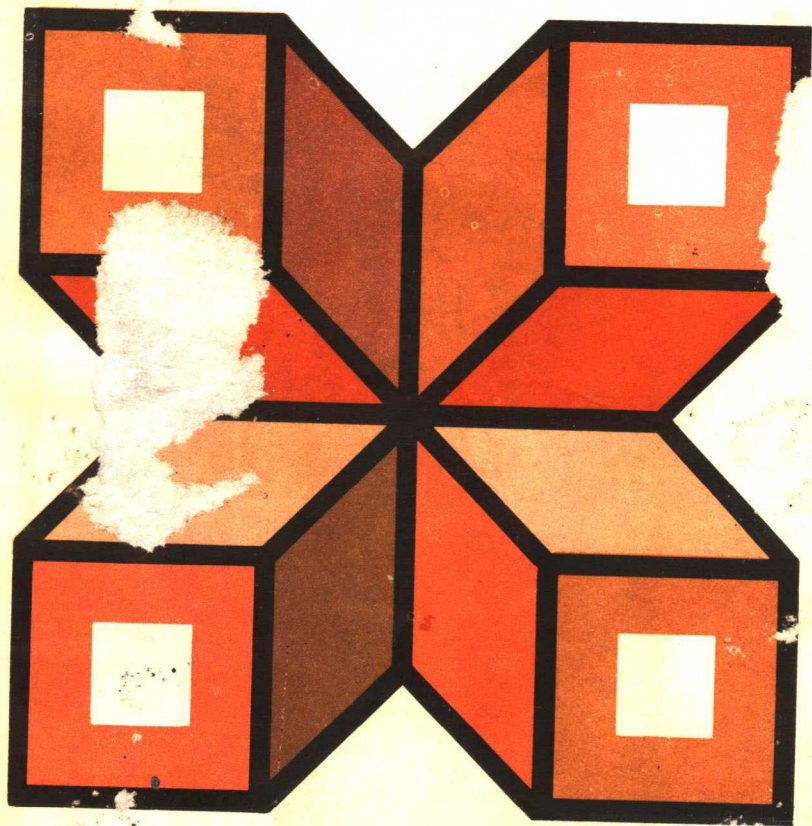


详解

中学数学公式集

第 2 集



黑龙江人民出版社

详 解
中学数学公式集

第 2 集

[日] 榎本昌彦 著
蔡沛生 洪永祥 译

黑龙江人民出版社

1981年·哈尔滨

くわしく わかる
中学二年数学公式集
——応用と活用——
むさし書房版

责任编辑：汤 潮

校 订：白景凯

详解中学数学公式集

第 2 集

〔日〕榎本昌彦 著 蔡沛生 洪永祥 译

黑 龙 江 人 民 出 版 社 出 版

（哈尔滨市道里森林街42号）

黑 龙 江 新 华 印 刷 厂 印 刷 黑 龙 江 省 新 华 书 店 发 行

开本 787×1092毫米 1/32·印张 3·字数 56,700

1981年7月第1版

1981年7月第1次印刷

印数 1—105,900

统一书号：13093·44

定价：0.24元

目 录

第一章 式子的计算

1—1 代数式	1	1—4 多项式与单项式的 计算	7
1—2 多项式的加法与 减法	3	1—5 式子的应用	9
1—3 单项式的乘法与 除法	5	1—6 等式的变换	10

第二章 不 等 式

2—1 不等式的解	11	2—5 较复杂不等式的 解法	15
2—2 不等式的性质	12	2—6 一次联立不等式	17
2—3 不等式的解法	13	2—7 不等式的应用	19
2—4 一次不等式及其解法 ..	14		

第三章 联立方程式

3—1 二元一次方程式	21	3—5 各种类型的联立 方程式	27
3—2 二元一次联立方程式 ..	22	3—6 三元一次联立 方程式	29
3—3 二元一次联立方程式 的解法(代入法)	23	3—7 联立方程式的 应用	31
3—4 二元一次联立方程式 的解法(加减法和 比较法)	25		

第四章 一 次 函 数

4—1 一次函数	33	4—5 二元一次方程式的 图象	39
4—2 一次函数的图象(1)	35	4—6 方程式的解和图象	41
4—3 一次函数的图象(2)	36		
4—4 一次函数的确定	37		

