21世纪高等院校经典教材同步辅导
ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

工程数学

复变函数·积分变换

西安交大第四版　　东南大学第四版

全程导学及习题全解

靳红　主编

◆知识归纳　梳理主线重点难点
◆习题详解　精确解答教材习题
◆提高练习　巩固知识迈向更高

中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House

21 世纪高等院校经典教材同步辅导
ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

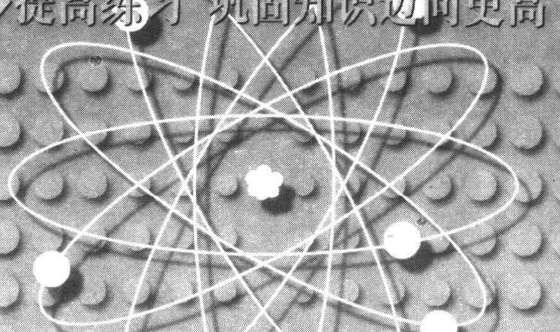
工程数学
复变函数·积分变换

西安交大第四版　　东南大学第四版

全程导学及习题全解

靳红　主编

◆知识归纳 梳理主线重点难点
◆习题详解 精确解答教材习题
◆提高练习 巩固知识迈向更高



中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House

图书在版编目(CIP)数据

复变函数·积分变换全程导学及习题全解/靳红主编.—北京:中国时代经济出版社,2006.2

(21世纪高等院校经典教材同步辅导)

ISBN 7-80169-896-7

Ⅰ.复... Ⅱ.靳... Ⅲ.①复变函数-高等学校-教学参考资料 ②积分变换-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第157155号

复变函数·积分变换全程导学及习题全解

靳红 主编

出版者	中国时代经济出版社
地址	北京东城区东四十条24号 青蓝大厦11层
邮政编码	100007
电话	(010)68320825 68320496
传真	(010)68320634
发行	各地新华书店
印刷	北京白帆印务有限公司
开本	880×1230 1/32
版次	2006年4月第1版
印次	2006年4月第1次印刷
印张	9
字数	220千字
印数	1~5000册
定价	11.00元
书号	ISBN 7-80169-896-7/G·379

内容简介

本书通过详细的解题过程、独特而华丽的技巧、经典的概括和阐述来帮助读者掌握复变函数和积分变换这一数学理论。对于正在学习该课程的理工科大学生,准备考研的学生,以及教授该课程的青年教师,本书有很好的参考价值。此外,本书也有益于数学相关专业的学生与广大数学爱好者熟悉这一课程所呈现出的各种思想和解题技巧。

引　言

怎样才能掌握一门数学呢？笔者认为，对数学的学习应分三个环节——理解、概括、体会。“理解”是要明白教材的内容，即概念和定理说的是什么，例题又是怎样解出来的。而“概括”则要将这些内容条理化，分清主次，抓住主要方面；同时又能前后联系，统一各章内容。“体会”是在解题过程中，将概念、定理转化为方法，并建立起问题和方法的联系。总的来说，数学是一种贯穿在概念、定理、问题、方法之中的统一性，是一种生动而活泼的思维性力量。如果能体会到这种统一性，就可以建立起自己的数学工具箱，对它应用自如了。

本书作为复变函数与积分变换的教学辅导书，希望在概括、体会两方面为理工科大学生提供帮助。目前高校普遍采用的教材为：《复变函数》(第四版)，西安交通大学高等数学教研室编；《积分变换》(第四版)，东南大学数学系张元林编；高等教育出版社。

为此，对教材的每一章，本书设计了两个模块：内容概要与习题详解。在内容概要模块，给出了笔者多年教学积累的经典概括与解题方法。例如，用换元法概括复积分和定积分的相互转化；给出一个简单实用的∞处的留数计算方法(见第五章，补充规则)；利用保持角的方向来判断解析函数的区域对应(第六章)；“符号规则”可用以记忆积分变换的性质(积分变换，§1.3)；将公式$\mathscr{L}[e^{kt}]=\dfrac{1}{s-k}$中常数$k$推广到$k$取复数情形，从而统一了指数函数、三角函数与双曲函数的 Laplace 变换公式等。此外，也阐述了笔者对一些概念的独特处理，帮助读者理解。在习题详解模块，本书给出的解题方法灵活多样，技巧华丽；而对解题过程则记录详细，以确保读者能看清其中的解题思路和每一步骤的具体演算。对于一些容易忽略与出错的地方，则专门指出，加以强调。最后给出两个附录，希望读者能体会 Laplace 变换延迟性质的妙用与复变函数的统一性。

