

微积分教学参考用书（上）

数列与极限

李 长 明

贵 州 人 民 出 版 社

微积分教学参考用书（上）

数 列 与 极 限

李 长 明

微积分教学参考用书(上)

数 列 与 极 限

李 长 明

贵州人民出版社出版

(贵阳市延安中路5号)

贵州新华印刷厂印刷 贵州省新华书店发行

787×1092毫米 1/32开本 10.5印张 219千字

1981年11月第1版 1981年11月贵阳第1次印刷

印数1——6,000

书号7115·593 定价0.83元

序 言

微积分在初创时期，由于缺乏严格的逻辑基础，曾遭到了许多主观唯心主义哲学家的猛烈抨击，其中最著名的代表人物是贝克莱*主教。但是，鉴于微积分在几何学、力学、天文学等方面的广泛应用，连贝克莱也不得不承认微积分“是一把万能的钥匙，借着它，近代数学家打开了几何以至大自然的秘密”。**因此，在当时，微积分的基础尽管还有严重的缺陷，而实践的需要却有力地推动着它蓬勃地向前发展。现在，随着科学的不断进步，更加显示出它是各门自然科学和各类技术科学必不可缺的锐利工具。科学发展的历史充分地证实了马克思曾预言的“一门学科只有当它达到了能够运用数学时，才算真正发展了”。***

为此，在中学里就学习一些微积分的初步知识，无论是继续深造或走上工作岗位，都是很有必要的。然而，微积分的一些基本概念和严密的逻辑基础，即使在大学的教学中也是公认的难点。因此，为奔忙于教学第一线的中学教师编写一本有助于改进教学、提高业务水平的参考书，应该是我们乐于效劳的事，这也正是促使我接受这一任务的动机。但是，在目前各种版本的微积分已经众多的情况下，结合个人的心得体会，努力写出在概念的引入、内容的阐述和例题的选择等方面不完全落套的书，其困难是十分显然的。然

而，作者认为，作为一种参考书，也只有经这样的努力，才有问世的价值，只是限于自己的水平，不当之处以至错误的地方是难免的。但尝试的错误总比抄袭的正确要有意些，何况发现错误加以纠正，也是一种进步和提高，并能起到抛砖引玉的作用，为此，愿望广大读者不吝指正。

本书初稿完成之后，经谭鑫、林敬藩、庞之垣三同志看过，特别是挚友敬藩同志还把自己教学中的一些体会主动提出供我参考，两个表中的数据是陈尔淦同志提供的，序言又经蒋希文老师加以润色，另外，在本人遇到挫折时，陈匡、王临池同志曾给以热情的鼓励和有力的支持，对以上的关心和帮助，在此一并表示深切的谢意！

李长明

1981年于贵州民院

* 贝克莱 (George Berkeley. 1685—1753年) 爱尔兰的主教。他嘲笑无穷小量是“已死量的幽灵”，对微积分的攻击，极尽讥讽挖苦之能事。当然，他的目的是企图证明微积分的原理并不比基督教的教义更加清楚。然而，这些攻击却激起了微积分基础的重建工作。

** 见梁宗巨：《世界数学史简编》

*** 见拉法格：《马克思回忆录》

目 录

第一章 绪论——研究数列及其极限的必要性

.....	(1)
§ 1 生产实践和科学研究的需要	(1)
(一) 物理问题.....	(1)
(二) 化学问题.....	(2)
(三) 生物问题.....	(3)
(四) 经验公式.....	(3)
§ 2 数学发展的需要.....	(7)
(一) 几何问题.....	(7)
(二) 代数问题.....	(9)
(三) 三角问题.....	(16)
§ 3 无穷与有限的重大差别	(16)
习题一.....	(22)

第二章 数列..... (23)

§ 1 数列的意义	(23)
§ 2 斐波那契 (Fibonacci) 数列	(27)
§ 3 循环数列	(28)
(一) 斐波那契数列的推广.....	(28)
(二) 循环数列.....	(28)
(三) 循环数列的确定.....	(29)
(四) 循环数列的性质.....	(30)

