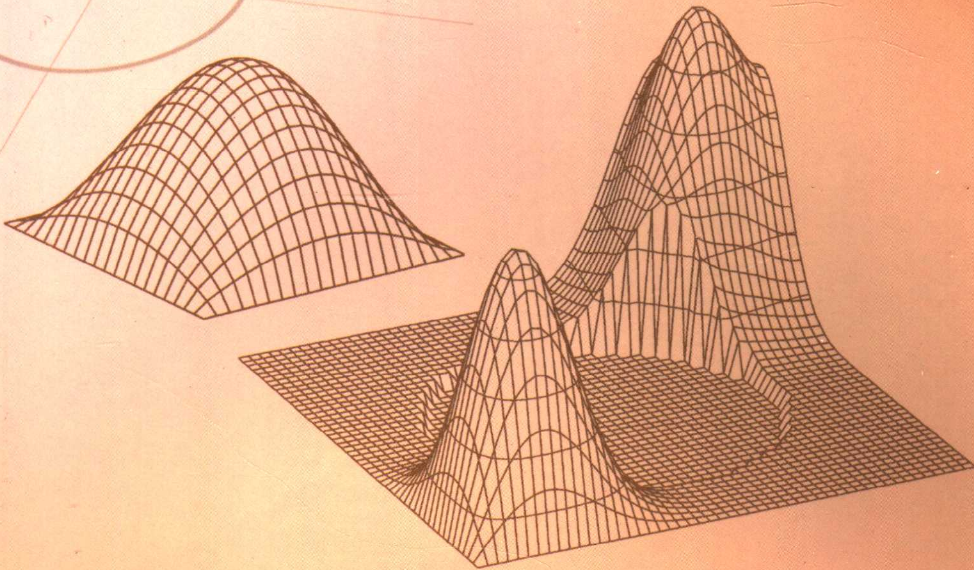
图灵数学·统计学丛书



Numerical Solution of Partial Differential Equations

偏微分方程数值解

（第2版）

[英] K. W. Morton
D. F. Mayers 著

李治平 门大力 许现民 张 硕 译

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING 图灵数学·统计学丛书

Numerical Solution of Partial Differential Equations

偏微分方程数值解

（第 2 版）

[英] K. W. Morton　D. F. Mayers 著

李治平　门大力　许现民　张硕　译

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

图书在版编目（CIP）数据

偏微分方程数值解 /（英）莫顿，（英）迈耶斯著；李治平等译.
—北京：人民邮电出版社，2006.1
（图灵数学·统计学丛书）

ISBN 7-115-14203-3

Ⅰ. 偏… Ⅱ. ①莫…②迈…③李… Ⅲ. 偏微分方程—数值计算 Ⅳ. 0241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 143448 号

内容提要

偏微分方程是构建科学、工程学和其他领域的数学模型的主要手段．一般情况下，这些模型都需要用数值方法去求解．本书提供了标准数值技术的简明介绍．借助抛物线型、双曲线型和椭圆型方程的一些简单例子介绍了常用的有限差分方法、有限元方法、有限体方法、修正方程分析、辛积分格式、对流扩散问题、多重网格、共轭梯度法．利用极大值原理、能量法和离散傅里叶分析清晰严格地处理了稳定性问题．本书全面讨论了这些方法的性质，并附有典型的图像结果，提供了不同难度的例子和练习．

本书可作为数学、工程学及计算机科学专业本科教材，也可供工程技术人员和应用工作者参考．

图灵数学·统计学丛书

偏微分方程数值解（第 2 版）

◆ 著 [英] K.W.Morton D.F.Mayers
译 李治平 门大力 许现民 张 硕
责任编辑 王丽萍

◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市崇文区夕照寺街 14 号
邮编 100061 电子函件 315@ptpress.com.cn
网址 http://www.ptpress.com.cn
北京顺义振华印刷厂印刷
新华书店总店北京发行所经销

◆ 开本：800×1000 1/16
印张：14.5
字数：304 千字 2006 年 1 月第 1 版
印数：1 – 4 000 册 2006 年 1 月北京第 1 次印刷
著作权合同登记号 图字：01-2005-6096 号
ISBN 7-115-14203-3/TP·5090

定价：29.00 元

读者服务热线：(010)88593801 印装质量热线：(010)67129223

译 者 简 介

李治平 北京大学教授、博士生导师. 现任北京大学数学科学学院科学与工程计算系副系主任; 北京计算数学学会理事长, 中国计算数学学会常务理事; 《数值计算与计算机应用》和《高等学校计算数学学报》编委.

