初中数学竞赛题集解

（1980——1985）

胡礼祥　何恩田编　胡炳生审校

中國展望出版社

初中数学竞赛题集解

(1980—1985)

胡礼祥　何恩田编

胡炳生　审校

中国展望出版社

一九八五年·北京

内 容 提 要

本书精选了1980—1985年全国各省、市、自治区初中数学竞赛题，并作了解答或提示。可供初、高中学生学习数学和准备数学竞赛之用。

初中数学竞赛题集解（1980—1985）
胡礼祥 何恩田编 胡炳生审校
中国展望出版社出版
（北京西城区太平桥大街1号）
安徽师范大学印刷厂印刷
北京新华书店发行

开本787×1092毫米1/32 6印张
125千字 1985年11月北京第1版
第1次印刷 1—15000册

统一书号：7271·101 定价：1.00元

前　言

中学生数学竞赛，对于开发青少年智力，提高中学数学教学水平，有着重要的意义和作用。1984年11月中国数学会“宁波会议”决定，在原有高中数学竞赛的基础上，从1985年起，每年春季举行全国省、市、自治区联合初中数学竞赛。这个决定掀起了全国各地中学生参加数学竞赛的热潮。

为了适应广大初中学生学习和参加数学竞赛的需要，我们将最近几年我国各地初中数学竞赛优秀试题汇集成册，并作了解答或提示，供大家学习参考。

编　者　1985.8.

目　录

附录

一九八五年省市自治区联合初中数学竞赛试题及解答

一、选择题

本题共有6个小题。每一小题都给出了以(A)，(B)，(C)，(D)为代号的四个答案，其中只有一个答案是正确的。请将正确的答案用代号填在各题的方括号内。

1．设 $ABCD$ 为圆内接四边形，现在给出四个关系式

(1) $\sin A=\sin C$；　　(2) $\sin A+\sin C=0$；

(3) $\cos B+\cos D=0$；　　(4) $\cos B=\cos D$.

其中总能成立的关系式的个数是

(A)一个．　(B)两个．　(C)三个．

(D)四个．　　（江西提供）

答〔　　〕

2．若 n 是大于1的整数，则

$$p=n+(n^2-1)^{\frac{1-(-1)^n}{2}}$$ 的值

(A) 一定是偶数．　(B) 一定是奇数．

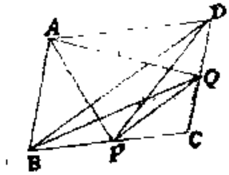
(C) 是偶数但不是2．

(D) 可以是偶数也可以是奇数．　（湖北提供）

答〔　　〕

3．在平行四边形 $ABCD$ 中，P 为 BC 的中点，过 P 作

BD 的平行线交 CD 于 Q，连 PA、PD、QA、QB，则图中与 ΔABP 面积相等的三角形，除 ΔABP 外还有



(A)三个.　　(B)四个.

(C)五个.　　(D)六个.

（湖北提供）

答〔　　〕

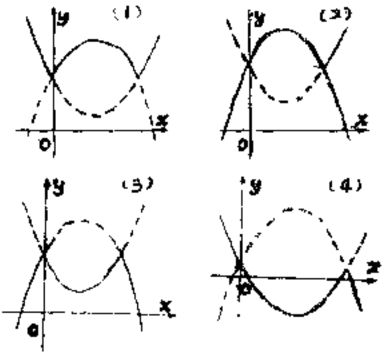
4．函数 $y=1-|x-x^2|$ 的图象大致形状是

(A)图 1 中的实线部分.

(B)图 2 中的实线部分.

(C)图 3 中的实线部分.

(D)图 4 中的实线部分.



（湖北提供）

答〔　　〕

5．〔x〕表示取数 x 的整数部分，例如 $\left[\frac{15}{4}\right]=3$，若

$$y=4\left(\frac{x+[u]}{4}-\left[\frac{x+[u]}{4}\right]\right)$$

且当 $x=1$，8，11，14 时　　$y=1$；

$x=2$，5，12，15 时　　$y=2$；

$x=3$，6，9，16 时　　$y=3$；

$x=4$，7，10，13 时　　$y=0$，

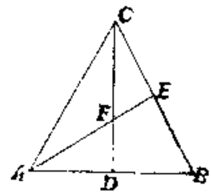
则表达式中的 u 等于

(A) $\frac{x+2}{4}$.　　(B) $\frac{x+1}{4}$.　　(C) $\frac{x}{4}$.