第五章 图形的基础

5—1 平行移动	43	5—8 角与平行线	51
5—2 回转移移动	44	5—9 三角形的边与角	53
5—3 点对称移动	45	5—10 多边形的边与角	54
5—4 对称移动	46	5—11 三角形全等的条件	56
5—5 命题及逆命题	47	5—12 三角形全等条件的 应用	58
5—6 论证	49		
5—7 定理和证明	50		

第六章 三角形和四边形

6—1 等腰三角形	60	6—6 各种四边形	69
6—2 等边三角形	62	6—7 中位线定理	71
6—3 直角三角形	63	6—8 三角形的内心	73
6—4 平行四边形(1)	65	6—9 三角形的外心	75
6—5 平行四边形(2)	67	6—10 三角形的重心	77

第七章 相似

7—1 相似的图形	79	7—4 三角形角的平分线	85
7—2 三角形相似的条件	81	7—5 证题的步骤	86
7—3 平行线与线段的比	83		

第八章 统计

8—1 频数分布与直方图	87	8—3 累积频数	90
8—2 相对频数	89	8—4 代表值和范围	91

第一章 式子的计算

1-1 代数式

【1】 代数式

用字母表示各种数量关系的式子叫代数式。在代数式中，省略“ $\times$ ”、“ $+$ ”运算符号。

【2】 单项式与多项式

① **单项式** 象 $-a^2$ 、 $\frac{1}{2}xy$ 与 $6pq$ 这样，对于字母只含有乘法运算的式子叫做单项式。

② **多项式** 象 $2a+b$ 、 x^2-5x+6 这样，由若干个单项式之和所表示的式子叫做多项式。组成多项式的各个单项式叫做该多项式的项。

例 $3m-4n$ 的项是 $3m$ 与 $-4n$ 。

③ **常数项** 在多项式的项中，把单独由数字组成的项叫做常数项。

例 $6a-4b+8$ 的常数项是 8。

【3】 系数和次数

① **系数** 在 $4xy$ 、 $5a^2b$ 、 $-3pq$ 等单项式中，把 4、5、 -3 这样的数字部分叫做系数。

② **次数** 单项式 $8m^2n$ 的字母部分是 $m \times m \times n$ 三个字母的乘积。这个相乘字母的个数就叫做该单项式的次数。

③ **多项式的次数** 在一个多项式中，哪一项的次数最高，就把该项的次数做为这个多项式的次数。

例 多项式 $5x^2-4x+7$ 的次数是 2 次。

【应用】 1 写出下列数量关系的表达式。

① 一个长方形的宽是 $a\text{ cm}$ ，长是宽的三倍。写出该长方形面积的表达式。

② 两地相距 $x\text{ km}$ 。某人以 v 公里的时速走了两小时。写出其剩下路程的表达式。

③ 单价为 a 元的物品买 5 个，单价为 b 元的物品买 1 个。写出应付货款的表达式。

解法 ① 因为长是 $3a\text{ cm}$ ，所以其面积是 $a \times 3a = 3a^2(\text{cm}^2)$ 。

② 因为已走过的路程是 $2v\text{ km}$ ，所以剩下的路程是 $(x - 2v)\text{ km}$ 。

③ $(5a + b)$ 元。

→【1】

2 指出下列多项式的项。

① $4x - 3y + 8z$ ② $m^2n + 3mn^2 - 10mn$

解法 ① 因为 $4x - 3y + 8z = 4x + (-3y) + 8z$ ，所以它的项分别是 $4x$ 、 $-3y$ 、 $8z$ 。

② 同理， $m^2n + 3mn^2 - 10mn$ 的项是 m^2n 、 $3mn^2$ 、 $-10mn$ 。

→【2】②

3 指出下列单项式的系数和次数。

① $6xy$ ② $\frac{1}{2}a^2b$ ③ $-a^5$

解法 ① 系数是 6，次数是 2 次。

② 系数是 $\frac{1}{2}$ ，次数是 3 次。

③ 系数是 -1，次数是 5 次。

→【3】①②

4 指出下列多项式各项的系数和多项式的次数。

① $3x^2 + 4x - 1$ ② $-\frac{2}{3}ab^2 + 6a^2 - 8ab$

解法 ① 各项的系数分别是 3、4，多项式的次数是 2 次。

② 各项的系数分别是 $-\frac{2}{3}$ 、6、-8，多项式的次数是 3 次。

→【3】③①

5 单项式 $7a^2b^3$ 的次数是多少次？而其字母 b 是多少次？

解法 $7a^2b^3$ 的次数是 5 次，字母 b 的次数是 3 次。

1—2 多项式的加法与减法

【1】 同类项

当多项式是象 $6x - 3y + 8x + y$ 这样的多项式时，就把 $6x$ 和 $8x$ 、 $-3y$ 和 y 这种字母部分完全相同的项叫做同类项。

【2】 同类项的合并

应用分配律 $pa + qa = (p + q)a$ ，可以把同类项合并为一项。

$$\begin{aligned}\text{例 } 2x + 6y + 3x - 8y \\ &= 2x + 3x + 6y - 8y \\ &= (2 + 3)x + (6 - 8)y \\ &= 5x - 2y\end{aligned}$$

