初中代数自学纲要

第二册

周朋寿　编

科学技术文献出版社

初中代数自学纲要

（第二册）

周 朋 寿 编

科学技术文献出版社

内 容 提 要

本书根据初中代数课程的基本要求，包括二元一次方程组、整式的乘除、因式分解、分式等四章，并参照全日制普通中学的课堂教学顺序，分成七十二个课时，逐课给予学习指导。在本书中，每课均包括学习要点、练习指导和参考习题这样三个部分。每一单元之后还有自我检查题，书末附有答案，供读者随时检查自学效果。结合本书自学，或是重温、复习初中代数，可以犹如身临课堂，聆听优秀教师的授课，以期得到更好的学习成绩。此外，本书对普通中学初中一年级下学期的学生以及职工业余中学的学生在学习初中代数时也有指导作用，对家长指导、检查子女的学习也有参考作用。

本书作者周朋寿先生是具有四十年以上教学经验的上海市著名特级教师。

初中代数自学纲要

（第 二 册）

周朋寿 编

科学技术文献出版社出版

上海新华印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

开本 787×1092 1/32 印张 5.5 字数 117,000

1987 年 12 月第 1 版 1987 年 12 月第 1 次印刷

印数 1--35,000 本

社科新书目：182--094

统一书号：7176·70 定价：1.00 元

ISBN 7-5023-0013-9/G·6

目　　录

第 五 章

二元一次方程组

5.1 二元一次方程

1

[**学习要点**] 1．含有两个未知数，并且含有未知数的项的次数是 1 的方程叫做**二元一次方程**。显然，它要符合三个条件：(1)必须含有两个未知数；(2)含有未知数的项的次数必须是一次，但不能说未知数的次数是 1；(3)方程两边的代数式必须都是关于未知数的整式。例如，$3x-5=\frac{1}{2}x$，$x-5xy=2$，$x-\frac{1}{y}=3$ 都不是二元一次方程。

2．适合一个二元一次方程的每一对未知数的值，叫做这个二元一次方程的**一个解**。要注意，这里的"一个解"是指"适合方程的一对未知数的值"，记作$\begin{cases}x=?,\\y=?。\end{cases}$不能只写成"$x=?$"，或只写成"$y=?$"。

3．二元一次方程的解的特点：任何一个二元一次方程都有无数个解。要知道虽然有无数个解，但并不是任意一对未知数的值都是方程的一个解；这里指的是适合这个方程中表示两个未知数之间的关系的未知数的值有无数对。由此可知，二元一次方程的解不仅具有相关性，还具有不定性。

另外，如果二元一次方程的未知数涉及实际问题时，或

者有某些条件限制时，它的解就不一定有无数个，甚至没有解。例如，(1)两数的和是5，这两个数可以任意数值；解有无数个。(2)两根木材共长 5 米，那么每根木材的长可以大于零而小于 5 的数值；解也有无数个。(3)某校学生参加数学竞赛有 5 人得奖，男、女学生的人数只能是不小于零而不大于 5 的整数；解只有 6 个。(4)当未知数 x 和 y 都是自然数时，方程 $x+y=1$ 就没有解。

4．由二元一次方程的所有的解组成的集合，叫做这个二元一次方程的**解集**。它的元素有无穷多个。

[**练习指导**] 在本课学习中，应结合进行如下一些类型的练习：

1．判别给出的方程是不是二元一次方程？如果不是，要知道为什么？对此，只要根据上述三个条件来判别：(1)含有两个未知数，(2)含有未知数项的次数是1，(3)整式方程。三个条件缺一不可。

2．判断给出的一对未知数的值是否是二元一次方程的一个解。这只要把这一对未知数的值代入二元一次方程，看是否适合便可。

3．求二元一次方程的解。一般是根据给出的方程，从已知的一个未知数的值求出与它对应的另一个未知数的值。

(1) 先化成含有一个未知数的代数式表示另一个未知数的形式，然后用已知值代入求它的对应值。这样计算简便。

(2) 如果未知数有条件限制时，必须符合条件要求。例如，二元一次方程 $4x+y=20$ 的所有正整数解只能是 $\begin{cases}x=1,\\y=16;\end{cases}$ $\begin{cases}x=2,\\y=12;\end{cases}$ $\begin{cases}x=3,\\y=8;\end{cases}$ $\begin{cases}x=4,\\y=4。\end{cases}$ 因为 $y=4(5-x)$，x 只能是大于零