(D) $\frac{x-1}{4}$.　　　　　　　　　　(北京提供)

答〔　　〕

6. 如图，在等腰ΔABC中，CD是底边AB上的高，E是腰BC的中点，AE交CD于F. 现在给出三条路线：



(a) $A\to F\to C\to E\to B\to D\to A$;

(b) $A\to C\to E\to B\to D\to F\to A$;

(c) $A\to D\to B\to E\to F\to C\to A$;

设它们的长度分别是$L(a)$，$L(b)$，$L(c)$. 那么下列三种关系式：

$L(a)<L(b)$，　$L(a)<L(c)$，　$L(b)<L(c)$.

中，一定能够成立的个数是：

(A) 0个.　(B) 1个.　(C) 2个.　(D) 3个.

(河南提供)

答〔　　〕

二、填空题

请将正确的结果填入"______"格内.

1. 设$a-b=2+\sqrt{3}$，$b-c=2-\sqrt{3}$，则$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$的值为______.　(云南提供)

2. 设方程$x^2-402x+k=0$的一根加3，即为另一根的80倍. 那么$k=$______.

(广东提供)

3. 有甲、乙、丙三种货物.若购甲3件，乙7件，丙1件，共需3.15元．若购甲4件，乙10件，丙1件共需4.20元，现在购甲、乙、丙各1件共需＿＿＿＿元．

（湖北提供）

4. 不等式 $42x^2+ax<a^2$ 的解为＿＿＿＿．

（辽宁提供）

5. 已知 x（$x\neq 0$，± 1）和1两个数，如果只许用加法，减法，1作被除数的除法三种运算（可以使用括号），经过六步算出 x^2，那么计算的表达式是＿＿＿＿．

（安徽提供）

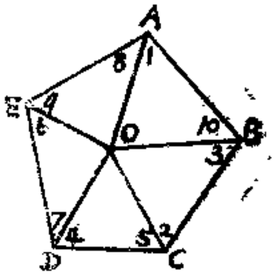
6. 在正实数集上定义一个运算 $*$，其规则为：

当 $a\geqslant b$ 时，$a*b=b^3$；当 $a<b$ 时，$a*b=b^2$

根据这个规则，方程 $3*x=27$ 的解是＿＿＿＿．

（湖北提供）

三



如图，O 为凸五边形 $ABCDE$ 内一点，且

$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，

$\angle 5=\angle 6$，$\angle 7=\angle 8$，

求证：$\angle 9$ 与 $\angle 10$ 相等或互补．

（安徽提供）

四

$\odot O_1$、$\odot O_2$ 外切于 A，半径分别为 r_1 和 r_2；PB、PC 分别为两圆的切线，B、C 为切点；$PB:PC=r_1:r_2$；PA 交 $\odot O_2$ 于 E 点．

求证　$\triangle PAB\backsim\triangle PEC$．

（天津提供）

五

有一长、宽、高分别为正整数 m、n、r（$m\leqslant n\leqslant r$）的长方体，表面涂上红色后切成棱长为1的正方体．已知不带红色的正方体个数与两面带红色的正方体个数之和．减去一面带红色的正方体个数得1985．求 m、n、r 的值．

（黑龙江提供）

解　　答

一、1．解：因 $ABCD$ 为圆内接四边形，故 $C=180°-A$，且 A、C 都不能为0及180°，所以（1）式恒成立；（2）式恒不成立．

同样由 $D=180°-B$，（3）式恒成立．（4）式只有 $B=D=90°$ 时成立．　　∴　答案为（B）．

2．解：当 n 为偶数时，$\frac{1-(-1)^n}{2}=0$，$t=n+1$ 是奇数；当 n 为奇数时，$\frac{1-(-1)^n}{2}=1$，且 n^2-1 为偶数，故　$t=n+(n^2-1)$ 为奇数．　∴　答案为(D)．

3．解：由题设条件，O 是 CD 的中点，这样图中与 ΔABP 面积相等的三角形有两类：(i)与 ΔABP 等底等高的三角形有二个：ΔBPD、ΔPCD，(ii)一边为 BP 边的二倍，而高为 BP 上的高之半的三角形有三个：ΔBCQ、ΔADQ、ΔQDE．　∴　答案为(C)．

4．解：因 $x^2-x=0$ 的根为0及1，故

$$y=1-|x-x^2|=1-|x^2-x|$$
$$=\begin{cases}1+x^2-x & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1-x^2+x & x<0,\ x>1\end{cases}$$

