研究生教学用书

现代概率论基础（第二版）

汪嘉冈 编著

复旦大學出版社
www.fudanpress.com.cn

研究生教学用书

现代概率论基础（第二版）

汪嘉冈 编著

复旦大学 出版社
www.fudanpress.com.cn

图书在版编目(CIP)数据

现代概率论基础/汪嘉冈编著. —2版. —上海:复旦大学出版社,2005.8
研究生教学用书
ISBN 7-309-04555-6

Ⅰ. 现… Ⅱ. 汪… Ⅲ. 概率论-研究生-教材
Ⅳ. 0211

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 051981 号

现代概率论基础(第二版)
汪嘉冈 编著

出版发行 复旦大学出版社
上海市国权路 579 号 邮编 200433
86-21-65118853(发行部) 86-21-65109143(邮购)
fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com

责任编辑 范仁梅
总 编 辑 高若海
出 品 人 贺圣遂

印　　刷 上海复文印刷厂
开　　本 787×960 1/16
印　　张 13 插页 2
字　　数 240 千
版　　次 2005 年 8 月第二版第一次印刷
印　　数 1—3 100

书　　号 ISBN 7-309-04555-6/O·343
定　　价 20.00 元

内容提要

本书以测度论为工具，系统地论述了概率论的基本概念（如事件、随机变量、概率、期望等），同时还介绍了独立随机变量序列、条件期望和鞅序列等方面的主要结果，从而为读者深入学习现代概率论、随机过程和数理统计提供了必要的基础．本书可作为大学生和研究生的教材或教学参考书，也可供相关专业的学生、教师、研究工作者阅读和参考．

前　言

在初等的概率论课程中，都会直观地介绍概率论中的一些基本概念，如事件、概率、随机变量、期望等，而事件、概率又是其中最基本的. 概率可以看作以事件为自变量的函数. 从概率论发展的需要来看，明确地规定事件和概率是必需的. 为了规定什么是事件，一方面要考虑到对事件应允许进行必要的运算，以满足分析随机现象的实际需要，因而事件类不能太小，至少对某些运算应该是封闭的；另一方面为了能对每个事件给出概率，并保证对概率有一定的要求，例如可加性等，所以事件类就不能太大，否则无法给出一个“兼顾各方面要求”的概率. 这就是运用公理化方法来描述概率模型时必须考虑的内容.

事件从其运算的特点来看，它与集合的运算是十分相近的. 假若把试验可能结果 ω 的全体记为 Ω，事件$\tilde{A}$ 相当于“Ω 中某些 ω 在试验中出现”这一事件，即事件 $\tilde{A}=\{$ 属于 Ω 的子集 A 的任一 ω 在试验中出现 $\}$，这样事件 $\tilde{A}$ 与 Ω 的子集 A 就是一回事了. 在这种对应之下，事件全体就是 Ω 的某些子集的集合. 概率就应该是定义在 Ω 的某些子集上的一个以集合为自变量的函数. 规定事件和概率所必须兼顾到的各种要求就变为对集合类与集合函数应该满足的要求. 本书的前两章先介绍测度论的一般结果，并以此来建立事件、随机变量、概率、期望等各种概率论的概念. 自从 Kolmogorov 引进概率模型的公理结构以来，这种做法在现代概率论、随机过程甚至数理统计理论中几乎是通用的做法. 第三、第四章主要介绍独立性、独立随机变量序列、条件期望、鞅等概念. 这里虽然离不开测度论的方法，但在讨论这些问题时用到的测度论概念、方法已和许多概率论概念结合起来，因而成为概率论本身特有的概念和方法了，例如停时的概念就是一个例子.

相对于目前开设的基础课——概率论的内容来说，这里的内容是进了一步.但对于概率论、随机过程和数理统计的现代理论来说,这些内容仍然是最基本的. 从这个意义上来说，称它为“概率论基础”更为恰当些. 此外，本书还涉及不少近年来普遍运用的观点和概念，因此这里又冠上“现代”这个形容词.

