几何题解

龚宝和　王令九　编

山西人民出版社

几何题解

龚宝和
王[illegible]才 编

山西人民出版社

几何题解

龚宝和　王令九

山西人民出版社出版　（太原并州路七号）
山西省新华书店发行　山西新华印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：12　字数：256千字
1979年4月第1版　1979年11月太原第1次印刷
印数：1—300,000册

书号：7088·810　定价：0.81元

说　　明

这本《几何题解》是按照几何学的系统性由易到难，由浅入深进行编辑的。

书中命题类型较全，注重解题的思考方法及逻辑推理。解题步骤比较细致，易于看懂。对较难的综合题，作了比较详尽的分析。有些题介绍了几种解法，用以帮助读者开扩思路，提高解题的技巧。

书中命题来源不一：有的是经典题，有的是选自各种著作和刊物，有的是我们编拟的。

在编写本书过程中，得到了我院领导的支持和教职工与部分同学的热情帮助，我们在此致以谢意。

作　者

一九七八年八月于山西财经学院

目　　录

平　面　几　何

立　体　几　何

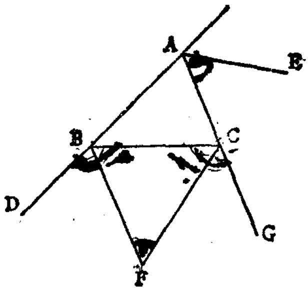
平 面 几 何

第一章 证 明 题

第一节 直 线 形

1. 已知 F 为 $\triangle ABC$ 的 $\angle B$ 与 $\angle C$ 的外角平分线的交点，AE 为 $\angle A$ 的外角平分线．求证：$\angle BFC=\angle EAC$．

证明：如图



$\angle CBD=\angle CAB+\angle BCA$，

$\angle GCB=\angle CAB+\angle ABC$，

（三角形的外角等于不相邻的两内角和．）

有 $\angle CBD+\angle GCB$

$=2\angle CAB+\angle BCA+\angle ABC$

$=\angle CAB+180^\circ$．

$$\frac{1}{2}\left(\angle CBD+\angle GCB\right)=\frac{1}{2}\angle CAB+90^\circ.$$

在 $\triangle FCB$ 中，$\angle FBC+\angle FCB$

$$=\frac{1}{2}\left(\angle C\cancel{BD}+\angle GCB\right)$$

$$=\frac{1}{2}\angle CAB+90^\circ.$$

$\therefore\quad \angle BFC=180^\circ-(\angle FBC+\angle FCB)$

$$=180^\circ-\frac{1}{2}\angle CAB-90^\circ$$

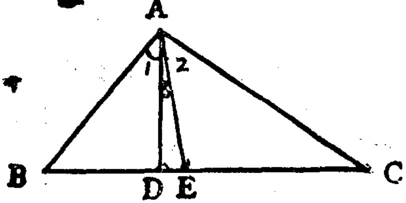
$$=90^\circ-\frac{1}{2}\angle CAB.$$

又知：$\angle EAC=\frac{1}{2}\left(180^\circ-\angle CAB\right)$

$$=90^\circ-\frac{1}{2}\angle CAB,$$

$\therefore\quad \angle BFC=\angle EAC.$

2. 如图所示：已知在$\triangle ABC$中，$\angle A$的平分线为AE，$AD\perp BC$。设$\angle B>\angle C$。求证：$\angle EAD=\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)$。



证明：设$\angle DAB=\angle 1$，$\angle CAE=\angle 2$，$\angle EAD=\angle 3$，

$\because\quad AD\perp BC$，$\therefore$ 在直角$\triangle ADB$中，$\angle B+\angle 1=90^\circ$。

在直角$\triangle ADC$中，$\angle C+\angle 2+\angle 3=90^\circ$。

故有 $\angle B+\angle 1=\angle C+\angle 2+\angle 3$

$$\angle B-\angle C=\angle 2+\angle 3-\angle 1 \qquad (1)$$

$\because$ AE为$\angle A$平分线，

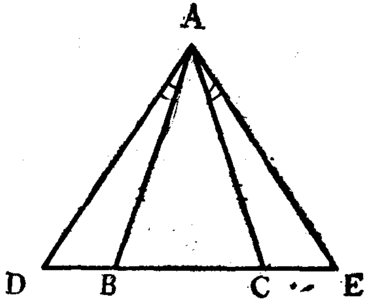
$\therefore\ \angle 2 = \angle 1 + \angle 3.$ (2)

将②代入①，得：

$\angle B - \angle C = \angle 1 + \angle 3 + \angle 3 - \angle 1 = 2\cdot\angle 3 = 2\angle EAD.$