1982 年毕业于西安交通大学, 获理学学士学位; 1982～1987 年就读于北京大学, 获理学硕士、博士学位. 1988～1990 年在英国 Heriot-Watt 大学做博士后研究, 任 Research Associate ; 1991～1993 年在英国 Brunel 大学做博士后研究, 任 Research Fellow. 曾先后在英国伦敦中央工业学院、美国宾州州立大学、普林斯顿大学、普林斯顿高等研究所、奥地利维也纳工业大学、瑞士苏黎世大学、香港浸会大学作访问学者. 在偏微分方程数值解方面从事了多年的研究工作.

译者序

偏微分方程的数值方法不仅是计算数学专业的一门重要的课程，而且有越来越多的理工科各专业的学生要求学习这门课程. 目前，有关的教材已经很多. 然而，这本由 K.W. Morton 和 D.F. Mayers 为牛津大学数学专业本科生编写的《偏微分方程数值解》确实是一本很有特点的好教材. 它通过一些简单的模型问题重点介绍了有限差分方法，在离散范数下讨论了算法的相容性、稳定性和收敛性，并且介绍了修正方程分析等用于分析算法引起的耗散、色散等现象及分析算法稳定性的有力工具；利用极大值原理、能量法和离散傅里叶分析清晰严格地处理了稳定性问题；同时也简略地介绍了有限元方法、有限体积法等经典的具有一般性的方法，还介绍了多重网格法、共轭梯度法等一些实用的迭代算法，求解由偏微分方程离散化得到的线性代数方程组可使用这些算法；还介绍了如多辛格式这样的该领域的最新进展. 该书在讲述方法的同时，还注意介绍这些方法的发展历史、设计思想和理论依据，并给出了相当丰富的参考文献. 该书内容丰富，但其所需的数学基础知识却相对较少，所以很适合将其作为一门独立的课程或偏微分方程理论的辅助课程，较早地引入到数学本科以及理工科其他专业本科高年级和研究生的教学中.

在北京大学数学学院科学与工程计算系，原来为本科高年级学生开设了有限差分方法和有限元方法两门各一个学期的课程. 然而近几年，为了适应学科发展和课程设置等方面的需要，将两者合并成了偏微分方程数值解这门一个学期的课程. 由于课时的减少，在教学内容的取舍，数学基础难易程度的掌握等方面可以说是矛盾重重. K. W. Morton 和 D.F. Mayers 编写的《偏微分方程数值解》这本教材为我们提供了很好的范例，很值得我们参考借鉴.

我们很高兴能有机会将该书推荐给国内的读者.

本书的翻译工作是由我和我的 3 名博士生合作完成的. 第 1 、 3 、 5 章由我自己翻译，其他章节由 3 名博士生翻译（第 2 章由门大力翻译，第 4 章由许现民翻译，第 6 、 7 章由张硕翻译），全书由我负责统校 [1].

由于译者无论是英文还是中文水平都有限，难免会有不妥之处，欢迎广大读者批评指正.

李治平

2005 年 11 月于燕园

[1] 出版者说明：本书由 LaTeX排版，出版者感谢译者辛勤的工作，也感谢北京师范大学李勇教授对我们排版工作的帮助.

第一版序

本书源于我们两人在过去几年中分别给牛津大学数学系本科毕业班所讲的课程，它共包含 16 讲．我们的同事建议把它作为偏微分方程入门理论的一个配套课程更早些面向学生开设，这促使我们编写了这本书．另一方面，我们也在给硕士研究生讲授数学建模和数值分析这门课时使用了大致相同的内容．基于这两方面的考虑，我们选择了适当的主题、难度和教授方式．

我们主要关注有限差分方法和它们在标准模型问题中的应用，这样在比较严格地处理如收敛性和稳定性等数学概念的同时，可以用简单的术语来描述方法．在更高级的或者更偏重有限元方法的课程中，使用标准的索伯列夫范数会更自然和方便．然而我们没有这样选择，仅仅使用了离散范数，确切地说是最大值范数和 l_2 范数．我们有许多理由这么做．首先，这自然与需要尽量少的背景知识 (包括分析、偏微分方程理论和计算等方面) 的目的相一致，因此本书可以作为本科生的早期课程适用于理工科和数学系的学生．

