国内外数学竞赛试题汇编

刘鸿坤　熊　斌　倪　明
林　磊　马国选　等编

上海科学技术出版社

国内外数学竞赛试题汇编

刘鸿坤　熊　斌　倪　明
林　磊　马国选　等编

上海科学技术出版社出版、发行
（上海瑞金二路450号）
新华书店上海发行所经销　　上海曙光印刷厂印刷
开本：787×1092 1/32　　印张：8　　字数：171,000
1993年12月第一版　　1993年12月第一次印刷
印数：1—7,200

ISBN 7—5323—3279—9/G · 564　　定价：4.90元

（沪）新登字第108号

序　　言

我国的数学竞赛活动始于1956年, 迄今已有30多年的历史. 它为发现和培养数学人才, 促进中学数学教育改革起着重要的作用. 自从1985年我国派选手参加国际数学奥林匹克(IMO) 以来, 数学竞赛活动在我国得到了进一步的发展, 更多的学生、教师、数学家乃至政府官员关心这一活动. 可以说, 第31届国际数学奥林匹克在我国举行, 将数学竞赛活动推向了高潮.

近年来, 我国选手在国际数学奥林匹克中连续取得好成绩. 下面是我国选手在国际数学奥林匹克中的成绩一览表:

年份	参赛人数	金牌数	银牌数	铜牌数	团体名次
1985	2			1	32
1986	6	3	1	1	4
1987	6	2	2	2	8
1988	6	2	4		2
1989	6	4	2		1
1990	6	5	1		1
1991	6	4	2		2
1992	6	6			1

这一串数字鼓舞人心, 激励数学界同仁更好地工作, 激励中学生努力学习. 我国的基础教育得到世界的承认. 然而, 我国提供给国际奥林匹克委员会并被采用的试题还不多. 摆在我们面前的任务是, 如何保持这样的优异成绩, 如何编制更多更好的题目, 能被国际数学奥林匹克委员会所采用. 我们认为, 应

当加强竞赛的命题研究，把握国际数学奥林匹克的发展趋势. 作为它的基础工作是收集、学习国外的最新数学竞赛资料，研究国外数学竞赛动态，从而了解数学竞赛的命题趋势. 基于这样的认识，我们编写了这本最新的资料——《国内外数学竞赛试题汇编》，献给所有数学竞赛的命题者、辅导者以及广大的参赛者.

本书收集试题的竞赛日期基本上是1992年的，个别是1991年下半年的 (为参加1992年竞赛作准备的)，涉及的国家有：美国、俄罗斯、英国、澳大利亚、罗马尼亚、西班牙、越南等. 有些竞赛是地方性的，如“拉丁美洲”、“亚洲太平洋”、“友谊杯”等. 本书中还收录了威斯康星州的数学与工程学星探测试题. 星探具有竞赛性，适合于初、高中学生参加. 试题新颖，富有创造性. 试题的内容与通常的内容差不少. 本书没有收录与之类似的国际和美国的数学和工程学星探测试题. 为了便于读者进行国内外竞赛资料的比较，我们将国内的几套有代表性的试题附在后面. 书中的不少试题由竞赛组委会或命题者提供，大部分解答由作者完成.

本书是由华东师范大学数学竞赛研究小组的成员刘鸿坤、熊斌、倪明、林磊、马国选等编写. 编写过程中，我们得到了许多同志的帮助. 华东师范大学数学系的洪渊、庞学诚、韩士安为我们提供了若干个解答，上海的冯志刚、崔洪泉、龚为民、古曦，福建的林忠也协助做了一些工作，在此一并致谢.

我们希望更多的读者能喜欢这本书，同时，我们希望收到批评意见和建议.

编　者

1992年12月

目　　录

一、第33届国际数学奥林匹克 (IMO)

1992年, 莫斯科·俄罗斯

试　　　题

第一天 (7月15日)

1. 试求出所有的正整数a, b, c, 其中$1 < a < b < c$, 且使得$(a-1)(b-1)(c-1)$是$abc-1$的约数. (新西兰供题)

2. 设$\mathbf{R}$是全体实数的集合. 试求出所有的函数$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, 使得对于$\mathbf{R}$中的一切$x$和$y$, 都有

$$f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2.$$

(印度供题)

3. 给定空间中的9个点, 其中任何4点都不共面. 在每一对点之间都连有一条线段, 这些线段可染为蓝色或红色, 也可不染色. 试求出最小的n值, 使得将其中任意n条线段中的每一条任意地染为红蓝二色之一, 在这n条线段的集合中都必然包含有一个各边同色的三角形. (中国供题)