由二次函数的图象可知，函数 $y=1-|x-x^2|$ 的图象的大致形状是图3中的实线部分． ∴ 答案为(C)．

5．解：若 $u=\frac{x+2}{4}$，则当 $x=2$ 时，$u=1$，$[u]=1$，因而 $y=4\left(\frac{1}{4}-\left[\frac{1}{4}\right]\right)=1$，与题设 $x=2$ 时，$y=2$ 相违，故(A)错．同样，令 $x=3$，可断定(B)错；令 $x=4$，可断定(C)错． ∴ 正确的答案为(D)．

6．解：由题设条件可知，F 是 ΔABC 的重心，因而 $CF=2DF$，$AF=2EF$．因

$$L(c)=AB+BE+EF+FC+CA$$

$$L(a)=AF+FC+CB+BA$$

故 $L(c)-L(a)=BE+EF-AF=BE+EF-BF>0$

即 $L(c)>L(a)$

$$L(b)=AC+CE+EB+BD+DF+FA$$

$$L(c)-L(b)=(AB-BD)+(EF-FA)+(FC-DF)-CE=AD+DF-CE-EF$$

当 ΔABC 为等边三角形时，$AD=CE$，$DF=EF$，因而 $L(c)=L(b)$，这说明 $L(b)<L(c)$ 不恒成立．再因

$$\begin{aligned}L(a)-L(b)&=FC+DA-AC-DF\\&=DF+DA-AC\end{aligned}$$

当 $\angle ACB=120^\circ$，且 $AC=BC=1$ 时，$AP=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$CD=\frac{1}{2}$，$DF=\frac{1}{6}$，故

$$L(a)-L(b)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{6}-1=\frac{3\sqrt{3}+1}{6}-1>0$$

即 $L(a)>L(b)$　　故不等式 $L(a)<L(b)$ 不恒成立.

$\therefore$ 答案为(B).

二、1. 解：令 $S=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$　　则

$$2S=2a^2+2b^2+2c-2ab-2bc-2ca$$
$$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$$
$$=(2+\sqrt{3})^2+(2-\sqrt{3}^2)+4^2=30$$
$$\therefore\quad S=\frac{1}{2}\times 30=15$$

即　$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=15$.

2. 解：设方程两根为 x_1，x_2

根据题意有：

$x_1+3=80x_2$　　$\therefore\quad x_1=80x_2-3$

又　$x_1+x_2=402$　　即

$80x_2-3+x_2=402$　　$\therefore\quad 81x_2=405$.

从而 $x_2=5$，$x_1=80x_2-3=397$

于是 $k=x_1x_2=397\times 5=1985$.

3. 解：设购甲货 1 件需 x 元，乙货 1 件需 y 元、丙货 1 件需 z 元.

根据题意有：

$$\begin{cases} 3x+7y+z=3.15 & ① \\ 4x+10y+z=4.20 & ② \end{cases}$$

②减去①有：$x+3y=1.05$

$$\therefore\quad 2x+6y=2.10 \qquad ③$$

由①式可得：$x+y+z+2x+6y=3.15$

将③式代入上式有：

$$x+y+z+2.10=3.15$$

$\therefore \quad x+y+z=1.05$

因此购甲、乙、丙各一件共需1.05元.

4．解：原不等式变为：$42x^2+ax-a^2<0$

显然当$a=0$时，无解　($42x^2$恒$\geqslant 0$).

$\because$　两根 $x_{1,2}=\dfrac{-a\pm 13|a|}{84}$

$\therefore$　当$a>0$时．原不等式的解为：$-\dfrac{a}{6}<x<\dfrac{a}{7}$

当$a<0$时，原不等式的解为：$\dfrac{a}{7}<x<-\dfrac{a}{6}$.

5．解：$\because \quad 1\div[1\div x-1\div(x+1)]-x$

$$=1\div\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right]-x=x^2+x-x=x^2$$

$\therefore$　表达式是：$1\div[1\div x-1\div(x+1)]-x$

或　$1\div[1\div(x-1)-(1\div x)]+x$

6．解：若$3\geqslant x$　则$3*x=x^3$

$\because \quad 27=3^3$　　　　$\therefore \quad x=3$

若$3<x$则$3*x=x^2$

$\because \quad 27=(\sqrt{27})^2$　　　　$\therefore \quad x=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

因此方程　$3*x=27$的解是3，$3\sqrt{3}$.

