初中数学复习

下册

CHUZHONG
SHUXUE
FUXI

安徽教育出版社

初中数学复习

徽州行署教育局教研室编写组

安徽教育出版社

初中数学复习

安徽教育出版社出版

（合肥市跃进路1号）

安徽省新华书店发行　安徽新华印刷厂印刷

*

开本：787×1092　1/32　印张：7　字数：220,000

1985年4月第1版　　1985年4月第1次印刷

印数：187,000

统一书号：7276·311　　定价：1.00元

目 录

第一章　实数 ……………………………………………（1）
第二章　代数式 …………………………………………（18）
第三章　方程和方程组 …………………………………（53）
第四章　不等式 …………………………………………（97）
第五章　指数和对数 ……………………………………（117）
第六章　直角坐标系和解三角形 ………………………（138）
第七章　函数 ……………………………………………（167）
第八章　统计初步 ………………………………………（194）
第九章　直线、相交线和平行线 ………………………（215）
第十章　三角形 …………………………………………（235）
第十一章　四边形 ………………………………………（276）
第十二章　相似形 ………………………………………（324）
第十三章　圆 ……………………………………………（376）

第九章　直线、相交线和平行线

本章是学习几何的入门，这一章概念多，如：线段和角的概念；垂线、对顶角的概念和性质；平行线的判定方法和性质以及命题等内容，学生难于完全掌握．因此，在复习中，必须串线结网，将基础知识分四个方面：命题；线段、射线、直线；角；两直线的位置关系进行归纳，然后通过感性认识理解这些图形的性质和正确使用符号进行表达，并能掌握初步推理论证的方法．

内　容　提　要

一、命题

判断一件事情的句子，叫做命题。每个命题都可以分为条件和结论两个部分：条件是已知事项，结论是由已知推出的事项．命题有真有假。

1．定义、公理、定理

定义：对一个名词或术语的意义的规定．

例如："在同一平面内不相交的两条直线叫做平行线"就是平行线的定义

"小于直角的角叫做锐角"就是锐角的定义．

公理：为人类长久以来的实践经验所证实，而作为推理的根据的命题叫做公理．常用的还有一些等量公理和不等量

公理.

等量公理：(1)等量加等量，和相等. (2)等量减等量，差相等. (3)等量的同倍量相等. (4)等量的同分量相等. (5)在等式或不等式中，一个量可以用它的等量来代替（简单说成“等量代换”）.

不等量公理：(1)不等量加上或者减去等量，原来大的仍大. (2)不等量乘以或者除以同一个正数，原来大的仍大. (3)不等量加不等量，大量的和大于小量的和. (4)等量减不等量，减去大的，差反而小. (5)第一量大于第二量，第二量大于第三量，则第一量大于第三量. (6)全量大于它的任一部分

例如：“经过两点可以画一条直线，并且只可以画一条直线.”

定理：用推理的方法证明是正确的命题叫做定理.

例如：“对顶角相等.”

2. 四种命题间的关系

原命题：若 A，则 B. 或 $A\Rightarrow B$.

逆命题：若 B，则 A. 或 $B\Rightarrow A$.

否命题：若 $\overline{A}$，则 $\overline{B}$. 或 $\overline{A}\Rightarrow \overline{B}$.

逆否命题：若 $\overline{B}$，则 $\overline{A}$. 或 $\overline{B}\Rightarrow \overline{A}$.

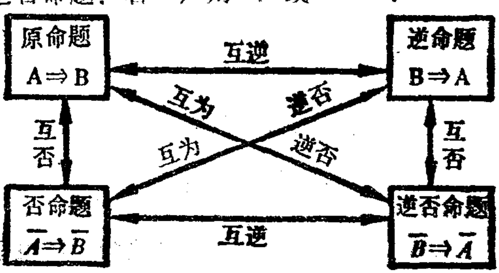


图9-1

它们相互间的关系，如图9-1所示：

命题既然有真有假，那么上述四种命题之间，它们的真假关系是“互为逆否”的两命题等价.“互逆”或“互否”的两命题，其中一个成立，另一个不一定成立.

