<\frac{1}{2}AD+\frac{1}{2}BC$，受"三角形两边之和大于第三边"的启发，我们考虑把三个有关元素集中到一个三角形中．要想得到$\frac{1}{2}AD$，可以取AB的中点L，连结LN，即得$LN=\frac{1}{2}AD$；要想得到$\frac{1}{2}BC$，只要连结LM即得$LM=\frac{1}{2}BC$．这样一来，三条线段MN、$\frac{1}{2}AD$（即LN）和$\frac{1}{2}BC$（即LM）非但能集中在一起，而且还构成一个三角形（图1），于是问题就迎刃而解了。

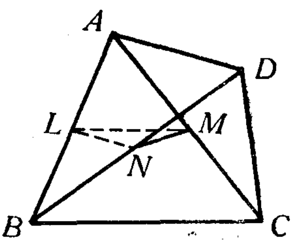


图 1

证明：取AB的中点L，连结LN，LM，则

$$LN=\frac{1}{2}AD,\quad LM=\frac{1}{2}BC;$$

在$\triangle LMN$中，$LN+LM>MN$，即

$$\frac{1}{2}AD+\ \frac{1}{2}BC>MN,$$

$$\therefore\quad MN<\frac{1}{2}(AD+BC).$$

例 2 如图 2 所示，线段AB的中点为M，从AB上另一点C向直线AB的一侧引线段CD。令CD的中点为N，BD的中点为P，MN的中点为Q，则直线PQ平分线段AC。

（一九七八年全国中学生数学竞赛试题）

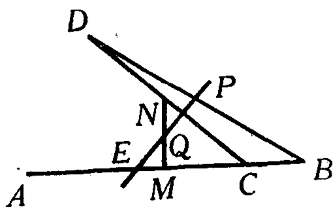


图 2

已知：如图2，M、N、P、Q分别为线段AB、CD、BD、MN的中点。

求证：直线PQ平分线段AC。

分析：M、N、P、Q四点零乱分散在线段AB、CD、BD、MN上，设法把它们集中起来，以便充分利用“中点”这个已知条件。

设PQ与AB交于E。要想证明PQ平分AC，就是要证E是AC的中点，而N是CD的中点，所以连结NE、AD后，若能证得$NE\parallel AD$，那么NE就是$\triangle ACD$的中位线，从而E就是AC的中点了。但PM是$\triangle ABD$的中位线，所以只要能证得$NE\parallel PM$就可以了。若能证得$PNEM$是平行四边形，那么问题就解决了。

因为NP是$\triangle BCD$的中位线，所以$NP\parallel BC$，由此可得$\angle NPQ=\angle MEQ$，又$\angle NQP=\angle MQE$，$NQ=QM$，故得$\triangle NPQ\cong\triangle MEQ$，于是就容易证明结论的正确性了。

证明：设直线PQ与AC交于E，连结AD、NE、PN、PM（如图3）。

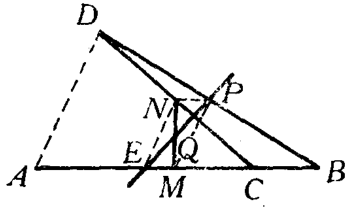


图 3

NP是$\triangle BCD$的中位线$\Longrightarrow NP\parallel BC$,

$$\left.\begin{array}{l} Q\text{是}MN\text{的中点}\Longrightarrow NQ=MQ \\ \qquad\angle NPQ=\angle MEQ \\ \qquad\angle NQP=\angle MQE\end{array}\right\}\Longrightarrow \triangle NPQ\cong\triangle MEQ$$

$$\left.\begin{array}{l}\Longrightarrow NP=EM\\ \text{又}\ NP\parallel EM\end{array}\right\}\Longrightarrow PNEM\text{是平行四边形}$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\Longrightarrow NE\parallel PM\\ \text{而}\quad AD\parallel PM\end{array}\right\}\Longrightarrow NE\parallel AD\\ \qquad\qquad\qquad\qquad DN=NC\end{array}\right\}\Longrightarrow AE=EC.$$

$\therefore E$是AC的中点，即直线PQ平分AC。

（二）使隐含的逻辑关系明朗化，起显露作用

如果题中给定的图形条件和结论的有关元素之间隐含着解题所需要的某些逻辑关系，但从所给图形来看是无法发现的，而一旦添设某些辅助线后，那些隐含着的逻辑关系就暴露无遗，从而使问题得到解决。这样的辅助线就起着显露作

用。

例 3 如图4(1)，AD是圆O的直径，AB是弦，BC是切线，B是切点，$AC\perp BC$于C且交圆O于E，则$\angle DAB=\angle CAB$。

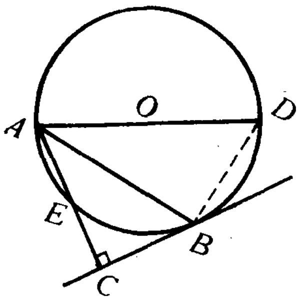


图 4(1)

