课堂内外丛书

高中数学

徐望根 主编

北京师范学院出版社
1989年·北京

主编：王绍宗

编委（以姓氏笔划为序）：

王绍宗　王乐君　何宗弟　赵永明

张国栋　徐望根　董凤举　秦家达

课 堂 内 外 丛 书

高 中 数 学

徐望根　主编

*

北京师范学院出版社出版

（北京阜成门外花园村）

新华书店首都发行所发行

国防科工委印刷厂印刷

*

开本：787×1092　1/32　印张：11　字数：244千

1989年8月北京第1版　1989年8月北京第1次印刷

印数：00,001—12,000册

ISBN　7—81014—332—8/G·291

定价：　3.65 元

目　录

第一讲 “1”的活用

自有数以来，数“1”第一个呱呱落地。从它开始，出现了自然数；把它等分，出现了分数；尔后，又出现了无理数。整数（包括正整数（即自然数）、负整数和零）和分数合称有理数，有理数和无理数合称实数，而“1”就是实数的单位。

“1”是一个最为活跃的数，它有多种基本形式，更有无穷多种变化形式。在数学学习中，应该从“1”中获取自由。

1. “1”的基本形式

不同的内容，“1”有不同的形式。这些形式既基本又重要。

在代数学上，有

有限和的形式：

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\cdots.$$

无限和的形式：

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots.$$

积的形式： $1=a\cdot\frac{1}{a}\quad(a\neq0)$.

通项的形式：

$$1=1^n=\frac{1+(-1)^n}{2}+\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}\quad(n\in N).$$

幂的形式：$1=a^0\quad(a\neq0)$.

对数形式：$1=\lg 10=\log_a a$ （$a>0$且$a\neq 1$）。

对数指数幂形式：

$1=N^{\log_a 1}$ （$N>0$ 且 $N\neq 1$，$a>0$且 $a\neq 1$）。

$1=a^{\log_a 1}$ （$a>0$ 且 $a\neq 1$）。

对数乘积形式：$1=\log_a b\cdot\log_b a$。

行列式形式：$1=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}$。

复数形式：

$$1=i^4=-i^2=i^{4n}\quad(n\in N).$$

$$1=1+0i=\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi\quad(k\in Z).$$

$$1=\left(\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}\right)^3.$$

排列形式：$1=P_1^1$。

组合形式：$1=C_n^0=C_n^n$。

阶乘形式：$1=0!$。

在三角学上，有

平方和形式：$1=\sin^2\theta+\cos^2\theta$。

平方差形式：

$$1=\sec^2\theta-\operatorname{tg}^2\theta.$$

$$1=\csc^2\theta-\operatorname{ctg}^2\theta.$$

特殊角的三角函数形式：

$$1=\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2k\pi.$$

$$1=\operatorname{tg}\left(k\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{ctg}\left(k\pi+\frac{\pi}{4}\right)\quad(k\in Z).$$

三角函数的积的形式：

$1=\operatorname{tg}\theta\cdot\operatorname{ctg}\theta$，$1=\sin\theta\cdot\csc\theta$，$1=\cos\theta\cdot\sec\theta$。

在微积分学上，有

极限形式：

$$1=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x}.$$

$$1=\lim_{x\to\infty}\frac{x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}.$$

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}.$$

导数形式：$1=\dfrac{dx}{dx}$。

积 分 形式：$1=\int_0^1 dx$。

2。 基本形式的活用

（1） “1”分拆成若干数之和

例 1 1 可写成$n+1$项和，其中第 1 项是$\frac{1}{2}$，除最后一项外，其余各项都是前一项的一半．即

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}.$$

（2） $1=a\cdot\frac{1}{a}$的活用

例 2 化简 $\log_{(2\sqrt{2}-\sqrt{7})}(15+4\sqrt{14})$。

解 原式 $=\log_{(2\sqrt{2}-\sqrt{7})}(2\sqrt{2}+\sqrt{7})^2$

$=\log_{(2\sqrt{2}-\sqrt{7})}(2\sqrt{2}-\sqrt{7})^{-2}$

$=-2$。

附注：这里用到

$$1=(2\sqrt{2}-\sqrt{7})\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{7}}$$
$$=(2\sqrt{2}-\sqrt{7})(2\sqrt{2}+\sqrt{7}).$$

即用1把底数$2\sqrt{2}-\sqrt{7}$和真数$15+4\sqrt{14}=(2\sqrt{2}+\sqrt{7})^2$挂起钩来，便于化简。

（3） $1=\lg 10$ 的活用

例3 求值计算：

1）$\lg^2 5+\lg 2(\lg 2+2\lg 5)$；

2）$\lg^3 2+\lg^3 5+3\lg 2\cdot\lg 5$.