二、线段、射线、直线

1. 概念：

象黑板、书本的边缘都有两个端点，这种线叫线段. 如：图9-2(甲)

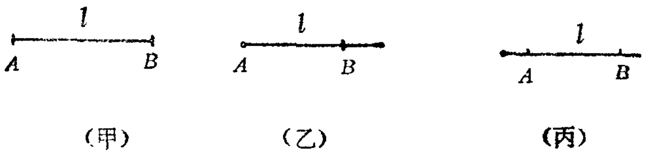


图9-2

象手电筒的光线，是由一点向一定方向发出的，这种线叫射线. 它有一个端点. 如：图9-2(乙).

线段和射线都是直线的一部分，我们所说的直线是指向两方无限伸展的，它没有端点. 如：图9-2(丙).

2. 性质：

直线的性质：(1)两点决定一条直线；(2)两条直线相交，只有一个交点.

线段的性质：两点之间，线段最短.

连结两点的线段的长度叫做两点间的距离.

三、角

1. 定义：由一点画出的两条射线所组成的图形叫做角. 这点叫做角的顶点，这两条射线叫做角的边(图9-3).

角也可以看成是由一条射线绕着它的端点旋转而成的(图9-4).

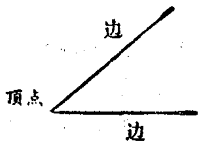


图9-3

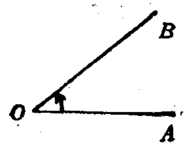
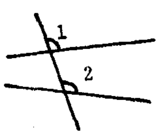


图9-4

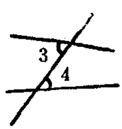
度量角的大小有弧度制和角度制两种制度. 平面几何使用角度制，它的单位是度、分、秒. 且有 $1°=60'$，$1'=60''$.

2. 角的分类

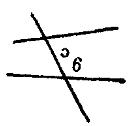
- 一般的角
  - 锐角：大于0°而小于90°的角.
  - 钝角：大于90°而小于180°的角.
- 特殊的角
  - 直角：90°角叫直角.
  - 平角：180°角叫平角.
  - 周角：360°角叫周角.
- 相关的角
  - 对顶角
    - 定义：一个角的两边分别是另一个角两边的反向延长线，这两个角叫对顶角.
    - 性质：对顶角相等.
  - 余角
    - 定义：两个角的和等于90°， 这两个角叫互为余角.
    - 性质：同角(或等角)的余角相等.
  - 补角
    - 定义：两个角的和等于180°，这两个角叫互为补角.
    - 性质：同角(或等角)的补角相等.
  - 三线八角



同位角：$\angle 1$和$\angle 2$



内错角：$\angle 3$和$\angle 4$



同旁内角：$\angle 5$和$\angle 6$

3. 角的平分线

定义：从一个角的顶点出发的一条射线，如果把这个角分成两个相等的角，这条射线叫做这角的平分线.

性质：角平分线上的点到角两边的距离相等.其逆亦真.

四、两直线的位置关系

1. 在同一平面内两条直线的位置关系有：

重合——有无数个公共点.

相交——只有一个公共点.

平行——没有公共点.

2. 平行线

定义：在同一平面内不相交的两条直线叫平行线.

性质：(1)经过直线外一点，有且只有一条直线和这条直线平行(称基本性质)；(2)平行线的同位角相等；(3)平行线的内错角相等；(4)平行线的同旁内角互补；(5)夹在两条平行线间的平行线段相等；(6)两条平行线间的距离处处相等.

判定：(1)同位角相等的两条直线平行；(2)内错角相等的两条直线平行；(3)同旁内角互补的两条直线平行；(4)如果两条直线都与第三条直线平行(或垂直)，那么这两条直线平行.

3. 垂线

定义：两直线成直角相交，这两条直线叫互相垂直.其中一条叫做另一条的垂线，交点叫垂足

性质：(1) 经过一点有且只有一条直线垂直于已知直线.