而小于 5 的整数。

［**参考习题**］

1．在 $\begin{cases}x=6,\\y=3,\end{cases}$ $\begin{cases}x=7,\\y=3\frac{1}{2},\end{cases}$ $\begin{cases}x=6\frac{1}{2},\\y=3\frac{3}{4}\end{cases}$ 各对数值中，

（1）方程 $3x-2y=12$ 的解是________________。

（2）方程 $x+2y=14$ 的解是________________。

（3）方程 $3x-2y=12$ 和 $x+2y=14$ 的公共解是________________。

2．在下列方程中，先用 x 表示 y，再用 y 表示 x：

（1）$2(2-x)+3(3-y)=9$。

答：$y=$________；$x=$________。

（2）$3(2x+y+1)+4x+5y=7x+9x+3$。

答：$y=$________；$x=$________。

3．甲、乙两个房间共有 8 人，

（1）每个房间的人数能不能唯一确定？

答：________。

（2）每个房间各有几人？

答：________________________。

4．在方程 $2x+3y-4+3kx-2ky+4k=0$ 中，

（1）k 等于什么数值时，方程没有 x 项？

（2）k 等于什么数值时，方程没有 y 项？

（3）k 等于什么数值时，方程没有常数项？

（4）k 等于什么数值时，$x=3$，$y=6$ 是方程的解？

5．当 x 取不大于 5 的正整数时，求出方程 $3x-2y=1$ 的解。

6．方程$x+2y=18$的解中有一个解是由相同的两个数组成的，求出这个解。

5.2 二元一次方程组

2

［**学习要点**］ 1．由几个一次方程组成，并含有两个未知数的方程组，叫做**二元一次方程组**。方程组里，方程的个数与未知数的个数一般来说是可以不同的。本章所研究的一次方程组，都是指未知数的个数与方程的个数相同的一次方程组。但须注意，在二元一次方程组的两个方程中，不一定每个方程都有两个未知数，只要是在两个方程中未知数的个数共有两个。如方程组$\begin{cases}x+y=5,\\2y+3z=7,\end{cases}$虽然每个方程都是二元一次方程，但方程组里共有$x$、$y$、$z$三个未知数，所以不是二元一次方程组。

2．书写方程组时，要用括号“{”把各个方程合写在一起。

3．方程组里各个方程的公共解，叫做这个**方程组的解**。就是说，方程组的解既适合第一个方程又适合第二个方程。如果从集合图形上看，方程组的解是两个方程的解集的公共部分。记作$\begin{cases}x=?,\\y=?\end{cases}$的形式。

4．以前，一次方程的解也可以叫做根。但是，方程组的解不能叫根。

5．虽然二元一次方程有无数个解，往往认为从两个方程中总可以找到它们的公共解，但在特殊情况时，二元一次方程组不一定有解。如$\begin{cases}x+y=3,\\x+y=5\end{cases}$是无解，因为这两个方程是

矛盾的。

［练习指导］ 1．判定一个方程组是不是二元一次方程组。这只要根据两个条件便可判定：(1)方程组里的每一个方程都是一次方程；(2)方程组未知数的个数总共有两个。此两条件缺一不可，否则便不是二元一次方程组。

2．验证一对数值是不是给定的二元一次方程组的解。这只要把这一对数值代入给定的方程组中的每一个一次方程，看是否适合便可。

3．利用集合图形及对应关系，从已知一个未知数的值，求出方程组中另一个未知数的值，从而找出方程组的一个解；从两个二元一次方程的解集里，确定这个二元一次方程组的解。

［参考习题］

1．已知二元一次方程组 $\begin{cases}2x-y=7 & ①,\\ x+2y=-4 & ②。\end{cases}$ 问下列各对 x、y 的值中，哪些是方程①的解？哪些是方程②的解？哪些是方程组的解？

(1) $\begin{cases}x=1,\\ y=-5;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=0,\\ y=-2;\end{cases}$ (3) $\begin{cases}x=2,\\ y=-3;\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x=3,\\ y=-1;\end{cases}$ (5) $\begin{cases}x=-2,\\ y=-1。\end{cases}$

答：____，____，____是方程①的解；____，____，____是方程②的解；____是方程组的解。

2．二元一次方程 $4x-3y=6$ 的解是不是二元一次方程组 $\begin{cases}x+y=5,\\ 4x-3y=6\end{cases}$ 的解？为什么？

