中学生文库

几何变换

JIHE BIANHUAN

上海教育出版社


几何变换

中学生文库

几何变换

蒋声

上海教育出版社

内 容 提 要

本书主要介绍几何变换在解初等几何问题中的应用，顺便谈及变换在现代数学中的地位. 书中附有许多例题和习题. 本书可供中学生和其他数学爱好者阅读参考。

中学生文库　几　何　变　换

蒋　声

上海教育出版社出版
(上海永福路123号)
上海商务印刷厂印刷　新华书店上海发行所发行
开本 787×1092 1/32　印张 4.5　字数 93,000
1981年9月第1版　1981年9月第1次印刷
印数 1—74,000 本

统一书号：7150·2639　定价：0.34 元

前　　言

有些初等几何问题的已知条件分散，不易全部用上，因而难以找到解题途径．如果适当地运用对称、旋转、平移、相似等几何变换，将图形的某些部分分别转移到适当的新位置，往往可将分散的条件聚拢，从而化难为易，发现解题的途径．本书的前六节就是介绍怎样利用这些简单几何变换解初等几何问题的．

第七至九节介绍反演、仿射和射影这三种变换的初步知识．利用它们，不但可以非常简洁地解答一些难度较高的初等几何问题，还可从已知的几何定理变换出许多新的有趣事实．

几何变换固然是解答初等几何困难题目的锐利武器，然而更重要的是，它还在现代数学理论中发挥着巨大的作用．我们在最后的一节也就是第十节中简单介绍了变换群等进一步的知识，就是为了指明几何变换之路通向何方．

书末附有一百多个练习题，供读者选作．通过这些习题，可以了解一些例题的变形、发展和应用，进一步熟悉利用几何变换解题的方法，体会若干有用的小技巧和小窍门，并且举一反三，触类旁通．最后附有练习题解法要点．

几何变换这个题材，在数学领域中涉及面很广，可以从许多不同角度加以介绍．本书的重点是介绍这种数学方法的初

等应用，顺便提提与大学课程的联系．希望能对正在学习中学数学或准备参加数学竞赛的中学生们有所帮助．熟悉大学课程的读者们，也许觉得作者是在尝试挖掘用高等数学方法解决初等数学问题的潜力．不管怎么说，揭示中学数学和大学数学课程之间的内在联系，总是一件很有意义的事．限于作者水平，书中难免有缺点和错误之处，请同志们批评指正。

作　者

1980.4.5

目录

ZHONG XUE SHENG WENKU

一、对　　称

对称变换是与轴对称图形的概念联系在一起的.

大家知道，如果将平面图形 F_1 绕这平面内一直线 l 翻转一百八十度后与图形 F_2 重合，就说 F_1 与 F_2 两个图形关于 l 成轴对称，简称 F_1 与 F_2 关于 l 对称，直线 l 称为它们的对称轴. 若图形 F 关于直线 l 与 F 自己成轴对称，就说 F 是一个轴对称图形.

将平面图形 F_1 变到与它关于直线 l 成轴对称的图形 F_2，这样的几何变换就叫做关于直线 l 的对称变换.

在上面这些互相联系的概念中，都包含着将平面图形绕直线翻转一百八十度这样一个动作，不难看出，这一动作是来源于实际生活中的折纸动作的.

利用对称变换解题的基本方法，可归纳成下列法则.

法则 1　若问题的整个图形或其一部分是一个轴对称图形，则可尝试找出或作出对称轴，从对称轴上多想主意.

将这个一般法则用于各种常见的具体图形，便有下列添辅助线的具体方法：

(1) 若问题中有一点及一直线，可尝试过点作直线的垂线.

(2) 若问题中有一点及一圆，可试将点与圆心用直线连接起来.

(3) 若问题中有相交的两直线，可试作它们交角的分角线.

(4) 若问题中有平行的两直线，可试作一条与它们垂直的直线，或者试作与它们等距的一条平行线.

(5) 若问题中有一圆及一直线，则可试过圆心作直线的垂线. 特别，对于一圆及其一条切线，可试将圆心与切点相连；对于一圆及其中一条弦，可试将圆心与弦的中点连接.