(2) 从直线外一点到这条直线上的各点所连结的线段中，和这条直线垂直的线段最短.垂直线段的长(该点至垂足

的距离)，叫做点到直线的距离

4. 垂直平分线

定义：**垂直于一条线段并且平分这条线段的直线叫做这条线段的垂直平分线**.

性质：线段的垂直平分线上的**点到这条线段的两端的距离相等**. 其逆亦真.

例　　题

例1

	条　　件	结　　论	真假性
原命题：	对顶角	相等	真
逆命题：	两角相等	它们一定是对顶角	假
否命题：	不是对顶角的两角	一定不相等	假
逆否命题：	两角不相等	它们一定不是对顶角	真

例2

原命题：	$a^2=b^2$	$a=b$	假
逆命题：	$a=b$	$a^2=b^2$	真
否命题：	$a^2\neq b^2$	$a\neq b$	真
逆否命题：	$a\neq b$	$a^2\neq b^2$	假

例3

原命题：**平行四边形**	**对角线互相平分**	**真**
逆命题：对角线互相平分的四边形	平行四边形	**真**
否命题：不是平行四边形的四边形	对角线不互相平分	**真**
逆否命题：对角线不互相平分的四边形	不是平行四边**形**	**真**

例4 如图 9-5 所示，**已知线段** $AB=1$，在 AB 上取一点 M，使 $AM^2=AB\cdot MB$。

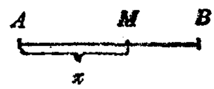


图9-5

解 设 $AM=x$，则 $MB=1-x$。

由题意，得 $x^2=1\cdot(1-x)$，

$$x^2+x-1=0,\quad x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

$$\because\ x>0,\quad\therefore\ x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

即 $AM=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，$MB=1-\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

例5 如图9-6 所示，C、D 把线段 AB 分成 3:4:7 三部分，M、N 分别为 AC、DB 的中点，且 $MN=4.5$ 分米，求 AB

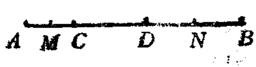


图9-6

解 $\because$ M、N 分别是 AC、DB 的中点，

$$\therefore\ MN=MC+CD+DN=\frac{1}{2}AC+CD+\frac{1}{2}DB,$$

又$AC:CD:DB=3:4:7$,

$$\therefore\quad MN=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{14}AB\right)+\frac{4}{14}AB+\frac{1}{2}\left(\frac{7}{14}AB\right)$$

$$=\frac{9}{14}AB$$

把$MN=4.5$代入上式，得$\frac{9}{14}AB=4.5$,

$\therefore\quad AB=7$(分米)

答：AB的长为7分米

例6 求证：两个邻补角的两条平分线互相垂直.

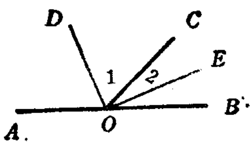


图9-7

已知：$\angle AOC$和$\angle BOC$是两个邻补角，OD平分$\angle AOC$，OE平分$\angle BOC$.

求证：$OD\perp OE$.

证明 $\because\quad \angle AOC+\angle BOC=180°$,

又OD平分$\angle AOC$，OE平分$\angle BOC$,

$\therefore\quad \angle 1=\frac{1}{2}\angle AOC$，$\angle 2=\frac{1}{2}\angle BOC$,

于是　$\angle 1+\angle 2=\frac{1}{2}(\angle AOC+\angle BOC)=90°$.

$\therefore\quad OD\perp OE$.

例7 一个角的补角和它的余角之比是7:3，求这个角.

解 设这个角为x度，

则它的补角和余角分别为$(180-x)$度和$(90-x)$度.

由题意，得　$(180-x):(90-x)=7:3$.

$3(180-x)=7(90-x)$,

$4x=90$, $\therefore$ $x=22.5°$(或$22°30'$)。

答：这个角是$22°30'$.

例8 如图 9-8 所示，AB、CD交于O，$\angle BOC=\frac{1}{5}\angle AOC$，$OM\perp AB$，$ON$ 平分 $\angle DOM$，求：$\angle MON$的度数.