答：________________________________。

3．方程组 $\begin{cases}x+y=5,\\4x-3y=6\end{cases}$ 的解是不是方程 $4x-3y=6$ 的解？为什么？

答：____。

4．(1)当 $a=2$ 时，方程组 $\begin{cases}ax+y=1,\\2x+y=2\end{cases}$ 有没有解？

(2)当 $a\neq 2$ 时，它有几个解？

答：(1) ________；(2) ________。

5．设 $\begin{cases}x=a,\\y=b\end{cases}$ 是方程 $5x-7y=2$ 的一个解，求 a 与 b 的关系。

6．求方程 $2x-3y=7$ 的三个整数解。

*7．在 $y=kx+b$ 中，当 $x=5$ 时，$y=6$；当 $x=-1$ 时，$y=-2$，求 k、b的值。

5.3 用代入法解二元一次方程组

3

［**学习要点**］ 1．解二元一次方程组的基本思想，就是把“二元”转化为“一元”。一个办法是用“代入法”，即通过等量代换“代入”的方法，消去一个未知数，从而得出一个一元一次方程，再求方程组的解。

2．消元时必须注意，由方程组的两个方程中的任何一个方程得出两个未知数的关系式后，只能代入另一个方程，不能代入原方程(如果这样代入，实际上没有用到另一个方程，就不可能求得两个方程的公共解)。

3．方程组的解是一对数值，写成 $\begin{cases}x=?,\\y=?。\end{cases}$ 决不能求出一个未知数的值，即作为方程组的解。

4．用代入法解二元一次方程组的一般步骤：

（1）将方程组里的一个方程变形，用含有一个未知数的代数式表示另一个未知数；

（2）用这个代数式代入另一个方程，消去一个未知数，得到一个一元一次方程；并解这个一元一次方程；求出一个未知数的值；

（3）把求得的这个未知数的值代入第一步得到的代数式中，求出另一个未知数的值；从而得到方程组的解。

（4）检验这一对未知数的值是否适合原方程组。

［**练习指导**］ 利用代入消元法，解二元一次方程组。

1．在代入消元时，应选择未知数的系数最简单的那个方程来从中求出关系式，以使变形后的方程比较简单，并且代入后化简也容易。

2．当求出第一个未知数的值后，要采用最简便的方法去求第二个未知数的值。

3．要检验所得是不是原方程的解，应把这对数值代入原方程里的每一个方程进行检验。（可用口算检验，不必写出来。）

4．如果方程中各项系数有公约数时，应先约简，使运算简便。

［**参考习题**］

用代入法解下列各方程组：

1．$\begin{cases} y-3x=0, \\ 7x-2y=2。\end{cases}$ **2**．$\begin{cases} x+3y=5, \\ 3x-6y=6, \end{cases}$

3．$\begin{cases} 5x+3y=0, \\ 12x+7y+1=0。\end{cases}$ **4**．$\begin{cases} 3y-8z \ \text{[illegible]} =0, \\ 5y+3z=\dfrac{11}{12}。\end{cases}$

5. $\begin{cases}\frac{x}{2}-2y=4\frac{1}{2},\\ x+\frac{y}{2}=-9。\end{cases}$　　6. $\begin{cases}8m-12n=-40,\\ 6m+5n=12。\end{cases}$

7. 已知 $\begin{cases}x=1,\\ y=2\end{cases}$ 是方程组 $\begin{cases}ax-3y=1,\\ x+by=5\end{cases}$ 的解，求 a 和 b 的值。

4

〔学习要点〕 解方程组时，要仔细观察题目。如果方程中有相同部分的代数式，可把这相同部分的代数式作为整体，使运用代入法求解简便。如方程组 $\begin{cases}x+y=5,\\ 3(x+y)-y=13,\end{cases}$ 可把 $x+y$ 作为整体(换元法)。

〔练习指导〕 1. 在上节课正确掌握代入消元法的基础上，进一步提高、熟练解题能力。

2. 换元法是常用方法之一，可使解题方便。如方程组 $\begin{cases}\frac{2x-1}{5}+\frac{3y-2}{4}=2,\\ \frac{3y-2}{4}-\frac{2x-1}{3}=0。\end{cases}$ 可设 $2x-1=X$，$3y-2=Y$，则原方程组就变为 $\begin{cases}\frac{1}{5}X+\frac{1}{4}Y=2,\\ \frac{1}{4}Y-\frac{1}{3}X=0。\end{cases}$ 先求 X、Y，再求 x、y 的值。

3. 如果三个代数式连等，可先改写成方程组。如 $3x+2y=5y+12x=-3$，先写成 $\begin{cases}3x+2y=-3,\\ 12x+5y=-3,\end{cases}$ 解法可简便。