【3】 多项式的加减

- ① 先把每个式子加上括号，然后用“+”、“-”符号把它们连结起来。
- ② 去括号。
 - Ⓐ 如果括号前面是“+”号，去括号时，括号内各项不变。
 - Ⓑ 如果括号前面是“-”号，去括号时，括号内的各项要改变符号。
- ③ 合并同类项。

【4】 竖式计算

把同类项竖方向对齐之后进行计算。如果是减法，就改变减式中各项的符号，把减法变成加法进行计算。

$$\begin{array}{r} \text{例 } a^2 - 4a + 3 \\ +) 3a^2 + 2a - 7 \\ \hline 4a^2 - 2a - 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6x - 8y \\ -) 3x - 7y \rightarrow +) - 3x + 7y \\ \hline 3x - y \end{array}$$

【应用】 1 指出下列各式的同类项。

① $p - 6pq + 4p - 2pq$ ② $a - b + c - 6a + 3b$

解法 ① p 与 $4p$ 、 $-6pq$ 与 $-2pq$

② a 与 $-6a$ 、 $-b$ 与 $3b$ →【1】

2 合并下列各式的同类项。

① $-8ab + \frac{2}{3}ab$ ② $a^2 - 5a + 3 - 8a^2 + 3a - 2$

解法 ① 原式 = $\left(-8 + \frac{2}{3}\right)ab = -\frac{22}{3}ab$

② 原式 = $a^2 - 8a^2 - 5a + 3a + 3 - 2 = (1 - 8)a^2 + (-5 + 3)a + (3 - 2) = -7a^2 - 2a + 1$ →【1】

3 求 $6a^2 - 3a + 8$ 与 $2a^2 + 5a - 4$ 之和。

解法 原式 = $(6a^2 - 3a + 8) + (2a^2 + 5a - 4)$
 $= 6a^2 - 3a + 8 + 2a^2 + 5a - 4$
 $= 8a^2 + 2a + 4$ →【3】

4 求 $3x^3 - 2x^2 - x + 8$ 减 $4x^3 - 5x^2 + 8x - 2$ 之差。

解法 原式 = $(3x^3 - 2x^2 - x + 8) - (4x^3 - 5x^2 + 8x - 2)$
 $= 3x^3 - 2x^2 - x + 8 - 4x^3 + 5x^2 - 8x + 2$
 $= -x^3 + 3x^2 - 9x + 10$ →【3】

5 计算下列各式。

① $5a^2 - 6ab + 3b^2$ ② $4x^2 - 8x - 7$
 $+) - 3a^2 + 4ab - 7b^2$ $-) 7x^2 - 12x + 3$

解法 ① $5a^2 - 6ab + 3b^2$ ② $4x^2 - 8x - 7$
 $+) - 3a^2 + 4ab - 7b^2$ $+) - 7x^2 + 12x - 3$
 $2a^2 - 2ab - 4b^2$ $- 3x^2 + 4x - 10$

→【4】

1—3 单项式的乘法与除法

【1】 单项式的乘除

① 乘法 把系数的积乘以字母的积。

$$\begin{aligned}\text{例 } 5a \times 3bc &= 5 \times 3 \times a \times b \times c \\ &= 15abc\end{aligned}$$

② 除法 先写成分数形式，然后进行约分，或者用被除数乘以除数的倒数。

$$\begin{aligned}\text{例 } 9xy \div 6x &= \frac{1}{3}a^2b \div \left(-\frac{5}{6}a\right) \\ &= \frac{9xy}{6x} = \frac{1}{3}a^2b \times \left(-\frac{6}{5a}\right) \\ &= \frac{\overset{3}{\cancel{9}} \times \overset{1}{\cancel{x}} \times y}{\underset{2}{\cancel{6}} \times \underset{1}{\cancel{x}}} = -\frac{\overset{a}{1} \times \overset{2}{a^2} \times b \times \underset{1}{\cancel{6}}}{\underset{1}{3} \times \underset{1}{5a}} \\ &= \frac{3y}{2} = -\frac{2ab}{5}\end{aligned}$$