本书的编写要感谢时代经济出版社提供的机缘。笔者还应该感谢北京化工大学的各位同仁和同学们，他们的鼓励和期待才是本书写作的原动力。对于书中的不妥与错误之处，恳请广大同行与读者批评指正。

编者

2006 年元月于北京

目　录

第一部分　复变函数

第一章　复数与复变函数

本章内容概要

一、复数的定义与代数运算

1. 复数的定义

取一字母 i，规定 $i^2=-1$，称 i 为虚数单位.

对任意二实数 x,y，称表达式 $z=x+iy$ 为一个复数，其中 x,y 分别称为复数 z 的实部和虚部. 记为：$x=\mathrm{Re}(z)$，$y=\mathrm{Im}(z)$. 两个复数相等当且仅当它们的实、虚部分别相等.

当 $y=0$ 时，将复数 $z=x+i\cdot 0$ 与实数 x 等同起来，从而所有实数都是复数. 当 $x=0$，$y\neq 0$ 时，称 $z=yi$ 为纯虚数.

全体复数组成的集合，记为 $\mathbb{C}$.

2. 复数的四则运算

设 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$ 为任意两个复数，规定：

$z_1\pm z_2=(x_1+iy_1)\pm(x_2+iy_2)=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)$，

$z_1\cdot z_2=(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$，

$z_2\neq 0$ 时，
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

可以证明，复数四则运算的运算律与实数一样，所以称 $\mathbb{C}$ 为复数域.

3. 共轭复数

$z=x+iy\in\mathbb{C}$，定义 $\overline{z}=x-iy$，称为 z 的共轭复数.

性质：① $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$，　$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$，$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$；

② $\overline{\overline{z}}=z$；

③ 设 $z=x+iy$，则　$x=\dfrac{1}{2}(z+\overline{z})$，$y=\dfrac{1}{2i}(z-\overline{z})$；

④ $z\overline{z}=x^2+y^2=|z|^2$.

在实际计算中，可利用③④，由 $\bar{z}$ 来计算 $\mathrm{Re}(z)$、$\mathrm{Im}(z)$、$|z|$. 特别地，商 $\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\bar{z}_2}{z_2\cdot\bar{z}_2}=\frac{z_1\cdot\bar{z}_2}{|z_2|^2}$ 在将分母实化后可以得出其实部与虚部.

二、复数的五种表示及相互转化

1. 复数的实虚部表示

即定义中 $z=x+iy, x,y\in\mathbb{R}$.

2. 复数的点表示

将复数 $z=x+iy$ 与坐标平面上以 (x,y) 为坐标的点 $P(x,y)$ 等同起来，称为复数的点表示，此时坐标平面等同于 $\mathbb{C}$，称为复平面.（或者，将 $z=x+iy$ 看作平面上点 $P(x,y)$ 的复坐标，这样，两个实坐标对应于一个复坐标.）

将复数 $z=x+iy$ 对应于点 $P(x,y)$，导致了一种复解析几何：我们可以将关于 z 的方程、不等式组的解集画在平面上得到方程、不等式组的图形，也可以将图形用关于 z 的方程、不等式组来描述.

例 1：平面曲线 $f(x,y)=0$ 的复方程为 $f\left(\frac{z+\bar{z}}{2},\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)=0$.

平面曲线 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}, a\leqslant t\leqslant b$ 的复方程为 $z=x(t)+iy(t), a\leqslant t\leqslant b$.

例 2：过两点 $z_1,z_2(z_1\neq z_2)$ 的直线的复方程为：

$z=z_1+t(z_2-z_1), t\in\mathbb{R}$.

3. 复数的向量表示

在复平面上，当我们把复数 $z=x+iy$ 等同于点 $P(x,y)$ 时，同时也将 z 等同于向量 $\overrightarrow{OP}$ 了.（或者，复平面上向量 $\overrightarrow{OP}$ 的复坐标为 z）.

定义：$\overrightarrow{OP}$ 的长度 $|\overrightarrow{OP}|$ 称为复数 z 的模，记为 $|z|$ 或 r.