〔参考习题〕

用代入法解下列各方程组：

1. $\begin{cases} x+y=5, \\ 3(x+y)-y=13。 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{5}+\dfrac{3y-2}{4}=2, \\ \dfrac{3y-2}{4}-\dfrac{2x-1}{3}=0。 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 5\left(\dfrac{2}{3}+y\right)-4(2x-6)=20, \\ 20(2x-6)+10\left(\dfrac{2}{3}+y\right)=52。 \end{cases}$

4. $3x+2y=5y+12x=-3$。

5. $\begin{cases} 3(2x-y)+4(x-2y)=87, \\ 2(3x-y)-3(x-y)=82。 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 4x+5y=3.5, \\ x-1=1.8-x-6y。 \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{x+3}{2}+\dfrac{y+5}{3}=7, \\ \dfrac{x+4}{3}-\dfrac{2y-3}{5}=2。 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 7+\dfrac{x-3y}{4}=2x-\dfrac{y+5}{3}, \\ \dfrac{10(x-y)-4(1-x)}{3}=y。 \end{cases}$

5.4 用加减法解二元一次方程组

5

［**学习要点**］ 用加减法，也可把二元一次方程组转化而得到一个一元一次方程，进而求出方程组的解。具体说来，

(1) 当两个方程中有一个未知数的系数是互为相反数时，把这两个方程的两边分别相加；当系数相同时，则相减。

(2) 如果两个方程中，同一个未知数的系数的绝对值都不相等，不能简单地相加减来消元。这时，要先把一个方程或两个方程的两边的各项都乘以适当的数，使两个方程里的某一个未知数的系数的绝对值相等。

用加减法解二元一次方程组的一般步骤：

(1) 把一个方程或者两个方程的两边乘以适当的数，使两个方程里的某个未知数的系数的绝对值相等；

(2) 把所得的两个方程的两边分别相加或相减，消去这个未知数，得出另一个未知数的一元一次方程，并解这个方程，求得一个未知数的值；

(3) 用求得的这个未知数的值代入方程组里的任何一个方程，求出另一个未知数的值，从而得到方程组的解。

[**练习指导**] 利用加减消元法，解二元一次方程组。

1. 方程变形时，必须使方程两边各项都要乘(除)以一个相同的数。

2. 如果未知数的系数是分数，应先把方程的两边同乘以各分母的最小公倍数，消去分母。

3. 有时还要先把两个方程加以整理，使含有未知数的项在等号左边，不含未知数的项在右边，并且合并同类项。

[**参考习题**]

用加减法解下列各方程组：

1. $\begin{cases} 2x+y=5, \\ 3x-y=15。\end{cases}$

2. $\begin{cases} 2y-3z=8, \\ 7y-5z=-5。\end{cases}$

3. $\begin{cases}7x-3y+1=0,\\4x-5y=-17。\end{cases}$

4. $\begin{cases}\dfrac{5m}{2}+\dfrac{n}{5}=-4,\\\dfrac{m}{3}+\dfrac{n}{6}=\dfrac{1}{6}。\end{cases}$

5. $\begin{cases}3m=2n+11,\\4m-3=5n。\end{cases}$

6. $\begin{cases}\dfrac{x}{3}=3+\dfrac{y}{4},\\\dfrac{y}{3}=13-\dfrac{x}{2}。\end{cases}$

7. $\begin{cases}4(x+2)=1-5y,\\3(y+2)=3-2x。\end{cases}$

8. $\begin{cases}3(x-1)=4(y-4),\\5(y-1)=3(x+5)。\end{cases}$

9. 已知方程组$\begin{cases}mx+2y=n,\\4x-ny=2m-1\end{cases}$的解是$\begin{cases}x=1,\\y=-1,\end{cases}$求 m、n 的值。

10. 已知 x^2+bx+c，当 $x=1$ 时，它的值是 2；当 $x=-1$ 时，它的值是 8，求 b、c 的值。

6

［**练习指导**］ 1. 用加减消元法解系数较复杂的二元一次方程组，要养成习惯，先经过去分母、去括号、移项、合并同类项，化简为

$$\begin{cases}A_1x+B_1y=C_1,\\A_2x+B_2y=C_2\end{cases}$$

的标准形式。

2. 如果方程写成比例形式，可根据比例基本性质，整理成方程的一般形式。如方程 $x:y=3:4$，可整理成 $4x=3y$，即 $4x-3y=0$。

［**参考习题**］

用加减消元法解下列各方程组：