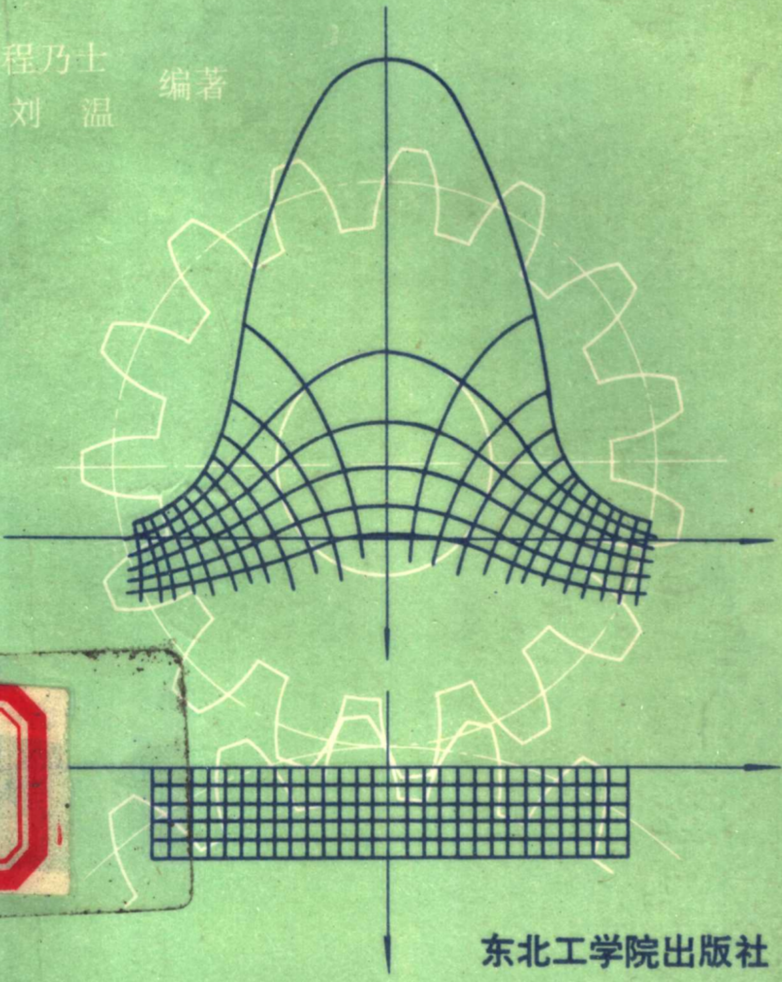
保角映射法

在齿轮应力和位移计算中的应用

程乃士
刘　温　编著



东北工学院出版社

保角映射法在齿轮应力和位移计算中的应用

程乃士
编著
刘　温

东北工学院出版社

内 容 简 介

保角映射法应用于齿轮的力学分析是近30年发展起来的一种弹性力学解析方法。其计算比有限元法、边界单元法更精确、更简便。此法在齿轮的强度计算、优化设计中具有广泛的前景，已受到国内外齿轮传动研究工作者的广泛关注。

本书供从事齿轮传动设计与研究的研究生、工程技术人员和从事机械学科教学与研究的教师，以及本科生用作教材和参考书。

保角映射法在齿轮应力和位移计算中的应用

程乃士　刘　温　编著

东北工学院出版社出版（沈阳市·南湖）　辽宁省新华书店发行　大连海运学院印刷厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：5.25　字数：118千字
1991年8月第1版　1991年8月第1次印刷
印数：1—1200册

责任编辑：孙铁军　责任校对：山　边
封面设计：唐敏智　版式设计：高志武

ISBN　7-81006-323-5/TH·31　定价：1.59元

前　　言

齿轮强度计算方法一直是机械学中的重大研究课题之一，其核心问题是齿轮的应力分析。人们根据齿轮的失效形式和力学分析结果来推断轮齿的应力状态，以便设计和制造出在给定工作条件下正常运转的齿轮传动装置，或者改进刀具、齿形、齿轮的设计和工艺，以获得合理的应力分布，充分利用材料的能力，取得更好的传动效果。