编者自 1978 年以来，曾多次为高年级大学生、研究生和进修教师开设了这一

课程, 本书就是由这一课程的讲义修改而成的, 其中很多内容选自参考书目 [1, 2]. 又由于参考书目 [3, 4] 是随机过程和现代鞅论的基本著作, 因此在编写和修改中也力求使本书的内容与之衔接. 编者在开设这一课程时, 假定听讲者已具备初等概率论知识 (相当于参考书目 [5] 的内容) 和初步的实分析知识 (例如参考书目 [6] 的部分内容). 通过本课程的学习, 一方面可以学会用测度论的观点和方法来分析概率论的一些重要问题; 另一方面掌握了独立性、条件期望、鞅等方面的一些基本结果后, 就为进一步学习概率统计和随机过程方面其他课程打下基础. 讲授这一课程一般可用 54 学时, 这就相当于每周 3 学时讲一学期的课程.

本书共分4章, 每章又分若干节. 同一节内就按序号直接引用, 同章不同节间引用时在序号前加节号, 不同章之间引用加上章、节号. 例如定义 3 和 (4.2) 分别表示本节的定义 3 和 (4.2) 式, 命题 3.5 和定理 2.5.3 分别表示本章 §3 的命题 5 和第二章 §5 的定理 3. 本书用到的符号, 若未加说明, 可参见书末符号一览表.

编者得以完成本书首先要感谢复旦大学数学系、统计运筹系和数学研究所, 由于它们的安排使编者有机会在多次的教学实践中完成本书的编写和修改任务. 也要感谢概率统计教研组的同志们, 是他们鼓励和支持我完成了这一工作. 其次也应感谢各次参加听讲的学生, 由于他们仔细阅读原来的讲义而帮助我纠正了一些不妥之处. 还特别要感谢何声武和徐家鹄同志, 在完稿后他们又仔细地校阅了手稿并协助作了修改.

最后, 由于编者的水平所限, 本书可能存在不少错误和缺点, 编者真诚地欢迎读者的批评和指正.

编者

1986年7月

再版前言

本书第一版出版后, 曾被许多院校先后采用作为教材和教学参考书, 并于 1992 年荣获国家教育委员会(即现在的国家教育部)颁发的“第二届高校优秀教材奖”优秀奖.

由于概率与统计的应用不断扩大和深入, 不仅理科类的概率统计课程要求讲述严密的概率论基础内容, 其他学科的课程, 例如数理金融学等也迫切需要讲授这方面的基本内容, 所以结合测度论方法讲述概率论已成为许多方面的需要. 编写本书原来的想法就是注重用测度论的观点和方法来分析概率论的一些重要问题, 并讲清独立性、条件期望、鞅的基本概念和结果. 这一想法也符合了许多师生和实际工作者的要求. 自本书出版以后国内外相继出版的许多概率论基础方面的著作和教材也反映了同样想法(例如参考书目[7~10]).

自 2001 年开始, 作者在复旦大学统计学系为硕士研究生讲授这一课程. 在讲授的过程中不断对课程的内容按需要和教学实际进行修改. 所以这次再版中所作的一些增删是这几年教学实践过程的反映.

此书这次再版, 其内容在总的框架上与第一版基本相同, 只是局部地作了些增删, 改写了一些证明, 改正了一些错误和不妥之处, 使之更符合教学实际. 章节和公式、定理等的编号采用了新的格式(分别按节统一编号). 为了帮助掌握书的内容, 对习题作了补充. 在讲授课程的同时对习题展开讨论也是这几年教学中一个行之有效的做法. 对习题的调整就反映了这方面的实践成果.

本书第一版出版以后, 曾得到许多兄弟院校的教师的指教和建议, 这次再版的一些修改就来源于此. 在此, 编者真诚地向他们表示感谢; 复旦大学管理学院统计学系为编者提供机会讲授这一课程, 推动编者进行这次修改, 编者也真诚地表示感谢; 编者还感谢听课的研究生, 是他们帮助发现了修改过程中的问题. 最后, 编者诚挚地感谢复旦大学出版社范仁梅女士, 是她的帮助使编者完成了本书的再版.

教材虽经不断修改, 但仍会有不少缺点和问题, 欢迎读者的批评指正.