同等重要地是，这与我们分析椭圆型和抛物型问题的算法时广泛应用离散最大值原理，与我们处理离散能量方法与守恒律，研究有限区域上傅里叶波型等方面的做法相一致．我们相信从纯粹的离散层面来论述所有这些概念有助于加强学生对这些重要数学工具的理解．同时这也是非常实用的方法，并且有助于将差分格式理解为物理原理的直接模型：毕竟，所有的计算都在有限网格上进行，而且实际计算的稳定性等也是在离散层面来检测的．进而，用一个时间步长上的阻尼和色散来解释差分格式作用于能在网格上表示的傅里叶波型所产生的效果比使用截断误差价值更大，这也例证了本书之所以采取目前做法的第二个理由．

尽管如此，为了正确地理解偏微分方程的数值方法，了解随网格参数 h 趋向于零的极限过程是至关重要的．例如，如果 U^n 是在第 n 个时间层的离散逼近，并且其关于时间步长 Δt 的变化由 $U^{n+1} = C_h U^n$ 表示，许多学生觉得要区分当固定网格和固定 Δt 时 $n \to \infty$ 的极限过程，和当 $n\Delta t$ 固定而 h, $\Delta t \to 0$ 时 $n \to \infty$ 的极限过程非常困难．这两个过程都有其实用方面的重要性：许多定常问题的离散方程求解常常仿照非定常问题的时间步迭代过程，前者与此过程有关；而理解后者在选择逼近非定常问题的方法以避免不稳定性时极其重要．一致有界和一致收敛的概念是很关键的；当然，如果使用和 h 无关的范数会更容易处理．但是 Palencia 和 Sanz-Serna[1] 的例子指出，基于离散范数可以建立

[1] Palencia, C. and Sanz-Serna, J.M.(1984), An extension of the Lax-Richtmyer theory, *Numer. Math.* **44**(2), 279-283.

一套严格的理论，而这正是我们所采用方法的基础．它也意味着定义例如适定性等概念时必须十分小心；虽然这里的处理略显笨拙，但是它在实用和教学法方面却带来了很大的好处．

主题顺序的细心安排体现了以上的思想．我们从处理抛物型问题开始，它在逼近和分析方面都是最简单的，同时也具有最广泛的应用．通过在扩散算子上引入附加的对流项，就很自然地引到双曲型问题的研究．在细致地讨论这两种情况后，我们才在第 5 章对发展问题严格地给出相容性、收敛性和稳定性的概念．最后两章分别讲述椭圆型问题的离散化及有限元方法引论和求解由此得到的代数方程组的迭代解法，后者和抛物型方程解之间的紧密联系使主题间的关联更加完整．在所有情况下，我们只给出了为数不多的几种算法，但每一种都给出了全面的分析，并且证实了它们的实用性．事实上，本书恪守了一个宗旨，就是所有的模型问题以及逼近它们的方法都很简单且具有一般性．

每章的结尾有难度各异的习题；它们完善、拓展或者只是例述了正文中的内容．它们基本上都是分析类的习题，所以，全书可以作为一门纯理论课程的教材．尽管这样，因为数值分析有很实用的目标，所以在正文中都有各个方法的数值演示；依照这些例子可以容易地教学生构造进一步的数值试验．计算工具和实践的快速发展让我们相信，这种可扩充的方法比给出显式的实际练习更有利．

我们用两种方式引用相关文献．在正文中引入关键的概念以及其与特定的原始论著相关联时，在注脚中给出了完整的参考资料，前言就已经采用了这种形式．另外，在每章的结束处包含简短的一节名为“文献注记与推荐读物”．这两种方式所提供的参考文献都不是全面的，但是，它们足够帮助有兴趣的学生进一步学习相关内容．当然 Richtmyer 和 Morton(1967) 处理发展问题的方法给予了我们很大的启示和影响，本书可以作为他们那本书的引论和补充．

感谢阅读本书早期版本的同事和他们给出的许多建议 (特别是 Endre Süle 有益的评注)．同时也感谢检验习题的学生们的帮助．在本书很长的成形过程中，我们的秘书 Jane Ellory 和 Joan Himpson 细致耐心的工作对本书的完成同样至关重要．

第二版序

本书第一版出版后的10年中，偏微分方程数值解法在许多方面都有了发展. 但是当我们询问在第二版中主要应该做何种更改时，得到的大多数反馈是不应该更改本书的要点或者说只做非实质的改变. 所以我们要求自己加入不超过 10%~20% 的新内容并且很少删减前版内容：结果本书增加了大约 23% 的内容.