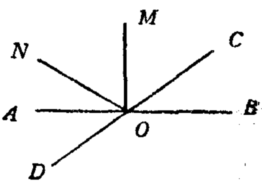


图9-8

解 $\because$ $\angle BOC=\angle AOD$，

又$\angle BOC+\angle AOC=180°$.

而$\angle BOC=\frac{1}{5}\angle AOC$，

于是$\angle BOC+5\angle BOC=180°$，

$\therefore$ $\angle BOC=\angle AOD=30°$

又$OM\perp AB$， $\therefore$ $\angle AOM=90°$，

$\because$ ON平分$\angle DOM$，

$$\therefore \quad \angle MON=\frac{1}{2}\angle DOM=\frac{1}{2}(\angle AOD+\angle AOM)$$

$$=\frac{1}{2}(30°+90°)=60°.$$

例9 一个角的两边和另一个角的两边对应平行，且对应边的方向都相同或都相反，这两个角相等；对应边的方向一组相同一组相反，这两个角的和等于180°

已知：如图9-9所示，$OA\parallel O'A'$，$OB\parallel O'B'$.

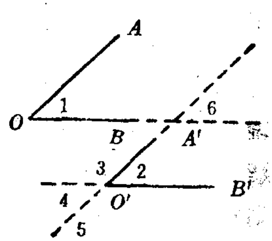


图9-9

求证：(1) $\angle 1=\angle 2$或$\angle 1=\angle 4$；

(2) $\angle 1+\angle 3=180^\circ$或$\angle 1+\angle 5=180^\circ$.

证明 (1) 延长OB、$O'A'$必定相交，设交角为$\angle 6$.

$\because$ $OA\parallel O'A'$, $\therefore$ $\angle 1=\angle 6$

同理$\angle 6=\angle 2$, $\therefore$ $\angle 1=\angle 2$.

又$\angle 4=\angle 2$, $\therefore$ $\angle 1=\angle 4$.

(2) $\because$ $\angle 3+\angle 2=180^\circ$(平角定义)，

根据(1)知，$\angle 1=\angle 2$，$\therefore$ $\angle 1+\angle 3=180^\circ$.

又$\angle 3=\angle 5$, $\therefore$ $\angle 1+\angle 5=180^\circ$

注意 (1)本题可当定理用；

(2)如果一个角的两边分别垂直于另一个角的两边，那么这两个角相等或互补. 请读者试证之.

例10 如图9-10所示，(已知$AB\parallel CD$，MG、MH、NQ分别平分$\angle EMA$、$\angle AMN$，$\angle MNC$.

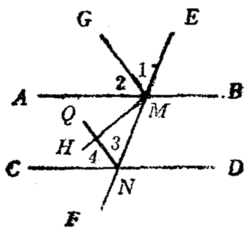


图9-10

求证：(1) $GM\parallel NQ$；

(2) $MH\perp QN$.

证明 (1) $\because$ $AB\parallel CD$,

$\therefore$ $\angle EMA=\angle MNC$,

即$\angle 1+\angle 2=\angle 3+\angle 4$,

又$\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$,

$\therefore$ $\angle 1=\angle 3$, $\therefore$ $GM\parallel NQ$.

(2) $\because$ $AB\parallel CD$, $\therefore$ $\angle CNM+\angle NMA=180^\circ$,

即$\angle 3+\angle 4+\angle NMH+\angle HMA=180^\circ$,

又$\angle 3=\angle 4$, $\angle NMH=\angle HMA$,

也就是 $2\angle 3+2\angle NMH=180°$，

于是 $\angle 3+\angle NMH=90°$，　　$\therefore$　$MH\perp QN$.

例11　如图9-11所示，已知：

$\angle BMD=\angle B+\angle D$，

求证：$AB\parallel CD$

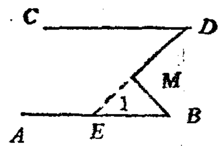


图9-11

分析　要证 $AB\parallel CD$，有四个判定定理可应用．要想利用"内错角相等，两直线平行"，只要延长 DM 交 AB 于 E，使图中有内错角：$\angle D$ 和 $\angle 1$，只要证 $\angle D=\angle 1$ 即可。

证法一　延长 DM 交 AB 于 E.