(五) 循环数列的通项公式	(31)
§ 4 数列常见的几种类型	(42)
(一) 以相邻两项的大小关系作为区分的 标志	(42)
(二) 以各项的绝对值是否有界作为区分 的标志	(45)
§ 5 数列的图象	(48)
(一) 在数轴上的表示法	(48)
(二) 在坐标平面上的表示法	(50)
§ 6 数列求和	(53)
(一) 和的符号与性质	(53)
(二) 三种求和方法的比较	(54)
(三) 连乘积的和、自然数的方幂和	(59)
(四) 部分分式的利用	(63)
(五) 三角函数列的和	(72)
(六) 混和数列的和	(73)
(七) 求和方法的推广与局限	(74)
§ 7 和的估值	(79)
§ 8 应用	(82)
习题二	(90)
第三章 数列的极限	(96)
§ 1 极限的定义	(96)
(一) 割圆术的普遍化与精确化	(96)
(二) 数列极限的定义	(102)
(三) 几何图示	(103)

(四) 极限的基本性质	(105)
(五) 依定义求极限之例	(106)
§ 2 几点注意	(113)
(一) 趋势的多样性	(113)
(二) ε 的任意性	(115)
(三) N 的存在性与多值性	(115)
(四) N 的求法	(117)
(五) 极限与代数运算的异同	(120)
§ 3 发散数列	(121)
(一) 带量词的命题及其否定	(121)
(二) 发散的定義	(128)
(三) 发散的類型	(130)
§ 4 无穷大量与无穷小量的阶	(133)
(一) 无穷大量的比较	(133)
(二) 无穷大量的阶	(134)
(三) 无穷小量的阶	(135)
习题三	(137)
第四章 极限的四则运算	(141)
§ 1 引言	(141)
§ 2 极限的四则运算	(142)
(一) 和 (差) 的极限	(142)
(二) 积的极限	(143)
(三) 商的极限	(144)
§ 3 关于极限存在的重要性	(146)
(一) 必不可少的前提	(146)

(二) 无穷小量与有界变量	(147)
(三) 含无穷大的待定式: $\infty - \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$	(148)
§ 4 四则运算的次数不能无限增多	(151)
(一) 利用求和公式使项数不变	(152)
(二) 截成两部, 使之皆可任意小	(155)
(三) 利用夹值定理	(159)
§ 5 平均值的极限及其应用	(159)
(一) 三种平均值	(159)
(二) 调和平均值的极限	(160)
(三) 应用	(161)
§ 6 加权平均值的极限及其应用	(165)
(一) 加权平均值的意义	(165)
(二) 加权算术平均值的极限	(166)
(三) 应用	(169)
(四) 施笃兹 (O·Stolz) 定理	(172)
习题四	(175)

第五章 不等式的极限与夹值定理

§ 1 不等式与极限	(179)
(一) 引言	(179)
(二) 不等式两边取极限的法则	(180)
§ 2 夹值定理及其应用	(181)
(一) 夹值定理	(181)
(二) 应用之例	(182)
§ 3 几何平均值的极限及其应用	(187)

(一) 几何平均值的极限	(187)
(二) 应用之例	(189)
(三) 推广——加权几何平均值	(191)
习题五	(196)
第六章 极限存在的判定	(198)
§ 1 确界和确界定理	(198)
(一) 集合的上、下界	(198)
(二) 确界概念	(199)
(三) 实数的统一形式	(200)
(四) 确界定理	(200)
§ 2 单调有界数列必有极限	(202)
§ 3 求极限的另一方法	(203)
§ 4 区间套定理	(210)
(一) 区间套	(211)
(二) 区间套定理	(211)
§ 5 收敛的充要条件——柯西准则	(212)
(一) 收敛的必要条件	(213)
(二) 收敛的充分条件	(214)
(三) 收敛的充要条件	(217)
(四) 应用	(217)
习题六	(219)
第七章 e 的引入及其性质	(221)
§ 1 e 的引入	(221)
(一) 复利的计算	(221)