第二天 (7月16日)

4. 在一个平面中, C为一个圆周, 直线L是圆周的一条切线, M为L上一点. 试求出具有如下性质的所有点P的集合: 在直线L上存在两个点Q和R, 使得M是线段QR的中点, 且C是三角形PQR的内切圆. (法国供题)

5. 设$Oxyz$是空间直角坐标系, S是空间中的一个由有限个点所形成的集合, S_x, S_y, S_z分别是S中所有的点在Oyz平

面, Ozx 平面, Oxy 平面上的正交投影所成的集合. 证明

$$|S|^2 \leqslant |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|,$$

其中 $|A|$ 表示有限集合 A 中的元素数目. (意大利供题)

注 所谓一个点在一个平面上的正交投影是指由点向平面所作垂线的垂足.

6. 对于每个正整数 n, 以 $S(n)$ 表示满足如下条件的最大正整数: 对于每个正整数 $k \leqslant S(n)$, n^2 都可以表示成 k 个正整数的平方之和.

(a) 证明, 对于每个正整数 $n \geqslant 4$, 都有 $S(n) \leqslant n^2 - 14$;

(b) 试找出一个正整数 n, 使得 $S(n) = n^2 - 14$;

(c) 证明, 存在无限多个正整数 n, 使得 $S(n) = n^2 - 14$. (英国供题)

解　　答

1. 令 $x = a-1, y = b-1, z = c-1$, 则 $1 \leqslant x < y < z$. 又因

$$2 \leqslant \frac{(x+1)(y+1)(z+1)-1}{xyz} < \frac{(x+1)(y+1)(z+1)}{xyz}$$

$$= \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) \leqslant \left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)$$

$$= 4.$$

故 $\dfrac{(x+1)(y+1)(z+1)-1}{xyz}$ 为2或3.

(1) 若

$$\frac{(x+1)(y+1)(z+1)-1}{xyz} = 2,$$

则

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 1. \qquad ①$$

显然$x\neq 1$. 若$x\geqslant 3$, 则$y\geqslant 4$, $z\geqslant 5$. 此时

$$\begin{aligned}&\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\\ \leqslant&\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{15}\\ =&\frac{59}{60}<1.\end{aligned}$$

故x只能为2. 这时

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{2z}=\frac{1}{2}.$$

易知$3\leqslant y\leqslant 5$. 仅当$y=4$时, $z=14$为整数.

故 ① 式仅有一组正整数解$(2,4,14)$.

(2) 若

$$\frac{(x+1)(y+1)(z+1)-1}{xyz}=3,$$

则

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=2. \qquad ②$$

于是$x=1$ (否则, ② 式左端$\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{8}<2$). ② 式为

$$\frac{2}{y}+\frac{2}{z}+\frac{1}{yz}=1.$$

易知$2\leqslant y\leqslant 3$. 仅当$y=3$时, $z=7$为整数.

故满足 ② 式的正整数(x,y,z)为$(1,3,7)$.

综上可知, 满足题意的所有正整数(a,b,c)为$(3,5,15)$以及$(2,4,8)$.

2. 先证$f(0)=0$. 在函数方程

$$f(x^2+f(y))=y+f^2(x) \qquad ①$$

中, 令$x=0,t=f^2(0)$, 得

$$f(f(y))=y+t, \qquad ②$$

由 ②, 得

$$f[f(x^2+f(f(y)))]=x^2+f(f(y))+t. \qquad ③$$

由 ①, 得

$$\begin{aligned} f[f(x^2+f(f(y)))] &= f[f^2(x)+f(y)] \\ &= y+[f(f(x))]^2. \end{aligned} \qquad ④$$

由 ②, ③, ④, 得

$$x^2+y+2t=y+(x+t)^2,$$

即

$$2t=t^2+2tx.$$

对任意实数 x 均成立, 所以 $t=0$, 故 $f(0)=0$.

于是 ② 式为

$$f(f(y))=y. \qquad ⑤$$

当 $x\geqslant 0$ 时, 由 ① 和 ⑤, 得

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x+f(f(y))) \\ &= f(y)+f^2(\sqrt{x}) \\ &\geqslant f(y), \end{aligned}$$

从而知 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的递增函数, 即当 $x\geqslant y$ 时, 有 $f(x)\geqslant f(y)$. 于是我们不难知道

$$f(x)=x.$$

事实上, 若存在 $z\in\mathbf{R}$, 使 $f(z)\neq z$, 如果 $z<f(z)$, 则 $f(z)\leqslant f(f(z))=z$, 矛盾. 如果 $z>f(z)$, 则 $f(z)\geqslant f(f(z))=z$, 矛盾.