解 1）原式$=\lg^2 5+2\lg 2\cdot\lg 5+\lg^2 2$

$$=(\lg 5+\lg 2)^2=\lg^2 10=1.$$

2）原式$=\lg^3 2+\lg^3 5+3\lg 2\cdot\lg 5(\lg 2+\lg 5)$

$$=\lg^3 2+3\lg^2 2\cdot\lg 5+3\lg 2\cdot\lg^2 5+\lg^3 5$$
$$=(\lg 2+\lg 5)^3=\lg^3 10=1.$$

附注：应联想到

$$1=\lg 10=\lg 2+\lg 5.$$

在2）中，第三项配上因子$\lg 2+\lg 5$，原式的值不变，这是1的功能之一。另外，为什么会想到配上因子$\lg 2+\lg 5$？这是将原式与$(\lg 2+\lg 5)^3$的展开式进行分析比较想到的。

（4） $1=\log_a b\cdot\log_b a$的活用

例4 计算：

$(\log_2 3\cdot\log_4 5\cdot\log_6 7\cdots\log_{2n}(2n+1))$.

$(\log_3 2\cdot\log_5 4\cdot\log_7 6\cdots\log_{(2n+1)}(2n))$.

解 原式$=(\log_2 3\cdot\log_3 2)(\log_4 5\cdot\log_5 4)(\log_6 7\cdot\log_7 6)\cdots(\log_{2n}(2n+1)\cdot\log_{(2n+1)}(2n))$

$$=1\cdot 1\cdot 1\cdot\cdots\cdot 1=1.$$

（5） $1=a^0$的活用

例 5 解方程 $e^{\sin x+\cos x}=1$。

解 把原方程化为

$$e^{\sin x+\cos x}=e^0.$$

$$\therefore \quad \sin x+\cos x=0,$$

即 $$1+\operatorname{tg}x=0.$$

解得 $$x=k\pi-\frac{\pi}{4}\quad (k\in Z).$$

附注：当 $1=e^0$ 后，再利用同底幂相等其指数也相等，化去底数以简化方程。

（6） $1=\log_a a$的活用

例 6 解不等式

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x-1}{2(x+1)}-\frac{x+1}{2(x-1)}\right)\leqslant 1.$$

解 原不等式化为

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x-1}{2(x+1)}-\frac{x+1}{2(x-1)}\right)\leqslant \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}.$$

$$\because \quad 0<\frac{1}{2}<1,$$

$$\therefore \quad \frac{x-1}{2(x+1)}-\frac{x+1}{2(x-1)}\geqslant\frac{1}{2}.$$

即 $$\frac{x-1}{x+1}-\frac{x+1}{x-1}\geqslant 1.$$

解得 $$-(2+\sqrt{5})\leqslant x<-1 或 \sqrt{5}-2\leqslant x<1$$

（7） $1=\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi$的活用

例 7 把$7e-6\pi$写成复数的三角形式。

解 $\because \quad 7e-6\pi>0,$

$$\therefore \quad 7e-6\pi=(7e-6\pi)\cdot 1$$

$$=(7e-6\pi)[\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi].$$

附注：因为复数的模是一个非负数，所以此复数的模是 $7e-6\pi$。

如果原题改成“把$6\pi-7e$写成复数的三角形式”，则应写成

$$\begin{aligned}6\pi-7e&=(7e-6\pi)\cdot(-1)\\&=(7e-6\pi)[\cos(2k+1)\pi+i\sin(2k+1)\pi].\end{aligned}$$

（8） $1=C_n^0=C_n^n$的活用

例 8 化简$C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^{n-1}$。

解 原式$=(1+C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^{n-1}+1)-2$

$$\begin{aligned}&=(C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n)-2\\&=(1+1)^n-2\\&=2^n-2.\end{aligned}$$