三、证：由正弦定理及已知条件得：

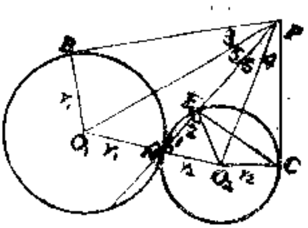
$$\frac{OA}{\sin\angle 10}=\frac{OB}{\sin\angle 1}=\frac{OB}{\sin\angle 2}=\frac{OC}{\sin\angle 3}=\frac{OC}{\sin\angle 4}$$

$$=\frac{OD}{\sin\angle 5}=\frac{OD}{\sin\angle 6}=\frac{OE}{\sin\angle 7}=\frac{OE}{\sin\angle 8}=\frac{OA}{\sin\angle 9}$$

从而$\sin\angle 10=\sin\angle 9$、故$\angle 9$与$\angle 10$相等或互补.

四、证：连O_1A，O_1B，PO_1，PO_2，O_2A，O_2C；则

O_1、A、O_2 三点共线，



$\because \quad PB:PC = r_1:r_2$

$\therefore \quad rt\Delta PBO_1 \backsim rt\Delta PCO_2$

$\therefore \quad \angle 3 = \angle 4$，$PO_1:PO_2 = r_1:r_2 = O_1A:O_2A$，于是 PA 为 $\angle O_1PO_2$ 的平分线，即 $\angle 5 = \angle 6$．连 O_2E，由 $\angle 1 = \angle 2$ 知 $\angle O_1AP = \angle O_2EP$

$\therefore \quad \Delta O_1AP \backsim \Delta O_2EP$.

$\therefore \quad PA:PE = r_1:r_2$．即 $PA:PE = PB:PC$，又由 $\angle 3 = \angle 4$，$\angle 5 = \angle 6$ 知

$\therefore \quad \angle BPA = \angle CPE$，　　$\therefore \quad \Delta PAB \backsim \Delta PEC$

五、解：依题意，不带红色的正方体个数为：

$$(m-2)(n-2)(r-2)$$

一面带红色的正方体个数为：

$$2(m-2)(n-2)+2(m-2)(r-2)+2(n-2)(r-2)$$

两面带红色的正方体个数为：

$$4(m-2)+4(n-2)+4(r-2)$$

于是有

$$(m-2)(n-2)(r-2)+4[(m-2)+(n-2)+(r-2)]$$
$$-2[(m-2)(n-2)+(m-2)(r-2)+(n-2)(r-2)]$$
$$=1985.$$

即　$[(m-2)-2][(n-2)-2][(r-2)-2]+8=1985$

$\therefore \quad (m-4)(n-4)(r-4)=1977=1\times 3\times 659$

由 $m\leqslant n\leqslant r$ 知 $m-4\leqslant n-4\leqslant r-4$.

$\therefore \quad m-4=1$，$n-4=3$，$r-4=659$.

即　$m=5$，$n=7$，$r=663$.

同理，由 $1977=1\times1\times1977$

$$m-4=1,\ n-4=1,\ r-4=1977.$$

即 $m=5$，$n=5$，$r=1981$.

$\therefore$ 符合题意的 m、n、r 有两组

$$\begin{cases} m_1=5,\ n_1=7,\ r_1=663; \\ m_2=5,\ n_2=5,\ r_2=1981. \end{cases}$$

北京市一九八四年

初三数学竞赛试题及解答

一、本题共有五个小题，每小题有(A)、(B)、(C)、(D)、(E)五个答案，其中有一个且只有一个答案是正确的．请把你认为正确的答案的英文字母代号，写在题后的括号内。

1．$\lg(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})$的值等于(　　)

(A)$\frac{1}{2}$；(B)1；(C)$2\sqrt{3}$；(D)$\frac{1}{2}\lg 6$；(E)$2\sqrt{5}$．

2．设$x=1+2^{p}$　$y=1+2^{-p}$，那么y等于(　　)

(A)$\frac{x+1}{x-1}$；(B)$\frac{x+2}{x-1}$；(C)$\frac{x}{x-1}$；(D)$2-x$；

(E)$\frac{x-1}{x}$．

3．一条直线分一张平面为两部分，二条直线最多分一张平面为四部分．设五条直线最多分一张平面为n个部分，则n等于(　　)．

(A)32；(B)31；(C)24；(D)18；(E)16．

4．方程$(1984x)^{2}-1983\cdot1985x-1=0$的较大根为$\gamma$，$x^{2}+1983x-1984=0$的较小根为$s$，则$\gamma-s$等于(　　)

(A)$\frac{1}{1985}$；(B)1985；(C)$\frac{1984}{1985}$；(D)0；

(E)$-\frac{1983}{1984}$．