$\therefore$　$\angle DMB=\angle 1+\angle B$（三角形外角定理）.

又 $\angle DMB=\angle D+\angle B$（已知），

$\therefore$　$\angle 1+\angle B=\angle D+\angle B$（等量代换）.

$\therefore$　$\angle 1=\angle D$，因此 $AB\parallel CD$

证法二　过 M 作 $EF\parallel CD$，

$\therefore$　$\angle 1=\angle B$（两线平行，内错角相等）.

又知 $\angle BMD=\angle B+\angle D=\angle 1+\angle 2$，

$\therefore$　$\angle D=\angle 2$（等量减等量，差相等），

于是 $EF\parallel CD$（内错角相等，两线平行）.

故 $AB\parallel CD$（平行于同一直线的两直线平行）.

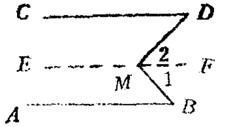


图9-12

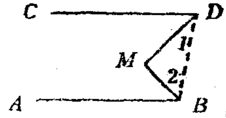


图9-13

证法三　连结B、D，

$\therefore\quad \angle BMD+\angle 1+\angle 2=180^\circ$（三角形内角和定理）.

又知$\angle BMD=\angle ABM+\angle CDM$，

于是$\angle ABM+\angle CDM+\angle 1+\angle 2=180^\circ$.

即$\angle ABD+\angle CDB=180^\circ$，

因此$AB \parallel DC$（同旁内角互补，两线平行）.

例12　如图9-14所示，已知：直线PQ垂直MN，AB不垂直MN.
求证：PQ和AB必定相交.

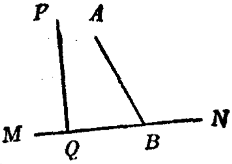


图9-14

证明　假定PQ和AB不相交，

则$PQ \parallel AB$.

$\therefore\quad \angle ABN=\angle PQN=90^\circ$（两线平行，内错角相等）.

这与已知条件：AB不垂直MN相矛盾.

于是$PQ \parallel AB$不能成立.

故PQ和AB一定相交.

注意　(1)本例题用直接证法不易达到目的，我们采用反证法．所谓反证法就是从所要证定理的反面入手：①先假定结论不成立；②由此根据逻辑推理导出一个新的结论，而这个新的结论与已知条件或已学过的定义、定理、公理相矛盾；③从而说明假定是错误的；④肯定结论成立.

(2)本例题的反面只有一种情形，这样的反证法叫做归谬法．但有时结论的反面不止一种情形，就必须一一加以否定，这种反证法叫做穷举法（在以后各章配备这方面的例题）.

练　　习

1 说出下列命题中的条件和结论：

(1) 两条直线相交成四个角，如果其中有一个角是直角，那么其余的三个角都是直角.

(2) 三角形中两角不等，它们所对的边也不等.

(3) 同圆(或等圆)半径相等.

(4) 个位数是5或0的整数，都能被5整除.

2. 写出下列命题的逆命题，否命题和逆否命题，并判断真假.

(1) 如果一点到圆心的距离不等于半径，那么这点不在圆上.

(2) 如果两个三角形全等，那么一组对应边也相等.

(3) 如果 $a=0$，那么 $ab=0$.

(4) 如果 $a>b$，那么 $ac>bc$.

3. 下列语句是否正确?如果不正确，说出理由；如果正确，用图形表示出它的意义.

(1) 延长直线 MN 到 P；(2) 延长射线 OA 到 B；(3) 反向延长射线 OB 到 D；(4) 延长线段 AB 到 C

4. 已知线段 a 和 $b(a>b)$，用直尺和圆规作一线段，使它等于：

(1) $3a+2b$；　(2) $2a-\frac{1}{2}b$；

(3) $3(a-b)$；　(4) $\frac{1}{2}(2a+b)$.