编者

2005年3月

目　　录

第一章 可测空间

§1.1 集类与 σ 域

1.1.1 集合及其运算

设 Ω 是一个抽象空间, 即一个非空集合, 它的元素称为点, 一般用 ω 表示. 由某些点构成的集合将用 $A, B, \cdots$ 等大写字母表示. $\omega \in A$ 表示 ω 为 A 的一个元素, 也称 ω 属于 A, 也记为 $\omega \in A$. 像通常一样, 若 A 的元素都是 B 的元素, 那么称 A 为 B 的子集, 记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$. 空集也作为 Ω 的一个子集, 用 $\varnothing$ 表示. 若 $A \subset B$, 同时 $B \subset A$, 即 A, B 由相同的元素构成, 则记为 $A = B$, 称 A, B 是相等的.

对于 Ω 的子集, 常用到下列的一些运算:

并: $A \cup B$, $\bigcup\limits_{n \geq 1} A_n$, $\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$.

$A \cup B$ 是由至少属于 A, B 之中一个集合的元素全体构成的集合. $\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ 由 $\{A_\alpha, \alpha \in I\}$ 中诸集 A_α 的元素全体构成, 即 $\omega \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ 当且仅当至少有一个 $\alpha_0 \in I$, 使 $\omega \in A_{\alpha_0}$.

交: $A \cap B$, $\bigcap\limits_{n \geq 1} A_n$, $\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$.

$A \cap B$ 是由同时属于 A 及 B 的元素构成的集合. $\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ 由同时属于 $\{A_\alpha, \alpha \in I\}$ 中每个集合的元素全体构成, 即 $\omega \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ 当且仅当对每个 $\alpha \in I$, $\omega \in A_\alpha$. $A \cap B$ 也记为 AB.

余集: A^c.

A^c 是由 Ω 中不属于 A 的元素全体构成的集合.

差：$A \setminus B = A \cap B^c$.

对称差: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

特别的若 $A \cap B=\varnothing$, 则称 A, B 为互不相交的. 对两两互不相交的 $\{A_\alpha\}$, 常用 $\sum_\alpha A_\alpha$ 表示 $\bigcup_\alpha A_\alpha$, 也称为 $\{A_\alpha\}$ 之和. 若 $B\subset A$, 则常用 $A - B$ 表示 $A \setminus B$.

为了方便, 我们还约定, 若指标集 $I = \{\alpha\}$ 是空集, 则

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = \varnothing, \qquad \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \Omega.$$

注 对集合并的记号 $\bigcup$, 它的下标可以写为 $\bigcup_{\alpha\in I}$ 或 $\bigcup\limits_{\alpha\in I}$, 这仅仅是排版形式的不同, 含义是完全相同的. 对 $\bigcap$, $\sum$, lim 等其他一些符号也有类似的约定.

对于集合运算, 下列性质是基本的:

交换律: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.

结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

分配律: $(A \cup B) \cap C = AC \cup BC$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

De Morgen 法则: $(\bigcup_\alpha A_\alpha)^c = \bigcap_\alpha A_\alpha^c$, $(\bigcap_\alpha A_\alpha)^c = \bigcup_\alpha A_\alpha^c$.

对集合序列 $\{A_n, n \geq 1\}$, 称 $\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{n\geq k} A_n$ 为 $\{A_n, n \geq 1\}$ 的上限点集, 也记为 $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$ 或 $\limsup_{n\to\infty} A_n$, 它由 Ω 中属于无限多个 A_n 的那些元素构成, 即

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n &= \bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{n\geq k} A_n \\ &= \{\omega : \omega \in A_n \text{ 对无限个 } n \text{ 成立}\} \\ &= \{\omega : \forall m, \exists n(\omega) > m, \omega \in A_{n(\omega)}\}.\end{aligned}$$

对集合序列 $\{A_n, n \geq 1\}$, 称 $\bigcup_{k\geq 1}\bigcap_{n\geq k} A_n$ 为 $\{A_n, n \geq 1\}$ 的下限点集, 也记为 $\underline{\lim}_n A_n$ 或 $\liminf_n A_n$, 它由 Ω 中自某个指标 $n_0(\omega)$ 后属于所有 A_n 的那些元素构成.