(6) 若问题中有两个不同心的圆，可试作它们的连心线.

[例 1] 以 O 为圆心的两个同心圆，与一直线顺次交于 A, B, C, D 四点，求证 $\angle AOB=\angle COD$.

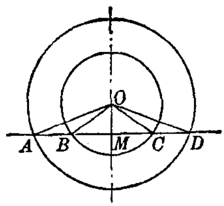

图 1.1

分析 证几何题时，最难的步骤是添辅助线. 以本题而言，如果有较多的解题经验，是会想到由圆心作已知直线的垂线的. 但若运用了几何变换的观点，只要注意到问题的图形是一个轴对称图形，就不需要太多的机智和经验，也能迅速想到试作图形的对称轴.

证明 作 $OM\perp AD$，垂足为 M(图 1.1)，则

$$\angle AOM=\angle DOM,\quad \angle BOM=\angle COM,$$

两式相减，立刻得到 $\angle AOB=\angle COD$.

法则 2 若问题中的图形或其一部分是一个轴对称图形，也可尝试添加一些对称的线条，使图形结构更加完整，从而显示出解题途径.

将这个一般法则用于常见的具体图形，便有下列添辅助线的基本规律：

(1) 若问题中有一圆 O 及其一条弦 AB，可试连半径

OA 和 OB(两条对称的线段),得到等腰三角形 OAB.

(2) 若问题中包含两个相交的圆,可试作公共弦(一条关于连心线对称的线段).

(3) 若问题中包含两个相切的圆,可尝试过切点作它们的公切线(一条关于连心线对称的直线).

具体应用时还可根据问题的具体情况适当变化,试看下面的例子.

[例 2] 已知正方形 $ABCD$ 的边 AB 的延长线上有一点 E, AD 的延长线上有一点 F, 满足 $AE=AF=AC$. 若直线 EF 交 BC 于 G, 交 CD 于 H, 求证

$$EG=GC=CH=HF.$$

分析 如图 1.2 所示,本题图形关于正方形的对角线 AC 对称,所以关键在于证明 $EG=GC$. 但已知 $AE=AC$, 可见四边形 $AEGC$ 应该关于直线 AG 对称. 故可试连 AG(对称轴), 或试连 EC(一条关于 AG 对称的线段),由此得到两种不同解法.

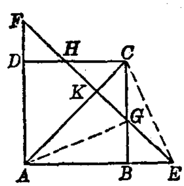

图 1.2

证明 1 连 AC, 则由对称性得 $GC=HC$, $EG=FH$. 再连 AG, 并设 EF 交 AC 于 K. 于是 $\triangle AEK$ 和 $\triangle ACB$ 都是等腰直角三角形, 并且由 $AE=AC$, 知道

$$\triangle AEK \cong \triangle ACB,$$

因而 $$EK=CB, \quad AK=AB.$$

由此推出直角三角形 AKG 与 ABG 全等, 因而

$$GK=GB.$$

由等量相减得 $GE=GC$, 因而最后有

$$EG=GC=CH=HF.$$

证明2 连 AC，由对称性得 $GC=HC$，$EG=FH$. 再连 EC，则由 $AE=AC$ 得 $\angle ACE=\angle AEC$. 又因

$$\angle ACB=\angle AEF=45^\circ,$$

相减得 $\angle ECG=\angle CGE$，所以 $EG=GC$，所以最后有

$$EG=GC=CH=HF.$$

法则3 若问题中的图形的某一部分关于一直线 l 对称，则可尝试对图形的适当部分作关于 l 的对称变换，将分散的已知条件聚拢起来.

[例3] 证明过 $\triangle ABC$ 的垂心 H 及其任两个顶点所作的三个圆彼此相等.

分析 相交的两个等圆关于其公共弦对称，故可试证其中一圆关于公共弦的对称图形与另一圆重合.

