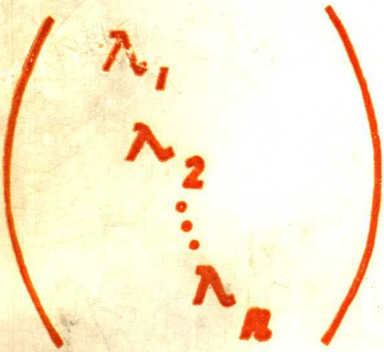
线性代数与概率统计的理论及解题分析



主编　姜效先　萧　红

云南科技出版社

线性代数与概率统计的理论及解题分析

主　编　姜效先　萧　红

副主编　王　慧　侯俊林　王晓艳

编　著　（以姓氏笔划为序）

王　源　王　慧　王晓艳

冯振山　赵呈健　侯俊林

姜效先　萧　红

云南科技出版社

责任编辑 王 韬
封面设计 吴 焱

线性代数与概率统计的理论及解题分析

姜致光 萧 红 主编

云南科技出版社出版发行（昆明市书林街100号）
河南财经学院印刷厂印装

开本：850×1168 1/32 印张：20.5 字数：450千
1996年3月第1版 1996年3月第1次印刷
印数：1—3000

ISBN 7—5416—0794—0/O·18 定价：19.80元

前　言

改革开放使神州大地春意盎然，深化改革促进了高等教育的蓬勃发展。但高校中传统教材体系与改革的形势极不相适应，教育改革的力度亟需加大。教材改革做为教育改革的基础工程，愈来愈受到了人们的重视和关注。

“线性代数”与“概率统计”是理工、农医和经济类专业必修的两门基础课程。由于“线性代数”概念的抽象性和“概率统计”研究对象与研究方法的特殊性，使得刚熟悉了分析方法的学生学习起来有一定的困难，加之传统教材的理论与方法，正课与习题课的相分离更增加了学习的难度。为克服传统教材的弊端，解决学生学习上的困难，我们抱着对教材改革积极参与的态度，根据自己多年的讲授经验，对教材内容的理解，以及在辅导学生学习实践过程中获取的信息资料，大胆地进行了改革的探索，编写了《线性代数与概率统计的理论及解题分析》这本书。将“线性代数”与“概率统计”两本教材合二为一，使理论知识与方法技巧，正课教材与习题课教材有机地结合起来。突出方法，突出实践性，对理论上的繁难推证及其传统上的系统性做了简化处理。

本书分上、下两篇，上篇为线性代数，下篇为概率统计。各章由基本理论、例题分析、习题解答与练习题三大部分组成。基本理论部分力求简明扼要，省去了定理的证明过程，突出了重点内容，形式上仍按章节排出。例题分析部分是习题课的材料，这部分作为理论与技能之间的桥梁和纽带，其重要性是不言而喻的。我们在选择例题时，首先考虑例题的代表性，既注意了例题类型的多样性，又照顾了例题对知识的覆盖面，同时还兼顾了例题所含方法技巧的难易层次。希望学生通过对这部分的学习，达到理

解概念、熟悉理论、掌握方法、善于分析、灵活解题的目的。第三部分习题解答与练习题是为学生提供的实践材料。我们对和内容相配套的习题做了详细解答，从而使本书具备了教材与题解的两项功能，我们认为它们的有机结合一定会对学生的学习产生有益的效果。同时又以标准化试题形式给出了不同类型的练习题，为学生提供了对掌握知识情况进行自我检查、自我评估的标准和条件。

本书末附有（1991 年—1995 年）八套历届高等教育自学考试高等数学（二）的试题，并做了较详细的解答。这不仅对学生掌握知识，进行自我评估有所裨益，而且可以使学生熟悉自学考试的题型，了解自考的试题量和难易程度，是参加自学考试的学生急需的一本完整而难得的复习资料。

本书可作为高等院校“线性代数”和“概率统计”课程的简明教材。与其他同类教材相比除其篇幅简短外，具有例题、练习题等实践材料丰富的特点。本书也可以作为成人高等教育学习高等数学（二）的教材和学习指导书，尤其对参加高等教育自学考试的学生来说是一本针对性极强的自学指导书。因为其中的不少材料来源于自学考试，更贴近自考大纲的基本要求。

本书上篇线性代数部分由侯俊林、王晓艳、赵呈健编写，下篇概率统计及附录部分由姜效先、萧红、王慧、冯振山、王源编写。姜效先、萧红任主编，王慧、侯俊林、王晓艳任副主编，由他们统筹策划、主编总纂并审定全书。

由于我们水平有限，时间仓促，不妥之处在所难免，诚望读者不吝赐教，予以斧正，将不胜感激。

编者

1995 年 5 月于河南财经学院

目　　录

上篇　线性代数

下篇　概率统计

附　录

上篇　线性代数

第一章　行列式

第一节　行列式的定义

定义 1.1　用 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix} \tag{1.1}$$

称为 n 阶行列式，记作 A，其中横排称为行，纵排称为列. 记 M_{ij} 为 a_{ij} 的余子式，即由行列式 A 中划去第 i 行第 j 列后由剩下的 $n-1$ 行 $n-1$ 列元素组成的行列式，即：

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.2}$$

定义 1.2　在行列式 A(1.1 式)中，第 i 行第 j 列的元素 a_{ij} 的代数余子式为 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，这里 M_{ij} 是 a_{ij} 的余子式.

定义 1.3　n 阶行列式 A 的值

$$\begin{aligned} A &= a_{11}M_{11}-a_{21}M_{21}+\cdots+(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}+\cdots+(-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1} \\ &= a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1} \end{aligned} \tag{1.3}$$

(1.3)式又称为 A 按第一列的展开式.