当 $\underline{\lim}_n A_n = \overline{\lim}_n A_n$ 时, 称 $\{A_n\}$ 有极限, 并记 $\lim_{n\to\infty} A_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$, 称它为 $\{A_n\}$ 的极限.

对 $A\subset\Omega$, 考虑 Ω 上函数

$$I_A(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in A,\\ 0, & \omega\in A^c.\end{cases}$$

I_A 称为集合 A 的示性函数. 集合的运算与示性函数的运算有密切的关系:

$$I_{\bigcup\limits_\alpha A_\alpha}=\bigvee_\alpha I_{A_\alpha}\Big(\bigvee_\alpha I_{A_\alpha}\triangleq\sup_\alpha I_{A_\alpha}\Big),\quad I_{\sum\limits_\alpha A_\alpha}=\sum_\alpha I_{A_\alpha},$$

$$I_{\bigcap\limits_\alpha A_\alpha}=\bigwedge_\alpha I_{A_\alpha}\Big(\bigwedge_\alpha I_{A_\alpha}\triangleq\inf_\alpha I_{A_\alpha}\Big),$$

$$I_{A^c}=1-I_A,$$

$$I_{A-B}=I_A-I_B,$$

$$I_{A\triangle B}=|I_A-I_B|=I_A+I_B(\mathrm{mod}\ 2).$$

命题 1.1.1(首次进入分解) 给定集合 $\{A_i,\ 1\le i\le n\}$, 则

$$\bigcup_{i=1}^n A_j=\sum_{i=1}^n\Big(A_i\setminus\bigcup_{j\le i-1}A_j\Big).\tag{1.1.1}$$

证明 对 $n=1$, (1.1.1) 式是显然的. 若取 $A=\bigcup_{i\le k}A_i$, $B=A_{k+1}$, 则利用 $A\cup B=A+(B\setminus A)$, 便可由 $n=k$ 推出 $n=k+1$ 时 (1.1.1) 式也成立. □

上述命题的直观解释是: 若 $\omega\in A_1\bigcup A_2\bigcup\cdots\bigcup A_n$, 则必有一个最小的 i, 使 $\omega\in A_i$ 而不属于 $A_1,\cdots,A_{i-1}$ 中的任一个. (1.1.1) 式右端边便是对 $\bigcup\limits_{i=1}^n A_i$ 中的元素按每个元素首先属于哪一个 A_i 进行分解.

1.1.2 集类与 σ 域

由 Ω 中子集构成的集合称为集类, 以后常用花体字母 $\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C}$ 等来表示, 而 $\mathscr{P}(\Omega)$ 表示由 Ω 的子集全体 (包括空集 $\varnothing$ 和 Ω) 构成的集类.

定义 1.1.1 $\mathscr{P}(\Omega)$ 的非空子集类 $\mathscr{A}$ 称为域(或代数), 假若它满足:

(1) 若 $A\in\mathscr{A}$, 则 $A^c\in\mathscr{A}$;

(2) 若 $A\in\mathscr{A}$, $B\in\mathscr{A}$ 则 $A\cup B\in\mathscr{A}$.

命题 1.1.2 设 $\mathscr{A}$ 是域, 则

(1) $\Omega\in\mathscr{A}$, $\varnothing\in\mathscr{A}$;

(2) 若 $A, B \in \mathscr{A}$, 则 $AB \in \mathscr{A}$, $A \setminus B \in \mathscr{A}$, $A \triangle B \in \mathscr{A}$;

(3) 若 $A_j \in \mathscr{A}$, $1 \le j \le n$, 则 $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathscr{A}$, $\bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \mathscr{A}$.

证明 (1) 因 $\mathscr{A}$ 非空, 必存在 $A \in \mathscr{A}$, 则 $A^c \in \mathscr{A}$, 且

$$\Omega = A \cup A^c \in \mathscr{A}, \qquad \varnothing = \Omega^c \in \mathscr{A}.$$

(2) $AB = (A^c \cup B^c)^c \in \mathscr{A}$, $A \setminus B = AB^c \in \mathscr{A}$,

$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathscr{A}$.