为了正确认识齿轮轮齿的应力状态，人们往往把齿轮的轮齿简化为可以用已有的数字和力学知识求解的模型来计算，例如，路易斯(Lewis)用抛物线与齿根过渡曲线相切的点连线所成的齿的断面作为危险断面，把齿视为悬臂梁，用普通的材料力学方法计算该断面的应力作为强度计算的依据；霍夫(Hofer)则提出以齿的对称中线成30°角的与齿根过渡曲线相切的直线上切点间的连线所得截面作为危险断面，用材料力学的悬臂梁法求解。这类解虽然比较粗糙、精度低，但由于方法简单，易于掌握，仍广泛用于一般的强度计算中。弹性力学有限单元法、边界单元法等数值解法用于齿轮的应力分析，不仅可以较准精地表达齿形、齿根过渡曲线，还可以表达齿轮体的结构，成为精确分析齿轮应力状态的重要方法之一，但由于要求计算机容量大。并需耗费大量机时，因而仅适用于重要的齿轮传动的设计和研究。

保角映射法应用于齿轮的力学分析是近30年发展起来

的一种弹性力学解析方法，比有限单元法，边界单元法更精确、更简便，速度也更快，所需计算机容量小，耗费机时也很少，在齿轮的强度计算、优化设计中具有广泛的应用前景，受到国内外齿轮传动研究工作者的广泛关注。尤其在轮齿的刚度计算中，保角映射法可以把载荷看作 Hertz 分布力求解，避免了前述各种方法把载荷简化为集中力所带来的误差，因而更接近实际。

由于到目前为止尚未见系统地论述保角映射法求解齿轮的应力和位移(即求刚度)方面的书籍，为了普及这方面的知识、推进保角映射法用于齿轮应力分析的研究和成果的应用，作者在多年研究成果的基础上，综合国内外有关论文的思路和观点，在给研究生授课的讲稿基础上编成此书，以为引玉之砖，与同仁切磋，并供从事齿轮传动设计与研究的工程技术人员和大专院校从事机械学科教学和研究的教师和本科生使用和参考。

作者水平有限，从事保角映射法研究的时间不长，书中错误难免，切望读者批评指正。

作　者

1991. 4. 11

于沈阳东北工学院

目　录

1　复变函数论基础

1.1 复数及其运算

1.1.1 定义

1. 复数

$$z=x+\mathrm{i}y$$

称为复数，其中 x 和 y 为任意实数，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 称虚单位；x 称为复数 z 的实部，记为 $\mathrm{Re}z$；y 称为复数 z 的虚部，记为 $\mathrm{Im}z$。

2. 复数相等

两复数的实部和虚部分别相等，则两复数相等。即若

$$z_1=z_2$$

或

$$x_1+\mathrm{i}y_1=x_2+\mathrm{i}y_2$$

则

$$x_1=x_2$$

$$y_1=y_2$$

1.1.2 复数与平面上点的联系

复数与平面上的点一一对应，因而可以互相表示。x 轴表示复数的实部，y 轴表示复数的虚部，又称 x 轴为实轴，y 轴为虚轴。平面上任何一点 $z(x,y)$ 都对应着一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$，又称 xoy 平面为复平面，也叫 z 平面(如图 1.1)。

点 z 又与矢量 $\overrightarrow{oz}$ 一一对应。即复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 也与矢量

$\overrightarrow{oz}$一一对应。矢量$\overrightarrow{oz}$的模即复数 z 的模，$\overrightarrow{oz}$的幅角 θ 也即复数 z 的幅角。

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\mathrm{Arg}z = \theta$$

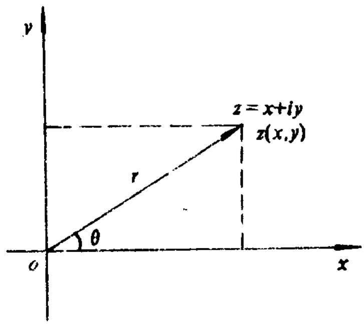


图 1.1

除 $z = 0$ 外，幅角都是确定的，但不是唯一的。故规定 $-\pi < \theta \leqslant \pi$ 为复数 z 的幅角的主值 $\arg z$。

$$\mathrm{Arg}z = \arg z + 2k\pi \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots$$

1.1.3 复数的三种表示方式

1. 直角坐标形式 $\qquad z = x + \mathrm{i}y$

2. 三角形式 $\qquad z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$

3. 指数形式

由欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$

可得

$$z = r e^{i\theta}$$

1.1.4 共轭复数

实部相同虚部相反的两个(一对)复数称为彼此共轭的，记为 z 和 $\bar{z}$(见图 1.2)。

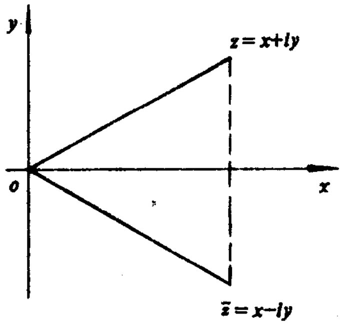


图 1.2

$$\begin{cases} z = x + iy \\ \bar{z} = x - iy \end{cases}$$

点 z 与点 $\bar{z}$ 对称于实轴，模相等但幅角相反。

$$|z| = |\bar{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\arg z = -\arg \bar{z}$$