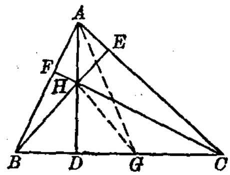

图 1.3

证明 如图1.3，作 B 点关于直线 AH 的对称点 G，连 HG，AG，则由对称性得 $\triangle AHG\cong\triangle AHB$，因而 $\angle AGH=\angle ABH$. 但

$$\angle ABH=90^\circ-\angle BAE=\angle ACH,$$

所以 $\angle AGH=\angle ACH$，因而四点 A，H，G，C 共圆. 过 A，H，B 所作的圆等于过 A，H，G 所作的圆，因而等于过 A，H，C 所作的圆. 同理它们也等于过 H，B，C 所作的圆.

这题目如果借助于三角知识，证法也很简单. 读者可自己试证.

[例4] 三角形 ABC 中，AD 是角 A 的分角线. 已知 $AB=AC+CD$，求证 $\angle C=2\angle B$.

分析 如图1.4所示，$\angle A$ 关于它的分角线 AD 对称，

故可试将 $\triangle ADC$ 绕 AD 翻转过去.

证明 在 AB 上取 $AE=AC$, 则 E 点和 C 点关于 AD 对称. 连 DE, 由对称性得

$$CD=ED,\ \angle AED=\angle C.$$

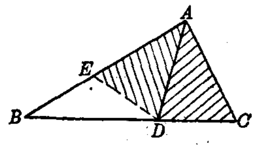

图 1.4

但 $AB=AC+CD$, 即 $AE+EB=AE+ED$, 所以 $EB=ED$. 由此得 $\angle EDB=\angle B$, 因而

$$\angle C=\angle AED=\angle B+\angle EDB=2\angle B.$$

[例 5] 已知直线 MN 交线段 AB 于点 C. 在 MN 上求一点, 使它看线段 AC 和 BC 有相等的视角.

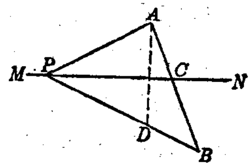

图 1.5

分析 如图1.5, 设 P 为所求之点, 则 $\angle APC=\angle BPC$. 因而 $\angle APB$ 关于直线 MN 对称. 故可试作 A 关于 MN 的对称点 D, D 必在 PB 上. B 为已知点, D 可作出, 故 P 点也可作出.

作法 作 A 点关于 MN 的对称点 D. 连 BD, 则直线 BD 和 MN 的交点 P 即为所求.

证明、讨论从略.

[例 6] 已知过同一点 O 的三条直线 x, y, z 和不在这些直线上的一点 P, 求作三角形, 使它以 x, y 和 z 为三条分角线, 并且有一边通过 P 点.

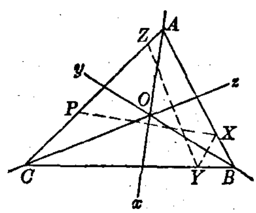

图 1.6

分析 如图1.6, 设 $\triangle ABC$ 为所求的三角形, 它的边 CA 通过已知点 P. 由于每个内角关于它的分

角线对称，所以可顺次作 P 点关于 x 的对称点 X，X 关于 y 的对称点 Y，Y 关于 z 的对称点 Z. 由对称性，顺次推出 X 在 AB 上，Y 在 BC 上，Z 在 CA 上，故由已知点 P 和辅助点 Z 可作出边 AC.

作法 作 P 点关于直线 x 的对称点 X，再作 X 关于 y 的对称点 Y，Y 关于 z 的对称点 Z. 连直线 PZ，交 x 于 A，交 z 于 C. 连直线 AX，交 y 于 B. 连 BC，则 $\triangle ABC$ 即为所求.

证明、讨论从略.

法则 4 若问题中由于讨论折线而感到困难，可尝试对折线的一节或若干节逐次进行对称变换，化折线为直线.

[例 7] 在定直线 XY 的同侧有一点 A 及一定圆 O，试在直线 XY 上求一点 P，使从 P 点到圆 O 的切线 PB 满足

$$\angle BPY = \angle APX.$$

分析 设 P 为符合条件的点，则如图1.7，将 AP 绕 XY 翻转一百八十度至 CP 位置，CPB 应成一直线. 问题归结为过 C 点作圆 O 的切线.