分析：题设条件AD是直径就隐含着直径上的圆周角是直角；题设条件BC是切线就隐含着弦切角。作了辅助线BD后就把已知条件中所隐含的两个基本图形显示出来了：(1) 直径上的圆周角是直角（图4(2)）；(2) 弦切角等于所夹弧上的圆周角（图4(3)）。于是问题很快就能得到解决。

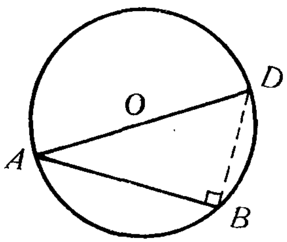


图 4(2)

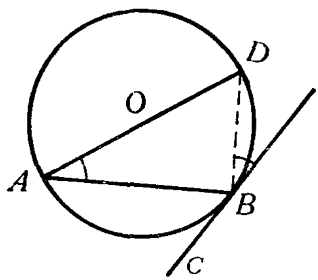


图 4(3)

证明：连结BD（图4(1)），则∵ BC是切线，∴ $\angle D=\angle ABC$（弦切角等于所夹弧上的圆周角）；

∵AD是直径，∴ $\angle ABD=90°$（直径上的圆周角是直角）；

而$\angle ACB=90°$，∴ $\angle DAB=\angle CAB$（等角的余角相等）。

例 4 四边形$ABCD$各边中点依次是E、F、G、H，两对角线中点是K、L，求证：EG、FH、KL三线共点（图5）。

分析：证明三线共点的方法之一是，先设其中两直线交于某点，再证第三直线也通过这一点。

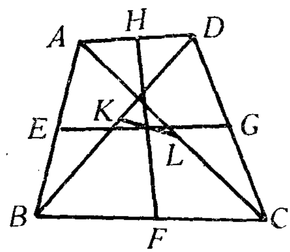


图 5

先设EG、HF交于O，∵平行四边形的对角线互相平分于交点，∴如果顺次连结E、F、G、H，则由中位线性质可证得$EFGH$是平行四边形，故EG、HF相交于各自的中点。同样，若顺次连结K、F、L、H，则$KFLH$是平行四边形，故FH、KL相交于各自的中点。于是KL过FH的中点O，也就是EG、HF、KL三线共点。

本题的辅助线EF、FG、GH、HE、KF、FL、LH、HK，揭示了中点隐含的条件，造成了平行四边形，使求证的各元素以平行四边形对角线的身份出现，从而发现了证题途径。

（三）让间接的关系发生直接联系，起桥梁作用

如果题设条件和结论之间没有直接的关联，但在添设有

关辅助线后，就使条件和结论沟通起来了，这样的辅助线就象在从此岸通向彼岸的河道上架起了一座桥，它起着桥梁作用。

例 5 如图 6，平行四边形$ABCD$的三个顶点A、C、D在圆上，AB、CB的延长线分别交圆于M、N，EF是过D点的切线．求证：$EF\parallel MN$。

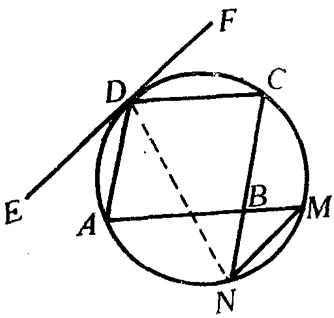


图 6

分析：EF与MN没有直接关联，为证$EF\parallel MN$，试连结DN，若能证得$\angle EDN=\angle MND$就成了．

$\angle EDN$是弦切角，与$\frac{1}{2}\overset{\frown}{DAN}$的度数相等，$\angle MND$是圆周角，与$\frac{1}{2}\overset{\frown}{DCM}$的度数相等；由于$ABCD$是平行四边形，所以$\underline{\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{AN}}$，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CM}$是很明显的．于是问题就因辅助线$DN$起了桥梁作用而获得解决。

例 6 已知：BD、CE是$\triangle ABC$的两条高，O是$\triangle ABC$的外接圆的圆心（如图7）．求证：$AO\perp DE$。

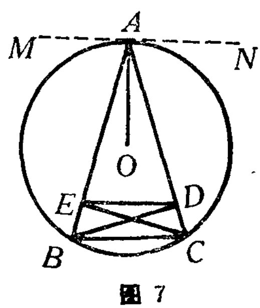


图 7

证明：过A作圆的切线MN，则$AO\perp MN$；

$\because \quad \angle BDC=\angle CEB=90°$,

$\therefore \quad B$、C、D、E四点共圆，

从而$\angle B=\angle ADE$（圆内接四边形的外角等于内对角），又$\angle B=\angle CAN$（弦切角等于所夹弧上的圆周角），

$\therefore \quad \angle ADE=\angle CAN$，于是$MN \parallel DE$，$\therefore AO \perp DE$。