$\therefore\ \angle EAD = \frac{1}{2}\left(\angle B - \angle C\right).$

3.已知过在直线DE外的一点A，向DE引线段，使$AB = AC$，$\angle DAB = \angle EAC$。求证：$AD = AE$，



分析：要证明$AD = AE$，据此题所给条件和图形特点，如果能证明$\triangle ABD$与$\triangle ACE$全等或能证明$\triangle ADC$与$\triangle AEB$全等即可。

证明：$\because$ 在$\triangle ABC$中，$AB = AC$，

$\therefore\ \angle ABC = \angle ACB.$

又 $\because$ DE为一直线，

$\therefore\ \angle ABD = \angle ACE.$

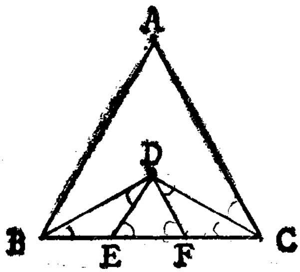
又知 $\angle DAB = \angle EAC$，

$\therefore\ \triangle ABD \cong \triangle ACE$，

故 $AD = AE$。

4.已知在正$\triangle ABC$中，D为$\angle B$与$\angle C$的平分线的交点，$DE \parallel AB$，$DF \parallel AC$，E、F为BC上的点。求证：

$$BE = EF = FC = \frac{1}{3}BC.$$



证明：$\because$ $DE \parallel AB$

$DF \parallel AC$，

$\therefore$ $\angle DEF = \angle ABC = 60°$，

$\angle DFE = \angle ACB = 60°$，

$\angle FDE = 180° - \angle DEF$.

$- \angle DFE = 60°$，

$DE = EF = DF$.

$\angle DEF = \angle EBD + \angle BDE$

已知$\angle EBD = 30°$，

故 $\angle BDE = 30°$，

有 $BE = DE$.

同理可证：$FC = DF$.

故 $BE = EF = FC = \frac{1}{3}BC$.

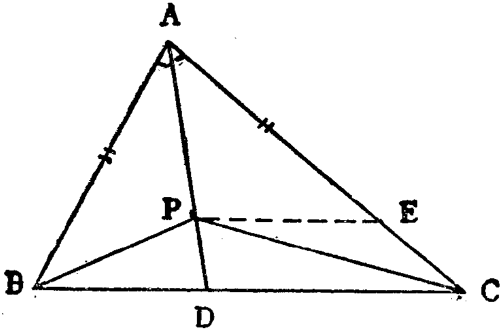
5.证明：在不等边$\triangle ABC$的$\angle A$的平分线上，任一点P到二顶点B、C的距离之差小于AB与AC之差。

证明：设$\angle A$的平分线AD交BC于D点，在AD上任取点P，连PB、PC，且$AC > AB$.

在AC上截$AE = AB$，连PE. 已知$\angle BAP = \angle EAP$，$AP = AP$，故$\triangle ABP \cong \triangle AEP$，有$PB = PE$.

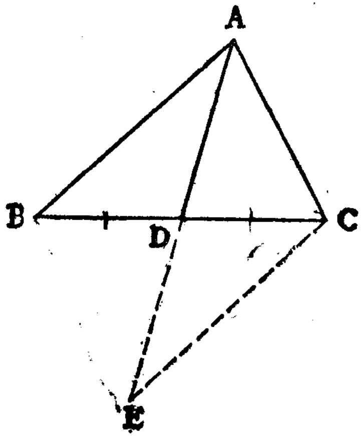
在$\triangle PCE$中，$PC - PE < EC = AC - AB$.

即 $PC - PB < AC - AB$.



6.已知 AD为$\triangle ABC$的中线. 求证：$\dfrac{AB+AC}{2}>AD$.

证明：延长AD到E，使$AD=DE$，连CE.



$\because \angle ADB = \angle EDC$

$BD = CD$,

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ECD$,

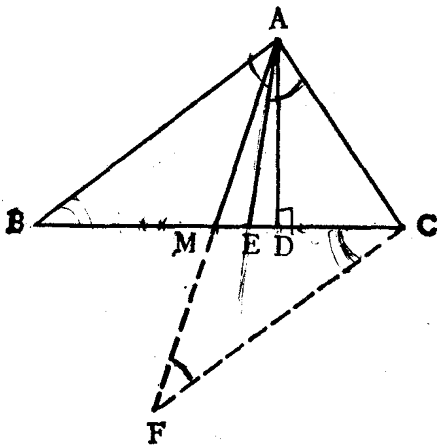
有 $AB = CE$。

在$\triangle AEC$中，$\because AC + CE > AE$,

$\therefore AC + AB > 2AD$,

即 $\dfrac{AC + AB}{2} > AD$。

7.如图所示：在不等边$\triangle ABC$中，$AB > AC$，AM、AE、AD分别为其中线、角的平分线、高。求证：$\angle BAM < BAE$；$\angle CAD < \angle CAE$。