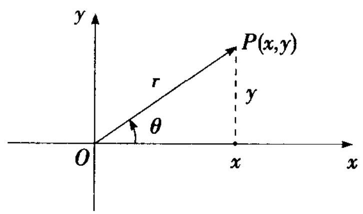


图 1—1

x 轴正方向到 $\overrightarrow{OP}$ 方向的转角（逆时针转动为正，顺时针转动为负）称为复数 z 的辐角，记为 $\mathrm{Arg}z=\theta$.

当 $z=0$ 时，辐角不确定.

当 $z\neq 0$ 时,有:$\mathrm{Arg}z = 2k\pi+\theta_0, k\in \mathbb{Z}, -\pi<\theta_0\leqslant+\pi$,称 θ_0 为 $\mathrm{Arg}z$ 的主值,记作 $\theta_0 = \arg z$.

复数 z 的实虚部 x,y 与模一辐角 r,θ 相互关系为:

$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2}, \\ \tan\theta=\dfrac{y}{x}. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\cos\theta. \end{cases}$$

特别,辐角主值 $\arg z$ 与反正切函数 $\arctan\dfrac{y}{x}$ 关系可以用图 1—2 表示:

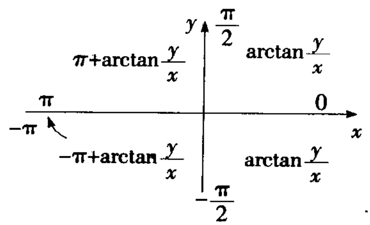


图 1—2

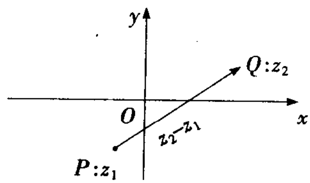


图 1—3

向量的加、减法与其对应的复数加、减法一致. 此外,对于始点为 P、终点为 Q 的向量 $\overrightarrow{PQ}$,有:

$\overrightarrow{PQ}$ 的复坐标 $=Q$ 点复坐标 z_2-P 点复坐标 z_1.(如图 1—3)

从而,P、Q 两点距离 $|\overrightarrow{PQ}|=|z_2-z_1|$. 由此可以得到三角不等式:

$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$, $\big||z_1|-|z_2|\big|\leqslant|z_1-z_2|$.

4. 复数的三角表示

$$\begin{aligned} z &= x+iy \\ &= r\cos\theta+ir\sin\theta \\ &= r(\cos\theta+i\sin\theta). \end{aligned}$$

5. 复数的指数表示

根据 Euler 公式:$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$,有:$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}$.

三、复数的幂与根

1. 乘积与商的模 — 辐角

$z_1,z_2\in\mathbb{C}$,则:$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$, $\mathrm{Arg}(z_1\cdot z_2)=\mathrm{Arg}(z_1)+\mathrm{Arg}(z_2)$;

$z_2\neq 0$ 时,$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $\mathrm{Arg}(z_1/z_2)=\mathrm{Arg}(z_1)-\mathrm{Arg}(z_2)$.

(在辐角等式中,应将左、右两边理解为各自所有值的集合,等式是指

左、右两边作为集合相等.这一原则对含有多值的符号的等式都适用).

几何意义:$a \in \mathbb{C}, a \neq 0$,令 $a = \rho e^{i\varphi}$,则 az 是把 z 对应向量逆时针转动 φ 后,将其长度扩大 ρ 倍;而 $\frac{1}{a}z$ 是把 z 对应向量顺时针转 φ 后,将长度缩小为原来长度的 $\frac{1}{\rho}$.

2. 幂

$z = re^{i\theta}$,则 $z^n = r^n e^{in\theta}$.

令 $z^{-1} = \frac{1}{z}$,上述公式对 $n \in \mathbb{Z}$ 都成立.

$r = 1$ 时即棣莫弗公式(De Moivre):$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.

3. n 次方根

若 $w^n = z$,则 $w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{2k\pi + \theta}{n}}, k = 0, 1, \cdots, n-1$.其中 $z = re^{i\theta}$.

四、区域

1. 邻域

——$z_0 \in \mathbb{C}$,$|z - z_0| < \delta$ 的解集称为 z_0 的 δ-邻域.不等式 $0 < |z - z_0| < \delta$ 的解集称为 z_0 的去心邻域.

2. 开集

——平面 $\mathbb{C}$ 的子集 G,若任一点 $z_0 \in G$,存在 z_0 的一个 δ-邻域,使得该邻域的所有点都在 G 中,称 G 为开集.