(3) 由归纳法即得. □

注 与域类似的集类还有环, $\mathscr{P}(\Omega)$ 的非空子类 $\mathscr{R}$ 称为环, 若当 $A \in \mathscr{R}$, $B \in \mathscr{R}$ 时, 则必有 $A \setminus B \in \mathscr{R}$, $A \cup B \in \mathscr{R}$, 即环是关于差、并运算封闭的集类. 容易说明, 若 $\mathscr{A}$ 为域, 则 $\mathscr{A}$ 必为含 Ω 的环. 若 $\mathscr{R}$ 为环, 则 $\varnothing \in \mathscr{R}$, 且它对交、对称差运算是封闭的. 当环 $\mathscr{R}$ 包含 Ω 时, $\mathscr{R}$ 必为域.

例 1.1.1 (1) $\mathscr{P}(\Omega)$ 是一个域;

(2) $\mathscr{A} = \{\varnothing, \Omega\}$ 是一个域;

(3) 若 $\mathscr{C}$ 表示 Ω 的有限子集全体构成的集类, 则 $\mathscr{C}$ 是一个环; 当 Ω 本身是无限集时, $\mathscr{C}$ 不是一个域; 若 $\mathscr{D}$ 是 Ω 中有限子集及其余集全体构成的集类, 则 $\mathscr{D}$ 是一个域;

(4) 直线 $\mathbf{R}$ 上形为 $]a, b]$(a, b 可为无穷) 的区间的有限并的全体为一个域.

注 本书中将分别用 $]\, a, b\, [$, $]\, a, b\,]$, $[\, a, b\, [$ 表示区间 $\{x : a < x < b\}$, $\{x : a < x \le b\}$, $\{x : a \le x < b\}$.

命题 1.1.3 若 $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(\Omega)$, 则必存在包含 $\mathscr{C}$ 的最小域 $\mathscr{A}$, 即 $\mathscr{A}$ 为域, $\mathscr{A} \supset \mathscr{C}$, 且对任一域 $\mathscr{A}' \supset \mathscr{C}$, 必有 $\mathscr{A} \subset \mathscr{A}'$.

证明 首先记 $\mathscr{X}$ 为包含 $\mathscr{C}$ 的域的全体构成的集类, 则因为 $\mathscr{P}(\Omega) \in \mathscr{X}$, 所以 $\mathscr{X}$ 是非空的. 又因为任意个包含 $\mathscr{C}$ 的域的交仍是一个包含 $\mathscr{C}$ 的域 (请按域的定义逐条验证), 所以若取

$$\mathscr{A} = \bigcap_{\mathscr{B} \in \mathscr{X}} \mathscr{B},$$

则 $\mathscr{A}$ 就是所要求的. □

定义 1.1.2 对任一集类 $\mathscr{C}$, 包含 $\mathscr{C}$ 的最小域称为由 $\mathscr{C}$ 张成的域, 记为 $\mathscr{A}(\mathscr{C})$.

Ω 中由单点集全体张成的域就是由 Ω 中有限集及其余集全体构成的集类.

定义 1.1.3 $\mathscr{P}(\Omega)$ 的非空子集类 $\mathscr{S}$ 称为半域(或半代数), 假若它满足:

(1) $\varnothing, \Omega \in \mathscr{S}$;

(2) 当 $A, B \in \mathscr{S}$, 必有 $A \cap B \in \mathscr{S}$;

(3) 若 $A \in \mathscr{S}$, 则 A^c 可表为 $\mathscr{S}$ 中两两互不相交集合的有限并.

易见, 域必为半域.

例 1.1.2 (1) 直线 $\mathbf{R}$ 上形如 $]a,b]$(a, b 可为无穷) 的区间全体构成一个半域.

(2) n 维实空间 $\mathbf{R}^n$ 中, 开、闭及半开半闭矩形体

$$\{(x_1, \cdots, x_n) : a_i < (\leq) x_i < (\leq) b_i,\ 1 \leq i \leq n\}$$

的全体也构成一个半域.

命题 1.1.4 若 $\mathscr{S}$ 为半域, 则

$$\mathscr{A} = \left\{ A = \sum_{i \in I} S_i : \{S_i, i \in I\} \text{为 } \mathscr{S} \text{ 中两两互不相交的有限族} \right\}$$

是包含 $\mathscr{S}$ 的最小域.