容易验证 $f(x)=x$ 满足 ① 式.

3. 首先证明: 任何一个有 9 个顶点, 33 条边的图含有 K_6 子图.

设9个顶点为$v_1, v_2, \cdots, v_9$, 则

$$d(v_1)+d(v_2)+\cdots+d(v_9)=2\times 33=66.$$

于是9个顶点中至少有3个顶点的度为8 (否则, $d(v_1)+d(v_2)+\cdots+d(v_9)\leqslant 2\times 8+7\times 7=65$).

设$d(v_1)=d(v_2)=d(v_3)=8$, 则

$$d(v_4)+d(v_5)+\cdots+d(v_9)=42,$$

在$v_4, \cdots, v_9$中至少有一个顶点的度$\geqslant 7$, 设$d(v_4)\geqslant 7$, 且设v_4和$v_1, v_2, v_3, v_5, v_6, v_7, v_8$都相邻. 由于

$$d(v_5)+\cdots+d(v_8)\geqslant 42-16=24,$$

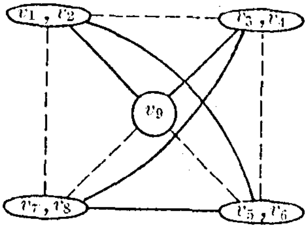
故v_5, v_6, v_7, v_8中必有一个顶点的度$\geqslant \frac{26}{4}>6$, 设$d(v_5)>6$, 则v_5必和v_6, v_7, v_8中的某一个相邻, 设v_5和v_6相邻, 则$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$构成$K_6$.

又大家熟知, 二染色K_6, 其中必有一个同色三角形, 所以, 对一个有33条边的9阶简单图的边二染色, 其中必有同色三角形.

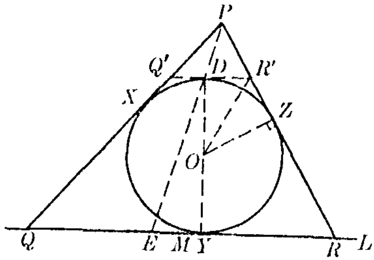
其次, 存在一个有9个顶点、32条边的图, 把图中的边二染色, 可使图中无同色三角形, 把9个顶点分成5组$\{v_1, v_2\}$, $\{v_3, v_4\}$, $\{v_5, v_6\}$, $\{v_7, v_8\}$, $\{v_9\}$, 如图所示, 若两组间连一实线, 则表示从这两组任取一点对都连有红线, 若两组间连一虚线, 则表示从这两组中任取一点对都连有蓝线, 且每一组内部的点不连线, 这个图有$C_9^2-4=32$条边, 且不存在同色三角形.

故欲求的n的最小值为33.

4. 如图, 设Q, R在直线L上, M为其中点, c切PQ, QR, RP于X, Y, Z点, c的圆心为O, 半径为r. 连YO交c于D,



(第3题)



(第4题)

过D作c的切线交PQ、PR于Q', R'点, 则$Q'R' /\!/ QR$. 连PD交QR于E, 于是

$$\therefore \quad \frac{Q'D}{QE}=\frac{PD}{PE}=\frac{DR'}{ER}. \qquad ①$$

又连OR, OZ, OR', 则$OZ \perp RR'$, $\angle ROR'=\angle ROZ+\angle ZOR'=\frac{1}{2}(\angle YOZ+\angle ZOD)=90°$, 于是在$\mathrm{Rt}\triangle ROR'$中, 有$R'Z\cdot ZR=OZ^2$, 即

$$DR'\cdot YR=r^2.$$

同理, 得

$$Q'D\cdot QY=r^2.$$

$$\therefore \quad Q'D\cdot QY=DR'\cdot YR. \qquad ②$$

由①, ②, 得

$$QE\cdot QY=ER\cdot YR,$$

$$\therefore \quad EM=MY.$$

因为Y, D, M均为定点, 从而E为定点, 故P点在D的延长线上(不包括D点), 这就是P点的轨迹.