3. 区域

——平面 $\mathbb{C}$ 的子集 G,若 G 为开集,且任二点 $z_1, z_2 \in G$,有 G 中折线,将 z_1,z_2 相连,则称 G 为区域.

简言之,区域是连通开集.

4. 边界

——区域 D,若一点 P 不属于 D,但 P 的每一个邻域里均有 D 中的点,这样的点 P 称为 D 的边界点.D 的所有边界点组成的集合称为 D 的边界,记为 ∂D.

区域 D,加上边界 ∂D 一起组成了闭区域 $\overline{D}$,或者 $D + \partial D$.

5. 简单曲线

——若 $x(t)$,$y(t)$ 为连续实函数,则 $z(t) = x(t) + iy(t)$,$a \leqslant t \leqslant b$ 称为一条平面(连续)曲线.若对于 $a < t_1 < b$,$a \leqslant t_2 \leqslant b$ 的任意 t_1, t_2,总有 $z(t_1) \neq z(t_2)$,则称该曲线为简单曲线.若还有 $z(a) = z(b)$,则称为简单闭曲线.(简单曲线就是不自交的曲线)

6. 单连通域,多连通域

——对一区域 D,若任一 D 中简单闭曲线,其内部都在 D 中(等价地,可以

在 D 中连续收缩为一点)，则称 D 为单连通域，否则称 D 为多连通域.

五、复变函数

1. 定义

将 z 平面上一点集 G 中每一复数 $z \in G$ 对应到一个或多个复数 w 的对应法则，记为 $w = f(z)$，称为复变函数.

一般仅考虑单值函数，对于多值函数，可以取单值分支，化为单值函数来研究.

由于一个复变量等价于两个实变量，令 $z = x + iy, w = u + iv$，则一个复变函数 $w = f(z)$ 等价于两个二元实函数 $u(x,y)$、$v(x,y)$.

2. 点变换(映射)

为了直观 $w = f(z)$，将它看作是将 z 平面上的点 z 变换为 w 平面上的点 w 的一个点变换(或叫映射).

从而，$w = f(z)$ 将 z 平面内的曲线、区域相应地变换为 w 平面上的曲线、区域. 一般而言，将关于 z 的方程、不等式组利用 $w = f(z)$ 转化为关于 w 的方程、不等式组，可以求得曲线像、区域像.

例：若 z 平面上曲线 C 参数方程为：$z = z(t), a \leqslant t \leqslant b$，则 C 在 f 下的像曲线为：$w = f[z(t)], a \leqslant t \leqslant b$.

3. 极限

定义：设函数 $w = f(z)$ 在点 z_0 的一个去心邻域 $0 < |z - z_0| < \rho$ 内有定义，若有 $-A \in \mathbb{C}$，使得：$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - A| < \varepsilon$，则称为 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$.

定理：若 $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y), z_0 = x_0 + iy_0, A = a + ib$，则有：$\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = a$ 且 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = b$.

这一点由不等式 $|u - a|$，$|v - b| \leqslant |f(z) - A| \leqslant |u - a| + |v - b|$ 可以直接看出.

4. 连续

定义：若 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$，则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续. 若 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续，则称 $f(z)$ 在 D 内连续.

定理：若 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$，则 $f(z)$ 在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 处连续 $\Leftrightarrow u(x,y), v(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续.

总结：本章重点是复数的运算，复数的各种表示，复变函数的极限与连续性. 总得来说，从形式上看，复变函数的极限、连续等概念(包括后面的导数、积

分、级数等）与一元实函数对应的概念完全一样，因此许多对于一元实函数成立的事实，对于复变函数仍然成立，而且可以照搬过去的证明；例如极限的四则运算法则、连续函数的复合仍连续等，以及习题 29，30（教材第 34 页）．但从实质上讲，由于一个复变元等价于两个实变元，所以复的一元极限，从实的观点看是二元极限，因此复极限的存在性是一个很强的要求．这是因为在平面上一个动点 z 趋向于一定点 z_0 时可以以不同方式，不同方向趋近于 z_0，而只有在所有可能趋近于 z_0 的方式中函数 $f(z)$ 均趋向于同一个常数 A，才有 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$ 成立．这一点是柯西-黎曼方程的基础，从而也是导致解析函数与实可导函数理论有很大不同的原因．

本章习题详解

1. 求下列复数 z 的实部与虚部，共轭复数、模与辐角：

1) $\dfrac{1}{3+2i}$；　　2) $\dfrac{1}{i}-\dfrac{3i}{1-i}$；

3) $\dfrac{(3+4i)(2-5i)}{2i}$；4) $i^8-4i^{21}+i$.

