微积分教学参考用书（上）

数列与极限

李长明

01

贵州人民出版社

微积分教学参考用书（上）

数 列 与 极 限

李 长 明

微积分教学参考用书（上）

数列与极限

李长明

贵州人民出版社出版

（贵阳市延安中路5号）

贵州新华印刷厂印刷　　贵州省新华书店发行

787×1092毫米 [illegible]开本　10.5印张　219千字

1981年11月第1版　　1981年11月贵阳第1次印刷

印数1——6,000

书号7115·593　　定价0.83元

序　　言

微积分在初创时期，由于缺乏严格的逻辑基础，曾遭到了许多主观唯心主义哲学家的猛烈抨击，其中最著名的代表人物是贝克莱*主教。但是，鉴于微积分在几何学、力学、天文学等方面的广泛应用，连贝克莱也不得不承认微积分“是一把万能的钥匙，借着它，近代数学家打开了几何以至大自然的秘密”。**因此，在当时，微积分的基础尽管还有严重的缺陷，而实践的需要却有力地推动着它蓬勃地向前发展。现在，随着科学的不断进步，更加显示出它是各门自然科学和各类技术科学必不可缺的锐利工具。科学发展的历史充分地证实了马克思曾预言的“一门学科只有当它达到了能够运用数学时，才算真正发展了”。***

为此，在中学里就学习一些微积分的初步知识，无论是继续深造或走上工作岗位，都是很有必要的。然而，微积分的一些基本概念和严密的逻辑基础，即使在大学的教学中也是公认的难点。因此，为奔忙于教学第一线的中学教师编写一本有助于改进教学、提高业务水平的参考书，应该是我们乐于效劳的事，这也正是促使我接受这一任务的动机。但是，在目前各种版本的微积分已经众多的情况下，结合个人的心得体会，努力写出在概念的引入、内容的阐述和例题的选择等方面不完全落套的书，其困难是十分显然的。然

而，作者认为，作为一种参考书，也只有经这样的努力，才有问世的价值，只是限于自己的水平，不当之处以至错误的地方是难免的。但尝试的错误总比抄袭的正确要有意义些，何况发现错误加以纠正，也是一种进步和提高，并能起到抛砖引玉的作用，为此，恳望广大读者不吝指正。

本书初稿完成之后，经谭鑫、林敬藩、庞之垣三同志看过，特别是挚友敬藩同志还把自己教学中的一些体会主动提出供我参考，两个表中的数据是陈尔淦同志提供的，序言又经蒋希文老师加以润色，另外，在本人遇到挫折时，陈匡、王临池同志曾给以热情的鼓励和有力的支持，对以上的关心和帮助，在此一并表示深切的谢意！

李 长 明

1981年于贵州民院

---

* 贝克莱（George Berkeley。1685——1753年）爱尔兰的主教。他嘲笑无穷小量是“已死量的幽灵”，对微积分的攻击，极尽讥讽挖苦之能事。当然，他的目的是企图证明微积分的原理并不比基督教的教义更加清楚。然而，这些攻击却激起了微积分基础的重建工作。

** 见梁宗巨：《世界数学史简编》

*** 见拉法格：《马克思回忆录》

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

第八章　级　数

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　绪论——研究数列及其极限的必要性

§1　生产实践和科学研究的需要

在研究自然现象和生产过程中，经常都会遇到许多数列及其极限的问题。现从各方面分别举例说明：

（一）物理问题

在伽里略*以前的一千多年，人们看见树叶轻飘飘地落下来和石块急速地降落，就以为物体下落的快慢与物体的重量成正比。年轻的伽里略推翻了这个传统的观念，在比萨斜塔上作了一个著名的实验，十磅的铁球和一磅的铁球果然同时落地。这就说明，树叶和石头之所以不同时落地，是因为空气对它们产生的阻力不同。因此，严格地讲，物体下落的快慢与重量无关是在真空的条件下。所以，还需要证实：树叶和石块在真空中也确实同时落地，那就应先制造一个真空的容器。