证明 首先证明 $\mathscr{A}$ 是一个域. $\mathscr{A}$ 对有限交封闭是明显的. 又若 $A = \sum\limits_{i=1}^{n} S_i \in \mathscr{A}$, 则 $A^c = \bigcap\limits_{i=1}^{n} S_i^c$. 按半域的定义 $S_i^c = \sum\limits_{j=1}^{J_i} S_{ij}$, $S_{ij} \in \mathscr{S}$, 所以

$$A^c = \bigcap_{i=1}^{n} S_i^c = \sum_{j_1=1}^{J_1} \cdots \sum_{j_n=1}^{J_n} \bigcap_{i=1}^{n} S_{ij_i} \in \mathscr{A}.$$

由 De Morgan 法则, $\mathscr{A}$ 对有限并封闭, 即 $\mathscr{A}$ 是一个域. 此外 $\mathscr{A} \supset \mathscr{S}$. 若 $\mathscr{A}'$ 也是一个包含 $\mathscr{S}$ 的域, 则对 $S_i \in \mathscr{S}$, 形为 $A = \sum_{i=1}^{n} S_i$ 的集合必属于 $\mathscr{A}'$, 所以 $\mathscr{A}' \supset \mathscr{A}$, 即 $\mathscr{A}$ 是最小的. □

一般地, 由一个集类 $\mathscr{C}$ 生成一个域时可先由本章习题 9 的方法生成一个包含 $\mathscr{C}$ 的半域 $\mathscr{S}$, 以后再由 $\mathscr{S}$ 按命题 1.1.4 的方法构造 $\mathscr{A}(\mathscr{S})$.

定义 1.1.4 $\mathscr{P}(\Omega)$ 的非空子集类 $\mathscr{F}$ 称为 σ 域(或 σ 代数), 假若它满足

(1) 若 $A \in \mathscr{F}$, 则 $A^c \in \mathscr{F}$;

(2) 若对每个 $n \geq 1$, $A_n \in \mathscr{F}$, 则有 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$.

命题 1.1.5 若 $\mathscr{F}$ 为 σ 域, 则 $\mathscr{F}$ 为一个域, 且当 $n\geq 1$, $A_n\in\mathscr{F}$ 时, 必有 $\bigcap_{n\geq 1}A_n\in\mathscr{F}$, $\underline{\lim}_{n\to\infty}A_n\in\mathscr{F}$, $\overline{\lim}_{n\to\infty}A_n\in\mathscr{F}$.

证明 若 $A,B\in\mathscr{F}$,

$$A\cup B=A\cup B\cup B\cup B\cup\cdots\in\mathscr{F}.$$

所以 $\mathscr{F}$ 是一个域. 又

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n^c\right)^c\in\mathscr{F},$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n\in\mathscr{F},$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}.$$ □

注 与 σ 域类似的集类还有 σ 环. $\mathscr{P}(\Omega)$ 的非空子类 $\mathscr{C}$ 称为 σ 环, 若它满足:

(1) 若 $A\in\mathscr{C}$, $B\in\mathscr{C}$, 则 $A\setminus B\in\mathscr{C}$;

(2) 若对 $n\geq 1$, $A_n\in\mathscr{C}$, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{C}$.

容易说明, $\mathscr{F}$ 为 σ 域的充要条件是 $\mathscr{F}$ 为一个包含 Ω 的 σ 环. 在 σ 环中, 对可列集合序列的交运算, 上限、下限运算也是封闭的.

命题 1.1.6 若 $\mathscr{C}\subset\mathscr{P}(\Omega)$, 则必存在包含 $\mathscr{C}$ 的最小 σ 域.

证明 同命题 1.1.3. □

例 1.1.3 (1) $\mathscr{P}(\Omega)$ 是一个 σ 域;

(2) $\mathscr{F}=\{\varnothing,\Omega\}$ 是一个 σ 域;

(3) 若 $\mathscr{C}$ 表示 Ω 的有限或可列子集全体构成的集类, 则 $\mathscr{C}$ 是一个 σ 环; 若 Ω 本身不是可列集, 则 $\mathscr{C}$ 不是 σ 域; 若 $\mathscr{F}$ 表示 Ω 中有限或可列子集及其余集全体构成的集类, 则 $\mathscr{F}$ 是一个 σ 域; 它是包含 Ω 中一切单点集的最小 σ 域.