解：1) $z=\dfrac{1}{3+2i}=\dfrac{3-2i}{(3+2i)(3-2i)}$

$$=\frac{3-2i}{3^2+2^2}=\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i.$$

$\operatorname{Re}(z)=\dfrac{3}{13}, \operatorname{Im}(z)=-\dfrac{2}{13}, \bar{z}=\dfrac{3}{13}+\dfrac{2}{13}i.$

$|z|=\sqrt{\left(\dfrac{3}{13}\right)^2+\left(-\dfrac{2}{13}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{13}}{13}.$

$\arg(z)=\arctan\dfrac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}=-\arctan\dfrac{2}{3}.$

2) $\dfrac{1}{i}=\dfrac{\bar{i}}{i\cdot\bar{i}}=-i$

$\dfrac{3i}{1-i}=\dfrac{3i(1+i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{-3+3i}{2}=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}i$

$z=\dfrac{1}{i}-\dfrac{3i}{1-i}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{2}i.$

$\operatorname{Re}(z)=\dfrac{3}{2}, \operatorname{Im}(z)=-\dfrac{5}{2}, \bar{z}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}i,$

$|z|=\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{5}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{34}}{2}.$　　$\arg(z)=-\arctan\dfrac{5}{3}.$

$$3)z = \frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}$$

$$= \frac{(6+20)+(8-15)i}{2i}$$

$$= \frac{26-7i}{2i}$$

$$= \frac{(26-7i)i}{-2}$$

$$= \frac{7+26i}{-2}$$

$$= -\frac{7}{2} - 13i.$$

$\mathrm{Re}(z) = -\frac{7}{2}, \mathrm{Im}(z) = -13, \bar{z} = -\frac{7}{2} + 13i.$

$|z| = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 13^2} = \sqrt{\frac{725}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{29}.$

由于 z 对应的点在第三象限，所以有：

$\arg(z) = -\pi + \arctan\frac{26}{7}.$

4) 由 $i^2 = -1$ 有：$i^4 = 1, i^8 = 1, i^{21} = (i^4)^5 \cdot i = i.$

所以 $z = i^8 - 4i^{21} + i = 1 - 4i + i = 1 - 3i.$

$\mathrm{Re}(z) = 1, \mathrm{Im}(z) = -3, \bar{z} = 1 + 3i,$

$|z| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}, \arg(z) = -\arctan 3.$

2. 当 x, y 等于什么实数时，等式 $\frac{x+1+i(y-3)}{5+3i} = 1+i$ 成立？

解：如果等式 $\frac{x+1+i(y-3)}{5+3i} = 1+i$ 成立，则有：

$x+1+i(y-3) = (1+i)(5+3i) = 2+8i.$

由于 x, y 为实数，又两个复数相等当且仅当它们的实部、虚部都相等，所以有：

$$\begin{cases} x+1=2 \\ y-3=8 \end{cases} \quad 故 \begin{cases} x=1 \\ y=11 \end{cases}$$

所以当 $x=1, y=11$ 时，等式成立.

3. 证明虚单位 i 有这样的性质：$-i = i^{-1} = \bar{i}.$

证明：由共轭复数的定义：$\overline{a+bi} = a - bi, a, b \in \mathbb{R}.$

令 $a=0, b=1$，有：$\bar{i} = -i.$

由共轭复数的运算性质：$z\bar{z} = |z|$，有：$i \cdot \bar{i} = i \cdot (-i) = |i| = 1.$

所以 $i^{-1}=\bar{i}=-i$.

4. 证明

1) $|z|^2=z\bar{z}$;　　2) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$;

3) $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$;　　4) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, z_2\neq 0$;

5) $\bar{\bar{z}}=z$;　　6) $\mathrm{Re}(z)=\dfrac{1}{2}(z+\bar{z}), \mathrm{Im}(z)=\dfrac{1}{2i}(z-\bar{z})$.

证明:1) 设 $z=x+iy, x,y\in\mathbb{R}$,则有 $\bar{z}=x-iy$,

$$
\begin{aligned}
z\bar{z}&=(x+iy)(x-iy)\\
&=(x^2+y^2)+i(yx-xy)\\
&=x^2+y^2=|z|^2,
\end{aligned}
$$

所以 $|z|^2=z\bar{z}$.