假定有一个抽气机，每次能抽出的空气是原来的$\frac{1}{2}$，反复抽下去，那末，空气的余量就组成一个数列：

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots$$

* 伽里略（G.Galileo1564—1642）意大利人，著名的物理学家。

这正类似于我国古代惠子所描述的："一尺之棰，日取其半，万世不竭"。尽管如此，但抽的次数多了，显然就非常接近于真空，若残余的一小点空气所产生的阻力可忽略的话，就可看成是在真空里所作的实验．显然，根据可以忽略的空气量，就能算出应抽的次数．现假定可以忽略的空气量为 ε．那末，解不等式

$$1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}<\varepsilon$$

求出最小的 n，就是至少应抽的次数．

（二）化学问题

在化学中，为了提纯，或除去某种成份，经常会遇到稀释的问题．例如，为了除去纸浆中所含的盐，常用的方法是，在纸浆中倒入一些清水，搅拌后使之澄清，然后再倒出上面不含纸浆的盐水，就使纸浆的含盐量减小，重复这个过程，就使盐量继续减少．显然，用这种方法不可能完全除掉所有的盐份，但也可能使它少到可以忽略的地步，只是清洗的次数要多．为了计算出所需的次数，就应先算出各次洗掉的盐量．为此，假定原纸浆含有 a 千克盐水，其浓度为 c_0，每次倒入 b 千克的清水去搅拌，澄清后倒出不含纸浆的盐水仍是 b 千克，那么各次洗去的盐量可以分别计算如下：

因纸浆原有的含盐量应为 ac_0，倒入清水搅拌后含盐的浓度变为 $c_1=\dfrac{ac_0}{a+b}$，因此，再倒出的 b 千克盐水的含盐量为 bc_1，$\cdots$．依此算法，可以得出各次清洗后的浓度和含盐量，现将它们列表如下：

清洗次数	纸浆中的含盐浓度	清洗出的盐量	洗出的总盐量
1	$c_1=\frac{a}{a+b}c_0$	$bc_1=\frac{a}{a+b}bc_0$	$bc_1=\frac{a}{a+b}bc_0$
2	$c_2=\left(\frac{a}{a+b}\right)^2c_0$	$bc_2=\left(\frac{a}{a+b}\right)^2bc_0$	$\left(1+\frac{a}{a+b}\right)\frac{a}{a+b}bc_0$
⋮	⋮	⋮	⋮
n	$c_n=\left(\frac{a}{a+b}\right)^nc_0$	$bc_n=\left(\frac{a}{a+b}\right)^nbc_0$	$\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{a}{a+b}\right)^k\right]\frac{a}{a+b}bc_0$
⋮	⋮	⋮	⋮

由于微小的盐量可以忽略不计，因此，若用 ε 表示这个可以忽略的量．那末，从不等式

$$b-\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{a}{a+b}\right)^k\right]\frac{a}{a+b}bc_0<\varepsilon$$

求出最小的整数解，就可以定出应清洗的次数。

（三）生物问题

各类生物的繁衍都是一代一代地进行着，如果没有灭绝的话，它们的总数都构成一个无尽的数列．例如，假定细菌从开始是10个的时候进行繁殖，每繁殖一次，增长一倍，若它们的生长无妨碍，那么，其总数也形成一个等比数列：

$$10,\ 2\times10,\ 2^2\times10,\ 2^3\times10,\ \cdots,\ 2^n\times10,\ \cdots$$

它与前两类数列不同的是，前者都是趋向某个定数，而此数列却是无限增大的。

（四）经验公式

在自然科学和技术中，都需要根据实验数列，建立某些

变化的规律．如物理中将气体的体积与温度、压力所测得的一系列数据（以一克氧为例），以对应的形式排成下表：

温度 T（°K）	273.2	278.2	283.2	……
压力 P（atm）	0.2500	0.5000	0.7500	……
体积 V（l）	2.802	1.420	0.9682	……

分析大量的数据，就会发现，体积与温度成正比，与压力成反比，即有

$$V=C\cdot\frac{T}{P}$$

其中 C 为常量．

这样总结出的公式，究竟正确与否，尚有待于检验．设

$$V=C\cdot\frac{T}{P}$$

是按公式算出的体积，V' 是实际测出的体积，考虑到测量带来的误差，如果 ε 是容许的误差，那么，当

$$|V-V'|<\varepsilon$$

在任何情形下皆成立时，就可认为公式是正确的．

又如，反映元素放射性强弱的“半衰期”——强度减弱一半所需的时间．现在知道镭的半衰期是1622年，铀的半衰期是 4.51×10^9 年．显然，不能等那么久的时间才定出它的半衰期，而应先测定出衰变速率的变化规律，然后，据此算出它的半衰期．为此，就要测定一系列衰变速率与相应的含

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com