定义 1.1.5 包含集类 $\mathscr{C}$ 的最小 σ 域称为由 $\mathscr{C}$ 生成的 σ 域, 记为 $\sigma(\mathscr{C})$.

命题 1.1.7 对 Ω 的子集类 $\mathscr{C}$, 若以 $\mathscr{C}\cap A$ 表示集类 $\{BA:B\in\mathscr{C}\}$, 则

$$\sigma_{\Omega}(\mathscr{C})\cap A=\sigma_A(\mathscr{C}\cap A),$$

这里 $\sigma_A(\mathscr{C}\cap A)$ 表示将 $\mathscr{C}\cap A$ 看为 $\mathscr{P}(A)$ 的子类在 A 上生成的 σ 域.

证明 首先, $\sigma_\Omega(\mathscr{C})\cap A\supset\mathscr{C}\cap A$, 又 $\sigma_\Omega(\mathscr{C})\cap A$ 是 A 上的一个 σ 域(需按定义逐项验证), 故 $\sigma_\Omega(\mathscr{C})\cap A\supset\sigma_A(\mathscr{C}\cap A)$. 反之, 令

$$\mathscr{D}=\{B\in\mathscr{P}(\Omega):B\cap A\in\sigma_A(\mathscr{C}\cap A)\},$$

则 $\mathscr{D}\supset\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ 也是 Ω 上一个 σ 域(也需逐项验证), 故 $\mathscr{D}\supset\sigma_\Omega(\mathscr{C})$, 即 $\sigma_\Omega(\mathscr{C})\bigcap A\subset\sigma_A(\mathscr{C}\bigcap A)$. 由此命题成立. □

命题 1.1.8 若 $\mathbf{R}=]-\infty,\infty[$ 表示数直线, 则下列集类生成相同的 σ 域:

(1) $\{]a,b]:a,b\in\mathbf{R}\}$;

(2) $\{]a,b[:a,b\in\mathbf{R}\}$;

(3) $\{[a,b]:a,b\in\mathbf{R}\}$;

(4) $\{]-\infty,b]:b\in\mathbf{R}\}$;

(5) $\{]r_1,r_2[:r_1,r_2$ 为有理数$\}$;

(6) $\{G:G$ 为 $\mathbf{R}$ 中开集$\}$;

(7) $\{F:F$ 为 $\mathbf{R}$ 中闭集$\}$.

证明 由于 $]a,b]=\bigcap_n]a,b+1/n[$, $]a,b[=\bigcup_n]a,b-1/n]$, 所以 (1),(2) 中的集类生成相同的 σ 域. 同样 (1),(3) 中的集类亦生成形同的 σ 域. 此外, 由

$$]-\infty,b]=\bigcup_n]-n,b],\qquad]a,b]=]-\infty,b]\backslash]-\infty,a],$$

(1),(4) 中的集类生成相同的 σ 域.由 $]a,b[=\bigcup\limits_{a<r_1<r_2<b}]r_1,r_2[$ 可知 (2),(5) 中的集类生成相同的 σ 域. 由于 $\mathbf{R}$ 中任一开集可表为至多可列个开区间的并, 故 (2),(6) 中的集类生成相同的 σ 域. 利用开集的余集为闭集, 可得 (6),(7) 中的集类生成相同的 σ 域. □

定义 1.1.6 数直线 $\mathbf{R}$ 或广义数直线 $\overline{\mathbf{R}}$ 上由开集全体产生的 σ 域称为直线上的 Borel 域, 记为 $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$ 或 $\mathscr{B}$. $\mathscr{B}$ 中的集称为一维 Borel 集.

一般地, 若 E 为拓扑空间, $\mathscr{B}_E$ 为 E 中开集全体生成的 σ 域, 这一 σ 域就称为 E 上的 Borel 域, $\mathscr{B}_E$ 中的集称为 E 中的 Borel 集. n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中的 Borel