定理 1.1　设 A 是一个 n 阶行列式，则对任意的 j，$1<j\leqslant n$，

$$
\begin{aligned}
A &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}A_{ij}
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

这是 A 按任意的 j 列($1<j\leqslant n$)的展开式.

第二节　行列式的性质

定义 1.4　将行列式 A 的行与列互换后得到的行列式,称为 A 的转置行列式,记为 A^T 或 A'. 即如果

$$
A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

则

$$
A' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

性质 1　将行列式转置,行列式的值不变,即 $A'=A$.

由此性质知,行列式的行具有的性质,它的列也同样具有,反之亦然.

推论　任一行列式 A 按列展开与按行展开是一样的,也就是对 A 有

$$
\begin{aligned}
A &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \\
&= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (1 \leqslant i, j \leqslant n)
\end{aligned}
$$

性质 2　用数 k 乘行列式某行(列),等于以数 k 乘此行列式. 即如果设 $A=|a_{ij}|$,则

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = kA$$

推论 1 若行列式的某一行(或某一列)的元素全为零,则这个行列式的值等于零.

推论 2 若行列式某一行(或列)的所有元素有公因子 c,则公因子 c 可以提到行列式外面.

性质 3 交换行列式的两行(或列),行列式变号.

推论 如果行列式 A 有两行(或两列)元素相同,则行列式值等于零.

性质 4 如果行列式 A 的某两行(或两列)成比例,则行列式值等于零.

性质 5 行列式具有按行(或列)的可拆性. 即

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 6 将行列式某一行(或列)的所有元素同乘以数 k 后加到另一行(或列)对应位置的元素上,行列式的值不变.

第三节　行列式的计算

本章的主要问题是关于行列式的计算，这里仅就一些常见的类型和常用的方法加以介绍.

1. 二阶三阶行列式的沙流氏规则法

2. n 阶行列式的定义法

这种方法一般不采用，因为这时要计算 $n!$ 个乘积，且每个乘积中又有 n 个元素相乘，共需做 $n!\times(n-1)$ 次乘法，当 n 较大时相当麻烦，它只在行列式中零元素较多且只需计算 1～2 个乘积时才用.

3. 零值法

这种类型常见于一些行列式各行(列)形式基本一样，只是字母的符号略有不同，具体的做法是将某一行(列)的若干倍加到另外两行(列)上，使其出现两行(列)成比例，其值则为零.

4. 化三角形行列式法

这是一种常用的方法，利用行列式性质将行列式化成上三角形行列式或下三角形行列式，从而得出结论(三角形行列式的值等于主对角线上元素乘积).

5. 降阶法

利用行列式展开定理可将高阶行列式降成低阶行列式，从而使行列式的计算得以简化. 降阶时，一般遵循这样一个原则：按零元素较多的行或列展开. 如果是 n 阶行列式还要注意使降阶后的行列式为三角形行列式.

6. 递推法

这种方法的一般步骤是：从原始行列式出发，找到高阶行列式和一个或几个同型的低阶行列式之间的关系式(称为递推关系)后，再归纳运算出结果，递推关系可由行列式按一行(列)展开直接

得到，也可按其它方法得到.

7. 范德蒙行列式法

它是将原行列式利用行列式性质化成范得蒙行列式，再利用范德蒙行列式的结果加以计算的一种方法. 范德蒙行列式为：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant i,\ j\leqslant n} (x_j - x_i)$$

8. 拆开法

当行列式中的元素有两数相加时，将原行列式拆成几个简单的行列式加以计算的一种方法.

9. 加边法

这种方法也叫升降法，即在原行列式的边上加一行一列，使阶数增加一阶，但行列式的值不变. 一般来说，高阶行列式比低阶行列式计算更复杂，但合理的选择添加行和列中的元素，使得升阶后的行列式更便于计算，则可试用升降法.

以上介绍了关于行列式计算的几种方法，在这几种方法中，以化三角形行列式法应用较多. 应该注意，同一行列式可能通常会有多种解法，要加以比较从中选出比较简便易行的方法. 当然这几种方法并不是独立的，一个问题的解决往往是这几种方法的综合运用，我们要灵活掌握.

第四节　克莱姆法则

定理 1.2 （拉普拉斯定理）　设 A 是一个 n 阶行列式

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

对任意的 i，j，记 A_{ij}是元素 a_{ij}的代数余子式，则

$$a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=A$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0$$

$$(i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,n)$$

推论 设 $A=|a_{ij}|$是一个 n 阶行列式，对任意 $i,j,(i,j=1,2,\cdots,n)$有

$$a_{j1}A_{j1}+a_{j2}A_{j2}+\cdots+a_{jn}A_{jn}=A$$

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0$$

$$(i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,n)$$

定理 1.3 （克莱姆法则） 设有 n 个未知数及 n 个方程式组成的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

记这个方程组的系数行列式为 A，若 $A\neq0$，则方程组有且仅有唯一组解

$$x_1=\frac{A_1}{A},\quad x_2=\frac{A_2}{A},\quad \cdots,\quad x_n=\frac{A_n}{A}$$

其中 A_k 是一个 n 阶行列式，它由 A 去掉第 k 列换上由方程组常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 组成的列而成.

推论 齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

有非零解的充要条件为 $A=0$.

第五节　例题分析

例 1　计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

解　原式 $\xlongequal[i=1,2,3]{[i]+[4]} 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[i=1,2,3]{(-1)\times[4]+[i]} 3\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

例 2　计算 $\begin{vmatrix} -2 & 2 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

解　原式 $\xlongequal{[3]+[2]} \begin{vmatrix} -2 & 2 & -4 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{(-2)\times[3]+[1]} \begin{vmatrix} -8 & 0 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第 2 列展开}} -\begin{vmatrix} -8 & 0 & 6 \\ 7 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$