（9） $1=\sin^2\theta+\cos^2\theta$的活用

例 9 化简 $\sqrt{1+\sin 10^\circ}+\sqrt{1-\sin 10^\circ}$。

解 原式$=\sqrt{\sin^2 5^\circ+2\sin 5^\circ\cos 5^\circ+\cos^2 5^\circ}$

$$\begin{aligned}&+\sqrt{\sin^2 5^\circ-2\sin 5^\circ\cos 5^\circ+\cos^2 5^\circ}\\&=\sqrt{(\sin 5^\circ+\cos 5^\circ)^2}+\sqrt{(\sin 5^\circ-\cos 5^\circ)^2}\\&=\sin 5^\circ+\cos 5^\circ+\cos 5^\circ-\sin 5^\circ\\&=2\cos 5^\circ.\end{aligned}$$

附注：（1）$\because \cos 5^\circ>\sin 5^\circ$， $\therefore \sqrt{(\sin 5^\circ-\cos 5^\circ)^2}$

$$=\cos 5^\circ-\sin 5^\circ.$$

（2）“$1=\sin^2\theta+\cos^2\theta$ 的 活 用”将在下一讲中进一步阐述。

（10） $1=\mathrm{tg}\theta\cdot\mathrm{ctg}\theta$的活用

例 10 计算$\mathrm{tg}1^\circ\cdot\mathrm{tg}2^\circ\cdot\mathrm{tg}3^\circ\cdots\mathrm{tg}89^\circ$。

解 原式$=(\mathrm{tg}1^\circ\cdot\mathrm{tg}89^\circ)\cdot(\mathrm{tg}2^\circ\cdot\mathrm{tg}88^\circ)\cdot(\mathrm{tg}3^\circ\cdot\mathrm{tg}87^\circ)$

$$\cdots(\mathrm{tg}44°\cdot\mathrm{tg}46°)\cdot\mathrm{tg}45°$$

$$=(\mathrm{tg}1°\cdot\mathrm{ctg}1°)\cdot(\mathrm{tg}2°\cdot\mathrm{ctg}2°)\cdot(\mathrm{tg}3°\cdot\mathrm{ctg}3°)$$

$$\cdots(\mathrm{tg}44°\cdot\mathrm{ctg}44°)\cdot\mathrm{tg}45°$$

$$=1\times1\times1\times\cdots\times1\times1=1.$$

附注：活用过程中常常需要把原式重新结合或适当调整。此例就是这样。

(11)　$1=\mathrm{tg}45°$的活用

例11　求 $\dfrac{1+\mathrm{tg}75°}{1-\mathrm{tg}75°}+\dfrac{1-\mathrm{tg}15°}{1+\mathrm{tg}15°}$的值。

解　原式 $=\dfrac{\mathrm{tg}45°+\mathrm{tg}75°}{1-\mathrm{tg}45°\mathrm{tg}75°}+\dfrac{\mathrm{tg}45°-\mathrm{tg}15°}{1+\mathrm{tg}45°\mathrm{tg}15°}$

$$=\mathrm{tg}(45°+75°)+\mathrm{tg}(45°-15°)$$

$$=\mathrm{tg}120°+\mathrm{tg}30°$$

$$=-\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

(12)　$1=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}$的活用

例12　求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x\cdot\mathrm{tg}^2x}{x^3}$。

解　原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin x\cos x\cdot\sin^2x}{x^3\cos^2x}$

$$=\lim_{x\to0}\left[\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\cdot\frac{2}{\cos x}\right]$$

$$=\left(\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\right)^3\cdot\lim_{x\to0}\frac{2}{\cos x}$$

$$=1^3\cdot2=2.$$

附注："1"可以正用，也可以反用。这例中，实际上用的是$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$。反过来用，可以由下题说明：

已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^2}(A+\cos^2 x)\right]$，试求实数$A$。

解 左边

$$=\lim_{x\to 0}1+\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^2}=1+\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^2}$$

$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2+\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2+\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}+\frac{\sin^2 x}{x^2\cos^2 x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\cos^2 x+\sin^2 x}{x^2\cos^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin^2 x}{x^2\cos^2 x}(1+\cos^2 x)\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^2}(1+\cos^2 x)\right].$$

再比较原式右边，得$A=1$。

3. "1"的多侧面的运用

在"1"的基本形式中，都是用一个式子表示"1"的恒等式，或用"1"表示一个式子的恒等式。但实际上"1"出现在等式中，不一定都是恒等式，有时是带条件的等式；也不一定都是这种正面的形象，而常在等式或公式中，以侧面的姿态出现，也就是说，"1"常处在某个特殊的位置上，起着特

殊的作用。

(1) 公式和曲线方程中的“1”

倍角公式中的“1”：

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta.$$

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta}.$$

半角公式中的“1”：

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}, \qquad \cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}.$$

两角和、差的正切公式中的“1”：$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$.