证明：延长AM到F，使$MF = AM$。连CF。

$\because BM = MC$，$\angle AMB = \angle CMF$,

$\therefore \triangle ABM \cong \triangle FCM$,

则有 $\angle BAM=\angle CFM$，$AB=FC$。

∵ 在$\triangle AFC$中，$AB=FC>AC$。

∴ $\angle CAF>\angle CFM$。

即 $\angle CAM>\angle BAM$，

$\angle CAM+\angle BAM>\angle BAM+\angle BAM$，

$\angle A>2\angle BAM$，

$\frac{\angle A}{2}>\angle BAM$。

即 $\angle BAM<\angle BAE$。

又 在两直角$\triangle ADB$，$\triangle ADC$中，

已知 $\angle C>\angle B$，故$\angle BAD>\angle CAD$。

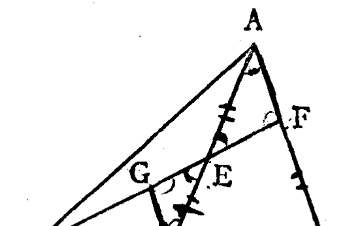
$\angle BAD+\angle CAD>\angle CAD+\angle CAD$，

$\angle A>2\angle CAD$，

$\frac{\angle A}{2}>CAD$。

即 $\angle CAD<\angle CAE$。

8.已知 在$\triangle ABC$中，D为BC的中点，E为AD的中点。BE的延长线与AC的交点为F。



求证：$AF=\frac{1}{3}AC$。

证明：过D点作AC的平行线交BF于G点。

已知D为BC中点，故G为BF的中点，

故在$\triangle BCF$中，$DG \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}FC$.在$\triangle AEF$与$\triangle DEG$中，

$\because$ $\angle DEG=\angle AEF$（对顶角等），

$\angle FAE=\angle GDE$（内错角等），

又知 $AE=ED$,

$\therefore$ $\triangle AEF\cong\triangle DEG$。

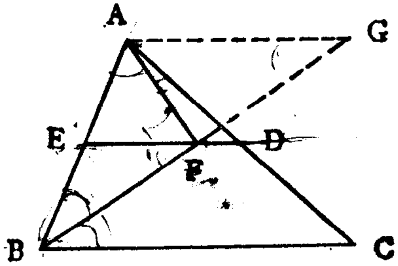
则 $DG=AF=\frac{1}{2}FC$,

$AC=AF+FC=3AF$,

即 $AF=\frac{1}{3}AC$。

9.在$\triangle ABC$中，AB、AC的中点为E、D，ED或其延长线与$\angle B$的平分线交于点F。求证：$AF\perp BF$。

证明：过点A作$AG\parallel BC$，交BF的延长线于G，则$\angle AGB=\angle GBC=\angle ABG$。



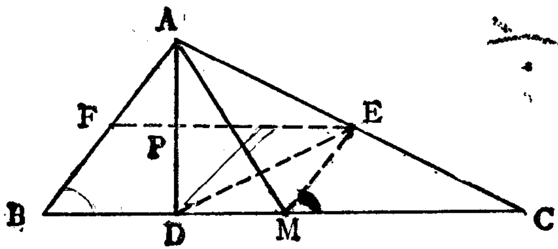
故$\triangle ABG$为等腰三角形。

$\because ED \parallel BC$，$\therefore ED \parallel AG$，

且由题知E为AB的中点，故在$\triangle ABG$中，F点为BG的中点，即AF为等腰$\triangle ABG$底边上的中线，

则 $AF \perp BF$。

10.在$\triangle ABC$中，AD是BC边上的高，M是BC的中点，且$DM=\frac{1}{2}AB$。求证：$\angle B=2\angle C$。



证明：如图，过M点作$ME \parallel AB$，交AC于E，过E点作$EF \parallel BC$，交AD于P，AB于F，连DE。

$\because ME \parallel AB$，$\therefore \angle EMC=\angle B$，又$M$是$BC$的中点，

$\therefore E$也是AC的中点；同理P是AD的中点，F是AB的中点；$ME=DM=\frac{1}{2}AB$，$\angle MDE=\angle MED$，$\angle MDE=\angle DEP$（内错角），则DE为$\angle MEP$的平分线。