2) 设 $z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2, x_1,y_1,x_2,y_2$ 为实数.

则:
$$
\begin{aligned}
\overline{z_1\pm z_2}&=\overline{(x_1+iy_1)\pm(x_2+iy_2)}\\
&=\overline{(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)}\\
&=(x_1\pm x_2)-i(y_1\pm y_2).
\end{aligned}
$$

而
$$
\begin{aligned}
\bar{z}_1\pm\bar{z}_2&=(x_1-iy_1)\pm(x_2-iy_2)\\
&=(x_1\pm x_2)-i(y_1\pm y_2).
\end{aligned}
$$

由于实部、虚部相同,所以 $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$.

3) 设 $z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2, x_1,y_1,x_2,y_2$ 为实数,则有:

$$
\begin{aligned}
\overline{z_1z_2}&=\overline{(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)}\\
&=\overline{(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)}\\
&=(x_1x_2-y_1y_2)-i(x_1y_2+x_2y_1).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{z}_1\bar{z}_2&=\overline{(x_1+iy_1)}\cdot\overline{(x_2+iy_2)}\\
&=(x_1-iy_1)(x_2-iy_2)\\
&=(x_1x_2-y_1y_2)-i(x_1y_2+x_2y_1).
\end{aligned}
$$

比较以上二式的实、虚部,有 $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$.

4) 设 $z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2, x_1,y_1,x_2,y_2\in\mathbb{R}$,则:

$$
\begin{aligned}
\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}&=\overline{\left(\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}\right)}=\overline{\left[\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+(y_1x_2-x_1y_2)i}{x_2^2+y_2^2}\right]}\\
&=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}-\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}i.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}&=\frac{x_1-iy_1}{x_2-iy_2}=\frac{(x_1-iy_1)(x_2+iy_2)}{(x_2-iy_2)(x_2+iy_2)}\\
&=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+(x_1y_2-y_1x_2)i}{x_2^2+y_2^2}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} - \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}i$$

比较以上两者的实虚部,有 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$.

5) 设 $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$,则 $\overline{z} = x - iy$,

$\overline{\overline{z}} = \overline{(\overline{z})} = \overline{(x - iy)} = x + iy = z$,所以 $\overline{\overline{z}} = z$.

6) 设 $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$,则 $x = \mathrm{Re}(z), y = \mathrm{Im}(z)$,而 $\overline{z} = x - iy$,故 $x = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), y = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$.

即: $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$.

5. 对任何 $z, z^2 = |z|^2$ 是否成立?如果是,就给出证明. 如果不是,对哪些 z 值才成立?

解:对任意 $z, z^2 = |z|$ 并不成立. 例如,取 $z = i$,则 $z^2 = i^2 = -1$,而 $|z|^2 = |i|^2 = 1$,二者并不相等.

令 $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$,则 $z^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$.

$|z|^2 = x^2 + y^2$,故 $z^2 = |z|^2$ 当且仅当: $x^2 + y^2 = x^2 - y^2, 2xy = 0$ 同时成立,由上式有 $y = 0$,故当且仅当 z 为实数时 $z^2 = |z|^2$ 成立.

6. 当 $|z| \leqslant 1$ 时,求 $|z^n + a|$ 的最大值,其中 n 为正整数,a 为复数.

解:因为 $|z^n| = |z|^n$,所以有:

$|z^n + a| \leqslant |z|^n + |a| \leqslant 1 + |a|$.

所以 $|z^n + a|$ 的最大值为 $1 + |a|$.

另一种解法:当 z 取遍 $|z| \leqslant 1$ 的所有值时,z^n 也取遍同样的值,从几何上看,$z^n + a$ 取遍了以 a 为中心,1 为半径的圆的圆内所有值(含圆周). 所以 $|z^n + a|$ 最大值为 $1 + |a|$.

如图 1—4 所示.

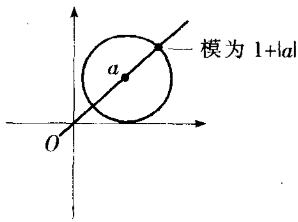


图 1—4

7. 判定下列命题的真假:

1) 若 c 为实常数,则 $c = \overline{c}$;

2) 若 z 为纯虚数,则 $z \neq \overline{z}$;

3) $i < 2i$;

4) 零的辐角是零;

5) 仅存在一个数 z,使得 $\frac{1}{z} = -z$;

6) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$;