【2】 指数法则

象 a^3 、 a^5 这样的同底数幂的积或商的计算，其底数不变，指数相加或相减。

$$\begin{aligned}\text{例 } a^2 \times a^3 &= (a \times a) \times (a \times a \times a) \\ &= a^5 \\ &= a^5 \div a^2 \\ &= (a \times a \times a \times a \times a) \div (a \times a) \\ &= a^3\end{aligned}$$

若 m 、 n 为正整数，则下列法则成立。

$$\begin{aligned}\text{① } a^m \times a^n &= a^{m+n} \\ \text{② } (a^m)^n &= a^{mn} \\ \text{③ } (ab)^m &= a^m b^m \\ \text{④ } a^m \div a^n &= a^{m-n} (m > n) \\ a^m \div a^n &= 1 \quad (m = n) \\ a^m \div a^n &= \frac{1}{a^{n-m}} (m < n)\end{aligned}$$

【应用】 1 计算下列各式。

$$\textcircled{A} \left(-\frac{2}{3}xy\right) \times \frac{3}{4}x \quad \textcircled{B} \frac{5}{6}a \times (-12b^2)$$

解法 $\textcircled{A}$ 原式 $= -\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times x \times y \times x = -\frac{1}{2}x^2y$

$$\textcircled{B} \text{ 原式} = \frac{5}{6} \times (-12) \times a \times b^2 = -10ab^2 \quad \rightarrow \text{【1】}\textcircled{1}$$

2 计算下列各式。

$$\textcircled{A} 12xy \div \left(-\frac{4}{5}y\right) \quad \textcircled{B} \left(-\frac{4}{3}mn\right) \div \left(-\frac{5}{6}m^2\right)$$

解法 $\textcircled{A}$ 原式 $= 12xy \times \left(-\frac{5}{4y}\right) = -15x$

$$\textcircled{B} \text{ 原式} = \frac{4mn \times 6}{3 \times 5m^2} = \frac{8n}{5m} \quad \rightarrow \text{【1】}\textcircled{2}$$

3 计算下列各式。

$$\textcircled{A} 3xy \times (-8x) \div 12y$$

$$\textcircled{B} -\frac{3}{4}a \div \frac{1}{6}b \times \left(-\frac{2}{3}ab\right)$$

解法 $\textcircled{A}$ 原式 $= -\frac{3xy \times 8x}{12y} = -2x^2$

$$\textcircled{B} \text{ 原式} = \frac{3a \times 6 \times 2ab}{4 \times b \times 3} = 3a^2 \quad \rightarrow \text{【1】}\textcircled{1}\textcircled{2}$$

4 计算下列各式。

$$\textcircled{A} a \times a^2 \times a^3 \quad \textcircled{B} (3ab^2)^2 \quad \textcircled{C} (-x^3)^2$$

解法 $\textcircled{A}$ a^6 $\textcircled{B}$ $9a^2b^4$ $\textcircled{C}$ x^6 $\rightarrow \text{【2】}\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3}$

5 进行下列计算。

$$\textcircled{A} a^2 \div a^3 \quad \textcircled{B} p^2 \times p^3 \div p^4 \quad \textcircled{C} (-a^3) \div (-a)^4$$

解法 $\textcircled{A}$ 原式 $= \frac{a^2}{a^3} = \frac{1}{a}$

$$\textcircled{B} \text{ 原式} = \frac{p^2 \times p^3}{p^4} = \frac{p^5}{p^4} = p$$

$$\textcircled{C} \text{ 原式} = -a^3 \div a^4 = -\frac{a^3}{a^4} = -\frac{1}{a} \quad \rightarrow \text{【2】}$$

1—4 多项式与单项式的计算

【1】 多项式与单项式的乘法

- ① **多项式 $\times$ 单项式** 应用分配律 $a(b+c)=ab+ac$ 脱去括号。

例 $2a(3a-4b) = 2a \times 3a + 2a \times (-4b)$
 $= 6a^2 - 8ab$

- ② **多项式 $\div$ 单项式** 把多项式的每一项都除以该单项式，或者应用分配律把多项式的每一项都乘以除数的倒数。

例 $(12x^2 - 9x) \div 6x$ $(8a - 6ab) \div \frac{4}{3}b$

$$\begin{aligned} &= 12x^2 \div 6x - 9x \div 6x &= (8a - 6ab) \times \frac{3}{4b} \\ &= \frac{12x^2}{6x} - \frac{9x}{6x} &= \frac{8a \times 3}{4b} - \frac{6ab \times 3}{4b} \\ &= 2x - \frac{3}{2} &= \frac{6a}{b} - \frac{9a}{2} \end{aligned}$$