1.1.5 复数的运算

复数的加减可看作矢量的加减法运算，设

$$z_1 = x_1 + iy_1$$

$$z_2 = x_2 + iy_2$$

则
$$z_1 + z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

复数的乘除法，如上面所设

$$z_1z_2=(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)$$
$$=x_1x_2-y_1y_2+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)$$
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}=\frac{(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)}{x_2^2+y_2^2}$$
$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2+\mathrm{i}(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}$$

用指数形式与三角形式进行运算较为方便，设

$$z_1=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$$
$$z_2=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$$

则

$$z_1z_2=r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}$$
$$=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]。$$

可见两个复数的积的模等于模的积，两个复数积的幅角等于两幅角的和。同样可得，两复数的商的模等于模的商，商的幅角等于幅角的差。

复数的乘方可看作乘法的推广

$$z^n=(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n=r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$$
$$=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)$$

也即是

$$|z^n| = |z|^n$$

$$\mathrm{Arg}(z^n) = n\mathrm{Arg}z + 2k\pi$$

复数的开方可由乘方反推得，设

$$z = re^{i\theta}$$

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$$

$$= r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

1.2 复变函数、函数的极根、函数的连续

1.2.1 函数的概念、平面到平面的映射

定义：如果对于复数集 E 中，每一数 z 都有某一复数 w 与之对应，就说在 E 上定义了一个复变数 z 的复函数：

$$w = f(z)$$

规定：以 x 和 y 表示 z；$z = x + iy$；

以 u 和 v 表示 w；$w = u + iv$；

以 r 和 θ 表示 z；$z = re^{i\theta}$；

以 ρ 和 φ 表示 w；$w = \rho e^{i\varphi}$。

几何意义：以 xoy 平面表示 z，以 uov 平面表示 w，z 平面上的集 E 中的每一点 z 在 w 平面上都有对应的一点 w，w 叫做 z 的像。$w = f(z)$ 使 z 平面的集合 E 映射到 w 平面上的集合 E_1，E_1 是 E 的像（见图 1.3）。

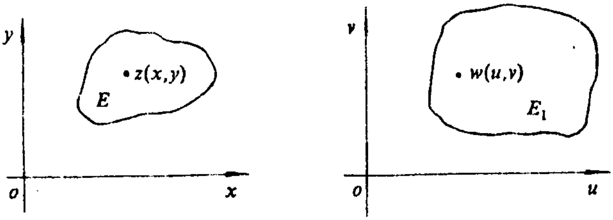


图 1.3

$$w=f(z)$$
$$u+\mathrm{i}v=f(x+\mathrm{i}y)$$

<例>设 $w=(x+y)+\mathrm{i}xy$,E 在全 z 平面上,求 E_1。

解:$w=(x+y)+\mathrm{i}xy$

即

$$\begin{cases} u=x+y \\ v=xy \end{cases}$$

则有 $$x=\frac{v}{y},u=\frac{v}{y}+y$$

整理得

$$y^2-uy+v=0$$
$$y=\frac{u\pm\sqrt{u^2-4v}}{2}$$

y 有实根的条件是:

$$u^2-4v\geqslant 0$$

即 $$v \leqslant \frac{u^2}{4}$$

函数 $w=(x+y)+\mathrm{i}xy$ 把点集 E，即全 z 平面映射到 w 平面上的 E_1，即抛物线 $v=\frac{u^2}{4}$ 下面的域（见图 1.4）$v=\frac{u^2}{4}$ 时，$y=\frac{u}{2}$，可得 $x=\frac{u}{2}$，即 $x=y$，故该函数将 $x=y$（直线）映射为 $v=\frac{u^2}{4}$（抛物线）。