(二) 稀释问题	(222)
§ 2 e 的定义	(223)
(一) $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 的递增性	(224)
(二) $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 的有界性	(226)
(三) e 的定义	(227)
§ 3 e 的级数表达式	(228)
(一) 级数的概念	(228)
(二) e 的级数形式	(229)
(三) 余项的估值	(230)
(四) e 是无理数	(231)
(五) e 的近似计算	(232)
§ 4 自然对数	(235)
(一) 以 e 为底的对数函数	(235)
(二) 对数 $\ln n$ 的估值	(236)
(三) 欧拉常数	(238)
(四) $\ln 2$ 的近似计算	(239)
习题七	(241)

第八章 级数

§ 1 级数与数列	(243)
§ 2 级数的基本性质	(244)
(一) 改变前有限个项并不影响收敛性	(244)
(二) 各项乘同一常数不影响收敛性	(245)
(三) 收敛级数可以逐项相加 (减)	(245)

(四) 收敛级数具有结合性	(246)
(五) 级数收敛的必要条件	(247)
(六) 级数收敛的充要条件	(247)
§ 3 正项级数	(248)
(一) 收敛的充要条件	(248)
(二) 比较判别法则	(251)
(三) 柯西判别法	(256)
(四) 达朗贝尔判别法	(260)
(五) 达朗贝尔与柯西判别法的比较	(262)
(六) 正项级数的可交换性	(265)
§ 4 交错级数	(266)
(一) 收敛的判别法	(266)
(二) 收敛级数的余式	(268)
(三) 交错级数之例	(269)
§ 5 绝对收敛与级数的可交换性	(272)
(一) 在级数中交换次序所产生的问题	(272)
(二) 绝对收敛	(274)
(三) 绝对收敛级数的分解	(275)
(四) 绝对收敛的级数是可交换的	(277)
(五) 非绝对收敛的级数不具有可交换性	(278)
习题八	(282)

第九章 极限的推广

§ 1 度量空间	(289)
(一) 距离的性质	(289)
(二) 度量空间的定义	(290)

(三) 度量空间之例	(291)
(四) 有界性	(299)
§ 2 度量空间内的极限概念	(299)
(一) 极限的定义	(299)
(二) 性质	(300)
§ 3 极限的进一步推广	(302)
(一) 极限与邻域	(302)
(二) 拓扑空间	(303)
(三) 极限的定义	(305)
附录 I 石瓦兹 (H.A.Schwarz) 之例	(307)
附录 I 三个平均值之间的大小关系	(311)

第一章 绪论——研究数列及其极限的必要性

§1 生产实践和科学研究的需要

在研究自然现象和生产过程中，经常都会遇到许多数列及其极限的问题。现从各方面分别举例说明：

(一) 物理问题

在伽里略*以前的一千多年，人们看见树叶轻飘飘地落下来和石块急速地降落，就以为物体下落的快慢与物体的重量成正比。年轻的伽里略推翻了这个传统的观念，在比萨斜塔上作了一个著名的实验，十磅的铁球和一磅的铁球果然同时落地。这就说明，树叶和石头之所以不同时落地，是因为空气对它们产生的阻力不同。因此，严格地讲，物体下落的快慢与重量无关是在真空的条件下。所以，还需要证实：树叶和石块在真空中也确实同时落地，那就应先制造一个真空的容器。

假定有一个抽气机，每次能抽出的空气是原来的 $\frac{1}{2}$ ，反复抽下去，那末，空气的余量就组成一个数列：

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

* 伽里略 (G. Galileo 1564—1642) 意大利人，著名的物理学家。

这正类似于我国古代惠子所描述的：“一尺之棰，日取其半，万世不竭”。尽管如此，但抽的次数多了，显然就非常接近于真空，若残余的一小点空气所产生的阻力可忽略的话，就可看成是在真空中所作的实验。显然，根据可以忽略的空气量，就能算出应抽的次数。现假定可以忽略的空气量为 ε 。那末，解不等式