【2】 四则混合计算

计算顺序

- ① 先计算乘法与除法。
② 对于带有括号的式子，要先计算括号内的。若括号是两重以上时，就从最里边的括号开始计算。
③ 去括号，合并同类项。

例 $3x - 4y - \{x - 2(3x + y)\}$

$$\begin{aligned} &= 3x - 4y - (x - 6x - 2y) \\ &= 3x - 4y - (-5x - 2y) \\ &= 3x - 4y + 5x + 2y \\ &= 8x - 2y. \end{aligned}$$

【应用】 1 进行下列计算。

$$\textcircled{A} -2m(m-6n) \quad \textcircled{B} (4x-12y) \times \left(-\frac{3}{4}x\right)$$

解法 $\textcircled{A}$ 原式 $= -2m \times m - 2m \times (-6n) = -2m^2 + 12mn$

$$\textcircled{B} \text{ 原式} = 4x \times \left(-\frac{3}{4}x\right) - 12y \times \left(-\frac{3}{4}x\right) = -3x^2 + 9xy$$

→【1】①

2 进行下列计算。

$$\textcircled{A} (4ab-18a^2) \div 6a \quad \textcircled{B} \left(\frac{3}{2}p^2 - \frac{1}{4}p\right) \div \left(-\frac{1}{6}p\right)$$

解法 $\textcircled{A}$ 原式 $= \frac{4ab}{6a} - \frac{18a^2}{6a} = \frac{2}{3}b - 3a$

$$\textcircled{B} \text{ 原式} = \frac{3p^2}{2} \times \left(-\frac{6}{p}\right) - \frac{1}{4}p \times \left(-\frac{6}{p}\right) = -9p + \frac{3}{2} \rightarrow \text{【1】}\textcircled{2}$$

3 进行下列计算。

$$\textcircled{A} 2(4a-3b) - 3(2b+3a)$$

$$\textcircled{B} 3x^2 - 4x + 7 - \{6 - x(3x+1)\}$$

$$\textcircled{C} -2m(m-3n) + (12m^3 - 8m^2n) \div (-4m)$$

解法 $\textcircled{A}$ 原式 $= 8a - 6b - 6b - 9a = -a - 12b$

$$\textcircled{B} \text{ 原式} = 3x^2 - 4x + 7 - (6 - 3x^2 - x) \\ = 3x^2 - 4x + 7 - 6 + 3x^2 + x = 6x^2 - 3x + 1$$

$$\textcircled{C} \text{ 原式} = -2m^2 + 6mn - 3m^2 + 2mn = -5m^2 + 8mn \rightarrow \text{【2】}$$

4 进行下列计算。

$$\textcircled{A} \frac{1}{2}(3x-4y) - \frac{2}{3}(x+6y)$$

$$\textcircled{B} \frac{3a^2-2a+3}{4} - \frac{2a^2+3a-1}{3}$$

解法 $\textcircled{A}$ 原式 $= \frac{3}{2}x - 2y - \frac{2}{3}x - 4y = \frac{5}{6}x - 6y$

$$\textcircled{B} \text{ 原式} = \frac{3(3a^2-2a+3) - 4(2a^2+3a-1)}{12} \\ = \frac{9a^2-6a+9-8a^2-12a+4}{12} \\ = \frac{a^2-18a+13}{12}$$