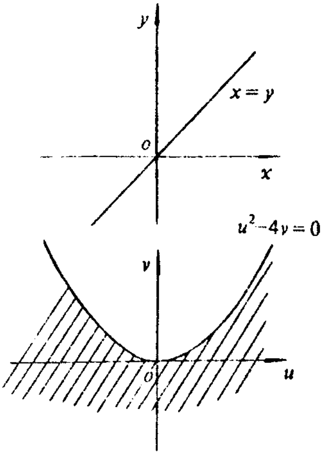


图 1.4

1.2.2　复数序列和极限

复数序列：有序的一列复数 $\{z_n\}=z_1, z_2, \cdots\cdots, z_n$ 称为复数序列。

有界序列：若有正数 M 存在，能够使对于一切 n 都有 $|z_n|<M$，就说序列 $\{z_n\}$ 是有界的。

一个复数序列有界相当于两个实数序列有界。

几何解释：若以原点为中心，以 M 为半径作一圆，能够使序列中的所有的项表示的点都包含在圆周的内部，则称序列 $\{z_n\}$ 是有界的。

z_0 是 $\{z_n\}$ 的极限：任给 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，只要 $n>N$，总有 $|z_n-z_0|<\varepsilon$，则称 z_0 是 $\{z_n\}$ 的极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z_0$，或 $z_n\to z_0$。

几何解释：若以 z_0 为中心，以任意小的正数 ε 为半径，不论 ε 如何小，总能以序列 $\{z_n\}$ 中找到 z_N，使 z_N 以后的一切项表示的点落在圆周的内部，则称复数 z_0 是序列 $\{z_n\}$ 的极限。

$\{z_n\}$的极限是∞：任给 $M>0$，存在正整数 N，只要 $n>N$ 就有$|z_n|>M$，则称$\{z_n\}$以∞为极限，或说$\{z_n\}$趋于无穷，记为 $\lim z_n=\infty$，或 $z_n\to\infty$。

注意：复数中只有一个∞，不像实数中有$\pm\infty$，而且以复数的观点来看$\{z_n\}$有极限，在实数中则认为没有极限。

1.2.3 函数的极限

定义：任给 $\varepsilon>0$，存在正数 δ，当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时就有 $|f(z)-A|<\varepsilon$，则称当 $z\to z_0$ 时 $w=f(z)$ 的极限为 A，记作

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A。$$

几何解释：若点 z 足够接近 z_0 时，对应的点 w 便任意接近点 A，则称 $z\to z_0$ 时 $f(z)\to A$。

注意：实函数中 $x\to x_0$ 是沿数轴变化的，复函数中 z 的变化是沿任意方向和任意曲线趋近于 z_0，$f(z)$趋于同一个复数 A。

1.2.4 函数的连续

定义：设 $f(z)$在 z_0 的邻域$|z-z_0|<\rho$ 内有定义，若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$，就称 $f(z)$在点 z_0 连续。

定理：若函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$在 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 连续，则 $u(x,y)$在(x_0,y_0)连续，$v(x,y)$在(x_0,y_0)连续。

1.3 基本超越函数

1.3.1 指数函数

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

指数函数有如下性质：

(1) $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$；

(2) e^z 是一个周期函数，周期为 $2\pi i$；

证：$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = e^z$

(3) e^z 与 $e^{\bar{z}}$ 共轭。

1.3.2 三角函数

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad ; \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

1.3.3 双曲函数

$$\mathrm{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad ; \quad \mathrm{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

1.3.4 对数函数

若 $e^w = z(z \neq 0)$，则 w 称为 z 的对数，记为 $w = Lnz$

$$Lnz = Ln|z| + i\mathrm{Arg} z = \ln|z| + i\arg z + 2k\pi i$$
$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots)$$

主值为：$\ln z = \ln|z| + i\arg z$

1.4 函数的导数

1.4.1 定义

设单值函数 $w = f(z)$ 是定义在 z 平面上区域 D 上的函数，当自变量 z 在点 z 处有一改变量 Δz 时，函数相应地有改变量

$\Delta w=f(z+\Delta z)-f(z)$，如果

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

存在，就称 $w=f(z)$ 在点 z 处可导，并称这个极限值是 $w=f(z)$ 的导数，记为 $f'(z)$，w'，$\frac{dw}{dz}$，$\frac{df}{dz}$，$f'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}$

复变函数求导的步骤、方法和法则与实变函数一致，因而有许多与实变函数求导相似的公式。

1.4.2 函数的导数与函数连续的关系

函数的导数存在则函数一定连续，但连续函数不一定可导。

<例>函数 $w=\text{Re}z$ 在 z 平面上处处连续，但此函数处处无导数。

证：$w=f(z)=\text{Re}z=x$

两边对 x 求偏导数

$$\frac{\partial f(z)}{\partial x}=f'(z)\frac{\partial z}{\partial x}=1$$

$$\because\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial(x+iy)}{\partial x}=1$$

$$\therefore\quad f'(z)=1$$

又两边对 y 求偏导数

$$\frac{\partial f(z)}{\partial y}=f'(z)\frac{\partial z}{\partial y}=0$$