万能公式中的“1”：

$$\sin\theta = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}, \quad \cos\theta = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}.$$

等差、等比数列通项公式中的“1”：

$$a_n = a_1 + (n-1)d; \quad a_n = a_1 q^{n-1}.$$

等差、等比数列前 n 项和的公式中的“1”：

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2};$$

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}.$$

无穷递缩等比数列和的公式中的"1"：$S=\dfrac{a_1}{1-q}$。

排列数、组合数公式中的"1"：

$$P_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1);$$

$$C_n^m=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}.$$

组合恒等式中的"1"：

$$C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}.$$

定比分点坐标公式中的"1"：

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

交角公式中的"1"：

$$\operatorname{tg}\theta=\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|.$$

直线的截距式方程中的"1"：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$。

单位圆方程中的"1"：$x^2+y^2=1$。

椭圆、双曲线方程中的"1"：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

圆锥曲线极坐标方程中的"1"：$\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$。

例1 求$\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}}{\operatorname{tg}\frac{2\pi}{7}}+\cos\dfrac{2\pi}{7}+\sec^2\dfrac{\pi}{7}-2\cos^2\dfrac{\pi}{7}$的值。

解 由$\operatorname{tg}\frac{2\pi}{7}=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{7}}$及$\cos\frac{2\pi}{7}=2\cos^2\frac{\pi}{7}-1$得

$$1=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}}{\operatorname{tg}\frac{2\pi}{7}}+\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{7}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}}{\operatorname{tg}\frac{2\pi}{7}}+\sec^2\frac{\pi}{7}-1$$

$$=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}}{\operatorname{tg}\frac{2\pi}{7}}+\sec^2\frac{\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}-2\cos^2\frac{\pi}{7}.$$

$\therefore$ 原式$=1$。

附注：上面的解法是按照编题者的思路做的。下面是另一种解法。

$$原式=2\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}\cdot\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{7}}{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}}+1+\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{7}+2\cos^2\frac{\pi}{7}-1$$

$$-2\cos^2\frac{7}{\pi}=1.$$

例2 解方程$C_{77}^{7}=C_{76}^{7}+C_{76}^{7-x}$。

解 原方程化为

$C_{76}^{7}+C_{76}^{6}=C_{76}^{7}+C_{76}^{7-x}$。

$\therefore$ $C_{76}^{7-x}=C_{76}^{6}$。

$\therefore$ $7-x=6$或$7-x=76-6$。

$\therefore$ $x=1$或-63。

附注：因为$C_{76}^{6}=C_{76}^{70}$，所以原方程有两解。

例 3 设 $A=\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}}{\sin\theta}+\dfrac{\sin\theta-\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}\cos\theta-\operatorname{tg}^{3}\dfrac{\theta}{2}}{2\cos\theta\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}}-\operatorname{tg}^{2}\dfrac{\theta}{2}$,

试证：对于使 A 有意义的 θ 值，A 总是同一个常数。

证明 由 $\sin\theta=\dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}}{1+\operatorname{tg}^{2}\dfrac{\theta}{2}}$, $\cos\theta=\dfrac{1-\operatorname{tg}^{2}\dfrac{\theta}{2}}{1+\operatorname{tg}^{2}\dfrac{\theta}{2}}$,

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\text{得}$$

$1=\dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}}{\sin\theta}-\operatorname{tg}^{2}\dfrac{\theta}{2}$, $1=\dfrac{1-\operatorname{tg}^{2}\dfrac{\theta}{2}}{\cos\theta}-\operatorname{tg}^{2}\dfrac{\theta}{2}$,

$1=\dfrac{\sin\theta}{\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}}-\cos\theta$.

$$\therefore\quad A=\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}}{\sin\theta}+\frac{\left(\dfrac{\sin\theta}{\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}}-\cos\theta\right)-\operatorname{tg}^{2}\dfrac{\theta}{2}}{2\cos\theta}-\operatorname{tg}^{2}\frac{\theta}{2}$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}}{\sin\theta}-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^{2}\frac{\theta}{2}+\frac{1-\operatorname{tg}^{2}\dfrac{\theta}{2}}{2\cos\theta}-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^{2}\frac{\theta}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}}{\sin\theta}-\operatorname{tg}^{2}\frac{\theta}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1-\operatorname{tg}^{2}\dfrac{\theta}{2}}{\cos\theta}-\operatorname{tg}^{2}\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{2}\times1=1.$$