5. 记$S_{i,j}$是S中形如(x,i,j)的点的集合，即S中在Oyz平面内正交投影坐标为(i,j)的一切点的集合. 显然

$$S=\bigcup_{(i,j)\in S_x} S_{i,j}.$$

由柯西不等式，得

$$\begin{aligned}|S|^2=\left(\sum_{(i,j)\in S_x}|S_{i,j}|\right)^2 &\leqslant \sum_{(i,j)\in S_x}1^2\times\sum_{(i,j)\in S_x}|S_{i,j}|^2\\ &=|S_x|\sum_{(i,j)\in S_x}|S_{i,j}|^2.\end{aligned}$$

令
$$X=\bigcup_{(i,j)\in S_x}(S_{i,j}\times S_{i,j}),$$

则
$$|X|=\sum_{(i,j)\in S_x}|S_{i,j}|^2.$$

作映射$f: X\to S_y\times S_z$,

$$f((x,i,j),(x',i,j))=((x,j),(x',i)).$$

显然f为单射. 因此$|X|\leqslant|S_y|\cdot|S_z|$，故

$$|S|^2\leqslant|S_x|\cdot|X|\leqslant|S_x|\cdot|S_y|\cdot|S_z|.$$

6. (1) 若不然，则对某个$n\geqslant 4$，有$S(n)>n^2-14$，于是存在$k=n^2-13$个正整数$a_1,a_2,\cdots,a_k$，使得

$$n^2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2,$$

$$\therefore\quad (a_1^2-1)+(a_2^2-1)+\cdots+(a_k^2-1)=13.$$

从而$a_i^2-1\in\{0,3,8\}$，设$a_1^2-1,a_2^2-1,\cdots,a_k^2-1$中有$a$个0，$b$个3和$c$个8，则有

$$3b+8c=13.$$

c只能为0, 1, 但这两种情况下, 均无非负整数解(b,c). 从而, 对一切正整数$n \geqslant 4$, 都有

$$S(n) \leqslant n^2 - 14.$$

(2) 对$n = 13$, 可以成立等式$S(n) = n^2 - 14$. 即对于任何正整数$k \leqslant S(13) = 13^2 - 14 = 155$, 都可以将$13^2 = 169$表示成$k$个正整数的平方之和. 先证两个引理.

引理1 对任何正整数l, 都可将2^{2l}表成$3t-2$个正整数的平方之和, 其中t满足条件$1 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3}(2^{2l}+2)$的任一正整数.

对l用数学归纳法易证.

引理2 对任何正整数$n \geqslant 13$, 都可以将n^2表示成k个正整数的平方之和, 其中, k是任何一个满足条件: $\frac{n^2}{4} \leqslant k \leqslant n^2 - 14$的正整数.

事实上, 当$k \equiv n^2 \pmod 3$, 可将n^2表示成$\frac{1}{3}(n^2-k)$个2^2和$\frac{1}{3}(4k-n^2)$个1之和; 当$k \equiv n^2 - 1 \pmod 3$时, 可将n^2表示成2个3^2, $\frac{1}{3}(n^2-k-1)-5$个2^2和$\frac{1}{3}(4k-n^2+1)+3$个1的和; 当$k \equiv n^2 - 2 \pmod 3$时, 可将n^2表示成1个3^2, $\frac{1}{3}(n^2-k-2)-2$个2^2和$\frac{1}{3}(4k-n^2+2)+1$个1之和, 故引理2成立.

(a) 当$k = 1, 2$时, $169 = 13^2 = 5^2 + 12^2$, 知命题成立.

(b) 当$3 \leqslant k \leqslant 42$时, 有三种情形:

若$k \equiv 1 \pmod 3$, 则因$13^2 = 5^2 + 4^2 + 8^2 + 8^2$, 于是只需分别对两个$8^2$用引理1即可.

若$k \equiv 2 \pmod 3$, 则因$13^2 = 3^2 + 4^2 + 4^2 + 8^2 + 8^2$, 于是只要对两个$4^2$和两个$8^2$用引理1即可.

若$k \equiv 0 \pmod 3$, 且$k \leqslant 33$时, 由$13^2 = 3^2+4^2+12^2 = 3^2 + 4^2 + 3^2 \cdot 4^2$及引理1, 知命题成立; 又当$36 \leqslant k \leqslant 42$时, 由$13^2 = 3^2 + 4^2 + 6^2 + 3(2^2 + 2 \cdot 4^2)$及引理1, 知命题成立.

(c) 当$43 \leqslant k \leqslant 155$, 由于$4k \geqslant 172 > 13^2$, 由引理2知, 命题成立.