以上，辅助线MN的添设为题设与结论之间搭了一座“桥”。

（四）变复杂的问题简单化，起化繁为简的作用

有些几何命题不需添设辅助线就能得到解决，但适当添线后能使解题过程大大简化。这样的辅助线就起着化繁为简的作用。

例 7 在$Rt\triangle ABC$中，直角C的平分线CE与斜边的垂直平分线DE交于E，求证：$CD=DE$。

证法一：如图 8，$\because CE$是$\angle C$的平分线，

$\therefore \quad \angle ECA=\angle ECB=45°$；

$\because DE$是AB的垂直平分线，即D是AB的中点，CD是斜边上的中线，$\therefore DC=DB$。故$\angle B=\angle DCB$，于是

$$\angle DCE=\angle ECB-\angle DCB=45°-\angle B;$$

而
$$\begin{aligned}\angle E&=90°-\angle EFD=90°-(\angle FCB+\angle B)\\&=90°-45°-\angle B=45°-\angle B;\end{aligned}$$

$\therefore \quad \angle DCE=\angle E$，故 $DE=CD$。

以上的证明虽然没有添设辅助线，但计算过程转折较多，如果添设适当的辅助线，证明过程可以大大简化，如：

证法二：∵ D是$Rt\triangle ABC$斜边AB的中点，∴可以D为圆心，CD为半径作$\triangle ABC$的外接圆(图9)；

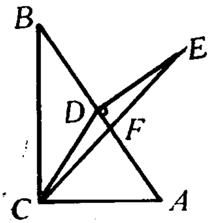


图 8

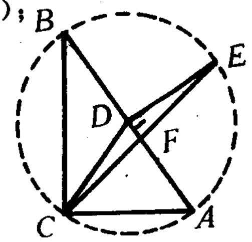


图 9

又∵ E是直角C的角平分线与斜边AB的垂直平分线的交点，∴E必在圆上。于是半径

$$CD=DE.$$

例 8 如图10，$ABEG$、$GEFH$、$HFCD$都是边长为a的正方形。求证：$\angle AEB+\angle AFB+\angle ACB=90^\circ$.

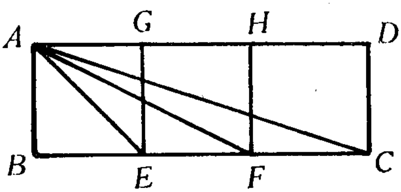


图 10

几乎所有的几何教科书、习题集或复习资料中都编入了这道题，因为它是一题多解的一个典型题，它的证法多达几十种。本题不设辅助线也能证明，如果添设辅助线，那么由于思路的出发点不同，可以有各种不同的添设辅助线的方法，最终是殊途同归，都能到达终点。在多种不同的添设辅助线的方法中，有一种巧妙的方法可以使得证明方法一目了然。下面我们给出两种证法，以资比较。一种是不设辅助线的常规证法，另一种是巧妙地添设辅助线后，一眼就能看出命题的真实性的方法。

证法一：$\because \quad \dfrac{AE}{EF}=\dfrac{\sqrt{2}a}{a}=\sqrt{2}$，$\dfrac{EC}{AE}=\dfrac{2a}{\sqrt{2}a}=\sqrt{2}$，

$\therefore \quad \dfrac{AE}{EF}=\dfrac{EC}{AE}$，故$\triangle AEF\backsim\triangle CEA$，

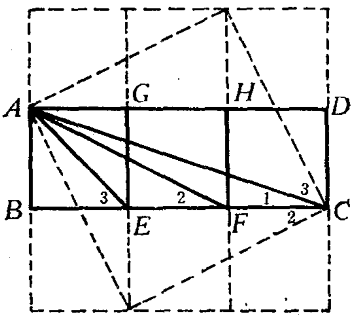


图 11

于是$\angle AFE=\angle CAE$，而$\angle ACB=\angle CAD$，所以$\angle AFE+\angle ACB=\angle CAE+\angle CAD=45^\circ$，故 $\angle AEB+\angle AFB+\angle ACB=90^\circ$。

证法二：如图11添设辅助线后，$\angle 1+\angle 2+\angle 3=90^\circ$就一目了然。

（五）造一新图形使之能应用已证定理，起转化作用

有时，一个命题就其原图形去考虑，很难或甚至无法推得结论，而添设适当辅助线造成一个新的图形后，它正好符合某一已证定理的条件，问题就迎刃而解。这样的辅助线起了转化作用。

例 9　证明：三角形三条高所在的直线共点。

已知：AD、BE、CF是$\triangle ABC$的三条高（图12）。

求证：AD、BE、CF相交于一点。

证明：过A、B、C分别作BC、CA、AB的平行线，两两相交于C'、A'、B'，构成$\triangle A'B'C'$；