另证 $A=\dfrac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\sin\theta\cos\dfrac{\theta}{2}}+\dfrac{\sin\theta}{2\cos\theta\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\operatorname{tg}^2\dfrac{\theta}{2}}{2\cos\theta}-\operatorname{tg}^2\dfrac{\theta}{2}$

$$=\left(\frac{1}{2\cos^2\dfrac{\theta}{2}}-\frac{\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}\right)+\left(\frac{\cos\dfrac{\theta}{2}\sin\theta}{2\cos\theta\sin\dfrac{\theta}{2}}\right.$$

$$\left.-\frac{\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{2\cos\theta\cos^2\dfrac{\theta}{2}}\right)-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\cos\theta}{2\cos^2\dfrac{\theta}{2}}+\frac{2\cos^4\dfrac{\theta}{2}-\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{2\cos\theta\cos^2\dfrac{\theta}{2}}-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\cos^2\theta+2\cos^4\dfrac{\theta}{2}-\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{2\cos\theta\cos^2\dfrac{\theta}{2}}-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\left(2\cos^2\dfrac{\theta}{2}-1\right)^2+2\cos^4\dfrac{\theta}{2}-\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{2\cos\theta\cos^2\dfrac{\theta}{2}}-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{4\cos^4\dfrac{\theta}{2}-4\cos^2\dfrac{\theta}{2}+1+2\cos^4\dfrac{\theta}{2}-1+\cos^2\dfrac{\theta}{2}}{2\cos\theta\cos^2\dfrac{\theta}{2}}$$

$$-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{6\cos^2\frac{\theta}{2}-3}{2\cos\theta}-\frac{1}{2}=\frac{3\cos\theta}{2\cos\theta}-\frac{1}{2}=1.$$

例 4 直线l_1、l_2的斜率分别为k_1、$k_2(k_1>k_2>0)$，交角为$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，交点为$P(x_0,y_0)$，这里$x_0\neq0$，$y_0\neq0$，又$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$在$l_1$上，且$P_1P:PP_2=2$。试证

$$(k_1-k_2+2\operatorname{tg}\theta)(x_0+y_0)=[x_1+y_1+2(x_2+y_2)+k_1k_2(x_0+y_0)]\operatorname{tg}\theta.$$

证明 ∵ $k_1>k_2>0$，∴ $k_1-k_2>0$，$1+k_1k_2>0$，故 $\operatorname{tg}\theta=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}$。又由分点坐标公式得 $x_0=\frac{x_1+2x_2}{1+2}$，$y_0=\frac{y_1+2y_2}{1+2}$。由此得

$$1=\frac{k_1-k_2}{\operatorname{tg}\theta}-k_1k_2,\quad 1=\frac{x_1+2x_2}{x_0}-2,\quad 1=\frac{y_1+2y_2}{y_0}-2.$$

$$\therefore\quad \frac{k_1-k_2}{\operatorname{tg}\theta}-k_1k_2=\frac{x_1+2x_2}{x_0}-2.$$

$$\therefore\quad (k_1-k_2-k_1k_2\operatorname{tg}\theta)x_0=(x_1+2x_2-2x_0)\operatorname{tg}\theta,$$

$$(k_1-k_2)x_0+2x_0\operatorname{tg}\theta=(x_1+2x_2)\operatorname{tg}\theta+x_0k_1k_2\operatorname{tg}\theta,$$

$$(k_1-k_2+2\operatorname{tg}\theta)x_0=(x_1+2x_2+x_0k_1k_2)\operatorname{tg}\theta.$$

同理 $$(k_1-k_2+2\operatorname{tg}\theta)y_0=(y_1+2y_2+y_0k_1k_2)\operatorname{tg}\theta.$$

上面两式相加并整理即得

$$(k_1-k_2+2\operatorname{tg}\theta)(x_0+y_0)=[x_1+y_1+2(x_2+y_2)+k_1k_2(x_0+y_0)]\operatorname{tg}\theta.$$

（2） 已知条件中的“1”

例 5 已知$x+2y=1$，求证$x^4+16y^4\geqslant\frac{1}{8}$。