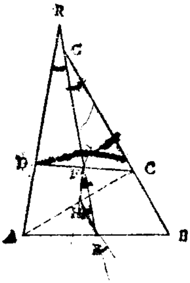
在$\triangle EAP$与$\triangle EDP$中，$AP=PD$，$EP=EP$，$\angle EPA=\angle EPD=90^\circ$（$EP \perp AD$），$\triangle EAP \cong \triangle EDP$，$\angle DEP=\angle AEP=\angle C$，

则 $\angle MEF=2\angle C$。

又 $BMEF$ 为平行四边形，有 $\angle B = \angle MEF$。

故 $\angle B = 2\angle C$。

11.四边形 $ABCD$，$AD = BC$，E、F 为 AB 与 CD 的中点，若 AD 与 EF 相交于 R 点，BC 与 EF 相交于 G 点。求证：$\angle ARE = \angle BGE$。



证明：连 AC，设 AC 的中点为 H，连 HF，HE。

在 $\triangle ACD$ 中，$HF \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AD$。

在 $\triangle ABC$ 中，$HE \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}BC$。

$\because$ $AD = BC$，

$\therefore$ $HF = HE$。

故在 $\triangle HEF$ 中，$\angle HEF = \angle HFE$。

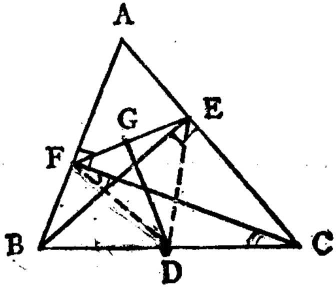
又 $\because$ $HF \parallel AD$，即 $HF \parallel AR$。

$\therefore$ $\angle ARE = \angle HFE$（同位角等）。

同理 $\angle BGE = \angle HEF$（内错角等）。

故知 $\angle ARE = \angle BGE$。

12.已知在 $\triangle ABC$ 中，BE、CF 分别为 AC、AB 边上



的高，DG 为 BC、EF 的中点连线．求证：$DG \perp EF$．

证明：连 DE、DF．

$\because$ 在直角 $\triangle CEB$ 中，D 为 BC 的中点，故 $DE = BD = DC$．

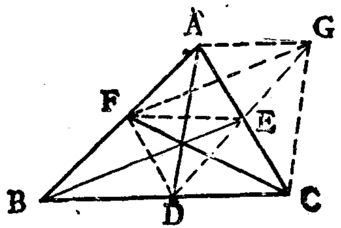
在直角 $\triangle CFB$ 中，D 为 BC 中点，故 $DF = BD = DC$．

$\therefore$ $DE = DF$．

则 $\triangle DEF$ 为等腰三角形．

又知 G 为 EF 的中点，即 DG 为 $\triangle DEF$ 的中线，故 $DG \perp EF$．

13．如图 AD、BE、CF 是 $\triangle ABC$ 的三中线，已知 $FG \parallel BE$，$EG \parallel AB$．求证：$AD \parallel GC$．



证明：连接 EF、DE、FD，则 $DE \parallel AB$，且 $DE = \frac{1}{2}AB = BF$．

$\left(\triangle\text{中两边中点的连线平行于第三边且等于第三边的}\frac{1}{2}\right)$．

$\because$ $EG \parallel AB$，EG、DE 过 E 点，

$\therefore$ G、E、D 三点在一直线上．

$\because FG \parallel BE, BF \parallel EG$，$\therefore$ 四边形 $FBEG$ 为平行四边形，得：$BF = EG$，

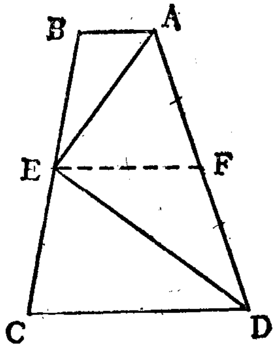
$\therefore DE = EG$。

又 $AE = EC$（E是AC中点），

在四边形$ADCG$中，二对角线AC、DG互相平分，故$ADCG$为平行四边形。

$\therefore AD \parallel GC$。

14.在梯形 $ABCD$ 中，$AB + CD = AD$，E 为 BC 的中点，连AE、DE。求证：$AE \perp DE$。



证明：过 E 点作 $EF \parallel CD$ 交 AD 于F，则有

$$EF = \frac{1}{2}\left(AB + CD\right)$$

$$= \frac{AD}{2} = AF = DF.$$

则 F 点是以 AD 为直径的圆的圆心，$\angle AED$ 为 $\odot F$ 的直径上的圆周角，

故 $AE \perp DE$。

15.已知梯形 $ABCD$，其对角线 $AC = BD$。求证：梯形