→【2】

1—5 式子的应用

【1】 应用代数式证题

- ① 关于证明一个三位的自然数，只要其各个数位的数字之和是9的倍数，这个三位的自然数就是9的倍数。

设百位上的数字为 a ，十位上的数字为 b ，个位上的数字为 c ，那么，这个三位的自然数就可以用 $100a+10b+c$ 来表示。

$$100a+10b+c=99a+9b+(a+b+c)$$

根据题意，由于 $a+b+c$ 是9的倍数，所以假设

$a+b+c=9n$ (n 是自然数) 的话，上面的等式就可以化成

$$\begin{aligned} 100a+10b+c &= 99a+9b+9n \\ &= 9(11a+b+n) \end{aligned}$$

证明该数是9的倍数。

- ② 关于连续的三个自然数之和是3的倍数的证明。

设中间的自然数为 n ，那么这三个自然数就可以用 $n-1$ 、 n 、 $n+1$ 来表示。

因为 $(n-1)+n+(n+1)=3n$ ，所以，该数是3的倍数。

【应用】 设最小的自然数为 n ，证明[1]中的②。

解法 三个自然数可以用 n 、 $n+1$ 、 $n+2$ 来表示。

$$\begin{aligned} \text{因为 } n+(n+1)+(n+2) &= 3n+3 \\ &= 3(n+1), \end{aligned}$$

所以证明连续的三个自然数是3的倍数。

→【1】②

1—6 等式的变换

【1】 等式的变换

在顶角为 α° 、一个底角为 b° 的等腰三角形中，下列关系成立。

$$\alpha + 2b = 180$$

变换这一等式，可以导出

$$b = 90 - \frac{1}{2}\alpha$$

象这样，把原等式 $\alpha + 2b = 180$ 进行变换导出

$b = 90 - \frac{1}{2}\alpha$ ，叫做把原等式对 b 求解。

【2】 比例式的性质

当 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 时，下列关系成立。

$$\textcircled{1} \quad ad = bc \quad \textcircled{2} \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ (更比)}$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \text{ (合比)}$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \text{ (分比)}$$

$$\textcircled{5} \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \text{ (合分比)}$$

【应用】 指出怎样由 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 导出 [2] 中的 $\textcircled{3}$ 。

解法 在 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 的两边加 1，则得 $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$ ，再把此等

式两边分别通分，就导出了 [2] 中的 $\textcircled{3}$ 。即

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

第二章 不 等 式

2—1 不等式的解

【1】 不等式

象 $3x-1>9$ 这样，把两个式子的大小关系用不等号表示的式子叫做不等式。

【2】 不等式的解

使不等式成立的未知数的值叫做不等式的解。

例 在不等式 $2x-1>8$ 中， $x=5$ 是这个不等式的解，但 $x=4$ 就不是这个不等式的解。

【3】 解不等式

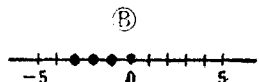
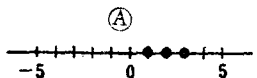
求不等式的所有解的过程叫做解不等式。

例 当 x 的变域为 $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 时，解不等式 $3x+2<5$ ，则得 $-1, 0$ ，因此解的集合是 $\{-1, 0\}$ 。

【应用】 1 当 x 的变域为 $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ 时，解下列不等式，并在数轴上表示出其解的集合。

① $5x+8>9$ ② $8x-3\leq-3$

解法 ①的解为 $1, 2, 3$ ，②的解为 $-3, -2, -1, 0$ 。把其解表示在数轴上时，则如下图所示。 →【1】【3】



2 下列哪个不等式的解是 $-\frac{2}{3}$?

① $4x+1\leq 5$ ② $-x+3>2$ ③ $6<1-3x$

解法 把 $-\frac{2}{3}$ 代入每个不等式，哪个不等式成立，它就是哪个不等式的解。①、② →【2】

2—2 不等式的性质

【1】 不等式的性质

- ① 不等式的两边加上同一个数，不等号的方向不变。

如果 $A > B$ ，则 $A + C > B + C$ 。

- ② 不等式的两边减去同一个数，不等号的方向不变。

如果 $A > B$ ，则 $A - C > B - C$ 。

- ③ 不等式的两边乘以或除以同一个正数，不等号的方向不变。如果 $A > B$ 、 $C > 0$ 时，则

$$A \times C > B \times C; A \div C > B \div C。$$

- ④ 不等式的两边乘以或除以同一个负数，不等号的方向改变。如果 $A < B$ 、 $C < 0$ 时，则

$$A \times C > B \times C; A \div C > B \div C。$$

【应用】 1 当 $a < b < 0$ 时，用不等号表示出下列各题中两个数的关系。

① $a - 3$ $b - 3$ ② $-3a$ $-3b$

解法 ① 根据不等式的性质②，得 $a - 3 < b - 3$ 。

② 根据不等式的性质④，得 $-3a > -3b$ 。 $\rightarrow$ 【1】②④

2 在下列不等式中，哪些是表示相同关系的？

① $A > B$ ② $A - B < 0$

③ $A - B > 0$ ④ $A < B$

解法 ①与③ ②与④。

$\rightarrow$ 【1】①②