(3) 我们来证明, 若$S(n) = n^2-14\ (n \geqslant 13)$, 则$S(2n) = (2n)^2 - 14$.

由于$S(n) = n^2 - 14$, 故对任何正整数$1 \leqslant k \leqslant n^2 - 14$, 都存在$k$个正整数$a_1, a_2, \cdots, a_k$, 使得

$$n^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2,$$

$$\therefore \quad (2n)^2 = (2a_1)^2 + (2a_2)^2 + \cdots + (2a_k)^2.$$

对这样的k, $(2n)^2$可表成k个正整数的平方和.

又由于$(2n)^2 = n^2 + n^2 + n^2 + n^2$, 对4个$n^2$运用条件$S(n) = n^2 - 14$, 可知对任何正整数$4 \leqslant k \leqslant 4(n^2 - 14)$都可将$(2n)^2$表成$k$个正整数的平方和.

对于任何正整数$4(n^2-14) \leqslant k \leqslant 4n^2-14$, 因当$n \geqslant 13$时, 有$4k \geqslant 16(n^2 - 14) = 4n^2 + 2(6n^2 - 112) > (2n)^2$, 由引理2知, 对这样的$k$, 可将$(2n)^2$表成$k$个正整数的平方和.

因$S(13) = 13^2 - 14$, 所以存在无穷多个正整数n, 使得$S(n) = n^2 - 14$.

二、第43届美国中学数学竞赛 (AHSME)

试　　题

1. $6^6+6^6+6^6+6^6+6^6+6^6=$

(A) 6^6　(B) 6^7　(C) 36^6

(D) 6^{36}　(E) 36^{36}

2. 如果$3(4x+5\pi)=P$, 那么$6(8x+10\pi)=$

(A) $2P$　(B) $4P$　(C) $6P$

(D) $8P$　(E) $18P$

3. 一罐中装满硬币和珠子, 它们或是银的, 或是金的. 罐中珠子数占20%, 40%的硬币是银的. 罐中金币占百分之几?

(A) 40%　(B) 48%　(C) 52%

(D) 60%　(E) 80%

4. 如果$m>0$且点$(m,3)$和点$(1,m)$在斜率为m的直线上, 那么$m=$

(A) 1　(B) $\sqrt{2}$　(C) $\sqrt{3}$

(D) 2　(E) $\sqrt{5}$

5. 如果a,b和c是正整数且a,b是奇数, 那么$3^a+(b-1)^2c$是

(A) 奇数, 不论c是奇数或偶数

(B) 偶数, 不论c是奇数或偶数

(C) 奇数, 如果c是偶数; 偶数, 如果c是奇数

(D) 奇数, 如果c是奇数; 偶数, 如果c是偶数

(E) 奇数, 如果c不是3的倍数; 偶数, 如果c是3的倍数

6. 如果$x > y > 0$, 那么$\dfrac{x^y y^x}{y^y x^x} =$

(A) $(x-y)^{\frac{y}{x}}$ (B) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{x-y}$ (C) 1

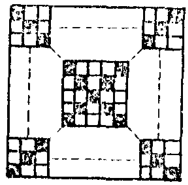
(D) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{y-x}$ (E) $(x-y)^{\frac{x}{y}}$

7. 设w对于x的比是$4:3$, y对于z的比是$3:2$, z对于x的比是$1:6$, 那么w对于y的比是

(A) 1:3 (B) 16:3 (C) 20:3

(D) 27:4 (E) 12:1

8. 一块正方形地板由全等的正方形瓷砖铺成, 这地板的两条对角线上的瓷砖是黑色的, 其余的瓷砖是白色的, 如果有101块黑色瓷砖, 那么瓷砖的总数是



(第8题)

(A) 121 (B) 625

(C) 676 (D) 2500 (E) 2601

9. 五个边长为$2\sqrt{3}$的等边三角形, 被排列在一条直线的同一侧, 使得每个三角形的一条边在此直线上, 且一个三角形的底边的中点是下一个三角形的顶点, 这五个三角形并起来所覆盖的平面区域的面积是

(A) 10 (B) 12 (C) 15

(D) $10\sqrt{3}$ (E) $12\sqrt{3}$

10. 使得关于x的方程$kx - 12 = 3k$有整数解的正整数k有几个?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

11. 两同心圆的半径之比是1:3, 如果AC是大圆的一条直径, BC是大圆的一条与小圆相切的弦, 且$AB = 12$, 那么