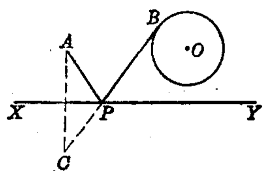

图 1.7

作法 作 A 点关于 XY 的对称点 C. 由 C 作圆 O 的切线，交 XY 于 P，则 P 点即为所求.

从 C 点可作圆 O 的两条切线，因而本题常有两解. 一般地，解作图题时常需讨论问题在什么条件下无解，什么条件下有解和有多少解，而这种讨论往往需要进行细致的甚至复杂的思考和论证. 本书的重点是介绍探求解题途径的方法，因而例题中作图题的证明、讨论步骤都略去了，请读者注意.

[例 8] 在定底定高的三角形中，等腰三角形周长最短.

分析 有定底 BC 和定高 h 的三角形，其顶点 A 的轨迹是在 BC 两侧且平行于 BC 的两条直线 a 和 b. 由对称性，只须考虑其中一直线 a，如图 1.8，问题归结为在直线 a 上求一点 A，使折线 BAC 最短. 熟知连接两点的折线拉直成线段时长度最短，但因 B 和 C 在 a 同侧，折线 BAC 不会变成线段. 如果将 C 点翻转到 a 的另一侧就容易解决了.

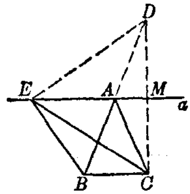

图 1.8

证明 设 $\triangle ABC$ 是具有定底 BC 和定高 h 的任一三角形. 过 A 作直线 $a\parallel BC$，又作 C 点关于 a 的对称点 D，则 $DA=CA$，且 D 与 B 分居直线 a 两侧. $\triangle ABC$ 的周长等于折线 BAC 的长度加上定长 BC. 折线 BAC 仅当 A 点落在线段 BD 上时长度最短. 又因 a 平分线段 CD，$a\parallel BC$，所以若 A 在 BD 上，必为 BD 的中点，即 $AB=AC$. 这就证明了等腰三角形的周长最小.

[例 9] 证明直角三角形中任一内接三角形的半周大于斜边上的高.

分析 要比较一条封闭折线(内接三角形的周界)与一条线段的长度大小，有些困难. 如果能通过变换，将问题化成比较两条具有公共端点的折线长，或比较两条端点分别在平行直线上的折线长，就容易解决些. 条件中有一个直角，连续绕直角边翻转两次就可得到一组平行线.

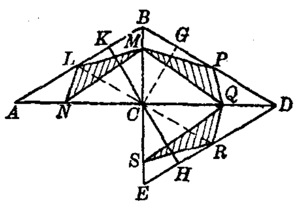

图 1.9

证明 如图 1.9，设 CK 是

直角三角形 ABC 斜边上的高. 内接三角形 LMN 的顶点 L, M, N 分别在 AB, BC, CA 上. 作关于直线 BC 的对称变换, 将 $\triangle ABC$ 变为 $\triangle DBC$, $\triangle LMN$ 变为 $\triangle PMQ$, 高 CK 变为 CG; 再作关于直线 CD 的对称变换, 将 $\triangle BCD$ 变为 $\triangle ECD$, $\triangle PMQ$ 变为 $\triangle RSQ$, 高 CG 变为 CH. 由于

$$MQ=MN, \quad QR=QP=NL,$$

所以折线 $LMQR$ 的长度等于内接三角形 LMN 的周长. 进而从 $\angle ACB$ 为直角, 可知 A, C, D 三点共线, B, C, E 三点共线. 由此推出 K, C, H 三点共线, 并且 $AB \parallel ED$. 两平行线 AB 和 ED 间的距离为 $KH=2CK$. 由于折线 $LMQR$ 的长度大于线段 LR 的长, 并且 $LR \geqslant KH$, 所以得到

$$LM+MN+NL>2CK,$$

即 $\triangle LMN$ 的半周长大于斜边上的高 CK.