$$1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} < \varepsilon$$

求出最小的 n ，就是至少应抽的次数。

(二) 化学问题

在化学中，为了提纯，或除去某种成份，经常会遇到稀释的问题。例如，为了除去纸浆中所含的盐，常用的方法是，在纸浆中倒入一些清水，搅拌后使之澄清，然后再倒出上面不含纸浆的盐水，就使纸浆的含盐量减小，重复这个过程，就使盐量继续减少。显然，用这种方法不可能完全除掉所有的盐份，但也可能使它少到可以忽略的地步，只是清洗的次数要多。为了计算出所需的次数，就应先算出各次洗掉的盐量。为此，假定原纸浆含有 a 千克盐水，其浓度为 c_0 ，每次倒入 b 千克的清水去搅拌，澄清后倒出不含纸浆的盐水仍是 b 千克，那么各次洗去的盐量可以分别计算如下：

因纸浆原有的含盐量应为 ac_0 ，倒入清水搅拌后含盐的浓度变为 $c_1 = \frac{ac_0}{a+b}$ ，因此，再倒出的 b 千克盐水的含盐量为 $bc_1, \dots$ 。依此算法，可以得出各次清洗后的浓度和含盐量，现将它们列表如下：

清洗次数	纸浆中的浓度	清洗出的盐量	洗出的总盐量
1	$c_1 = \frac{a}{a+b} c_0$	$bc_1 = \frac{a}{a+b} bc_0$	$bc_1 = \frac{a}{a+b} bc_0$
2	$c_2 = \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 c_0$	$bc_2 = \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 bc_0$	$\left(1 + \frac{a}{a+b}\right) \frac{a}{a+b} bc_0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$c_n = \left(\frac{a}{a+b}\right)^n c_0$	$bc_n = \left(\frac{a}{a+b}\right)^n bc_0$	$\left[\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{a}{a+b}\right)^k\right] \frac{a}{a+b} bc_0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

由于微小的盐量可以忽略不计，因此，若用 ε 表示这个可以忽略的量。那末，从不等式

$$b - \left[\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{a}{a+b} \right)^k \right] \frac{a}{a+b} bc_0 < \varepsilon$$

求出最小的整数解，就可以定出应清洗的次数。

(三) 生物问题

各类生物的繁衍都是一代一代地进行着，如果没有灭绝的话，它们的总数都构成一个无尽的数列。例如，假定细菌从开始是10个的时候进行繁殖，每繁殖一次，增长一倍，若它们的生长无妨碍，那么，其总数也形成一个等比数列：

$$10, 2 \times 10, 2^2 \times 10, 2^3 \times 10, \dots, 2^n \times 10, \dots$$

它与前两类数列不同的是，前者都是趋向某个定数，而此数列却是无限增大的。

(四) 经验公式

在自然科学和技术中，都需要根据实验数列，建立某些

变化的规律。如物理中将气体的体积与温度、压力所测得的一系列数据（以一克氧为例），以对应的形式排成下表：

温度 T ($^{\circ}\text{K}$)	273.2	278.2	283.2	
压力 P (atm)	0.2500	0.5000	0.7500	
体积 V (l)	2.802	1.420	0.9682	

分析大量的数据，就会发现，体积与温度成正比，与压力成反比，即有

$$V = C \cdot \frac{T}{P}$$

其中 C 为常量。

这样总结出的公式，究竟正确与否，尚有待于检验。设

$$V = C \cdot \frac{T}{P}$$

是按公式算出的体积， V' 是实际测出的体积，考虑到测量带来的误差，如果 ε 是容许的误差，那么，当

$$|V - V'| < \varepsilon$$

在任何情形下皆成立时，就可认为公式是正确的。

又如，反映元素放射性强弱的“半衰期”——强度减弱一半所需的时间。现在知道镭的半衰期是1622年，铀的半衰期是 4.51×10^9 年。显然，不能等那么久的时间才定出它的半衰期，而应先测定出衰变速率的变化规律，然后，据此算出它的半衰期。为此，就要测定一系列衰变速率与相应的含