将例 9 的证明方法应用到锐角三角形的情形, 就得到著名的许瓦尔兹三角形问题. 为了介绍这个问题, 需要先介绍所谓垂足三角形的一个基本性质. 一个三角形的垂足三角形, 就是指以它三边上高线足为顶点的三角形. 垂足三角形具有下面的例题所示的对称性质:

[例 10] $\triangle ABC$ 的三条高线 AD, BE, CF 恰好分别是垂足三角形 DEF 的三条内角平分线.

证明 如图1.10, 由于 $AD \perp BC$, $BE \perp CA$, 所以 D 和 E 都在以 AB 为直径的圆上, 因而 $\angle ADE=\angle ABE$. 同理从 A, C, D, F 共圆得

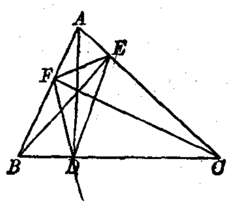

图 1.10

$$\angle ADF=\angle ACF.$$

但 $$\angle ABF=90^{\circ}-\angle BAC=\angle ACF,$$

所以 $\angle ADE=\angle ADF$. 同理可证

$$\angle BEF=\angle BED,\quad \angle CFE=\angle CFD.$$

利用例 10 的结果可知，若将垂足三角形的一边 DE 以 $\triangle ABC$ 的边 BC 为轴作对称变换，则必落在 FD 的延长线上.

[例 11] 锐角三角形的所有内接三角形中，垂足三角形的周长最短.

分析 本题类似于例 9，这里的垂足三角形相当于例 9 中斜边上的高. 因而可尝试仿照例 9 的方法连续翻转，寻找一对平行直线.

证明 设已知锐角三角形 ABC 的垂足三角形为 DEF，而 $\triangle XYZ$ 是任一内接三角形.

如图 1.11，将 $\triangle ABC$ 连同其内接三角形和垂足三角形

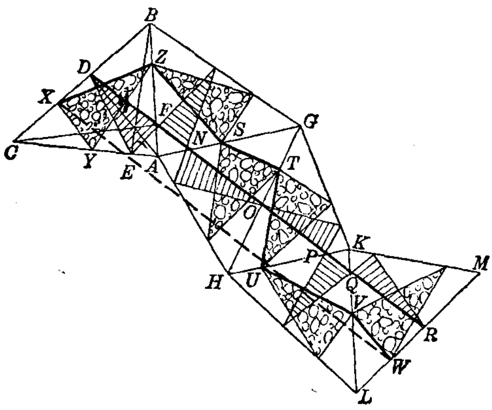

图 1.11

连续翻转. 先将 $\triangle ABC$ 绕 AB 翻转到 $\triangle ABG$, 再将 $\triangle ABG$ 绕 AG 翻转到 $\triangle AHG$, $\triangle AHG$ 绕 GH 翻转至 $\triangle KHG$, $\triangle KHG$ 绕 KH 翻转到 $\triangle KHL$, $\triangle KHL$ 绕 KL 翻转到 $\triangle KML$.

由例 10 中垂足三角形的性质知道, 图 1.11 中 D, F, N, O, P, Q, R 各点共线, 因而

$$\begin{aligned} DR &= DF+FN+NO+OP+PQ+QR \\ &= 2(DF+FE+ED). \end{aligned}$$

又因 $\angle QRL=\angle EDC=\angle FDB$, 知道 $ML \parallel BC$. 又因为 $DX=RW$, 所以 $DXWR$ 是平行四边形, 故 $XW=DR$. 但折线 $XZSTUVW$ 的长度等于 $\triangle XYZ$ 周长的二倍, 这折线长又 $\geqslant$ 线段 XW 的长, 即 $\geqslant \triangle DEF$ 周长的二倍, 所以任意内接三角形 XYZ 的周长大于或等于垂足三角形的周长. 等号仅当折线 $XZSTUVW$ 变成线段时成立, 即仅当内接三角形成为垂足三角形时周长最短, 证完.