无论从理论还是从处理实际问题工具的角度来说，有限差分方法依然是介绍偏微分方程数值解法的出发点，所以它们仍然是本书的核心. 当然椭圆型方程领域有限元方法占主导地位，而在逼近许多双曲型问题时有限体积法更占优势. 进而，有限体积法是两种主要方法间有用的桥梁. 因此我们在第 4 章加入了一节讲述此主题，而且我们可以用这个方法重新解释标准的差分格式，例如 Lax-Wendroff 方法和盒式格式，然后例示如何简单地把它们推广到非一致网格. 另外，在第 6 章介绍有限元方法后，新加入了关于对流扩散问题的一节：它涵盖了有限差分和有限元方法，并且引入了 Petrov-Galerkin 方法.

有限差分方法的理论框架完整建立已久，所以不需要做太多修改. 可是在过去几年中逼近常微分方程和偏微分方程的方法之间发生了许多相互的影响，因而我们也从几方面体现了这一点. 首先，人们将辛方法应用于哈密顿常微分方程系统以及推广应用于偏微分方程的兴趣日益增长，因此我们在第 4 章用一节讨论了这个主题，并且用这个思想去分析了用于逼近波动方程的交错蛙跳格式. 更一般地，在第 5 章中对线法的重新关注让我们完全改写了关于稳定性分析的能量方法一节，这不仅使特例分析而且使整体一致性得到了重要的改善. 在这一章还加入了介绍修正方程分析一节. 虽然这是一个 30 年前引入的技术，但是这种方法更好地解释了盒式格式，让人们开始重新评估它的价值. 进而，它在常微分方程逼近中的应用不但加强了它在分析方面的地位，而且其重要性也得到了更广泛的认可.

在偏微分方程数值解领域中，我们所描述的方法在实际应用中发生了巨大的变化. 为了在新版中依然秉承恰当地介绍和反映实用方法的原则，本书做了一些改进. 特别地，对大规模代数方程组系统迭代解法的处理有了极大的改进. 这导致了在依赖时间的问题中更加大量地使用隐式格式，在椭圆型问题的有限元模拟中用迭代法代替直接法，以及处理这两种类型问题的方法之间更密切的相互影响. 因此第 7 章的重点已经改变并新增了两节，分别介绍十分重要的多重网格方法和共扼梯度法，它们也正是实际计算中发生如此大变化的主要原因.

我们曾经考虑在本书中包含一定数量的 Matlab 的程序来演示一些主要方法. 但是考

虑到最近 10 年个人计算机及其软件的飞快发展，我们意识到这样的材料会很快过时，因此本书的这一部分没有改变．我们像第一版一样处理文献资料和文献注记，不过在本书末尾处把它们都汇集到了参考文献目录中．

每章结尾的练习都有 LaTeX文件格式的答案．若教授这方面的课程，只要发送电子函件到 solutions@cambridge.org 就可以获得．

我们非常感谢指出本书第一版中错误的读者们，同时希望我们在第二版中完全更正了这些错误并且没有再引入新的错误．再次感谢我们的同事对新版本的阅读和建议．

目　录

第 1 章　引言 1

第 2 章　一维抛物型方程 5

2.1　引论 5
2.2　模型问题 5
2.3　级数逼近 6
2.4　模型问题的显式格式 7
2.5　差分格式和截断误差 10
2.6　显式格式的收敛性 12
2.7　误差的傅里叶分析 15
2.8　隐式方法 17
2.9　Thomas 算法 18
2.10　加权平均和 θ-方法 20
2.11　最大值原理和 $\mu(1-\theta) \leqslant \frac{1}{2}$ 时的收敛性 25
2.12　三时间层格式 30
2.13　更一般的边界条件 30
2.14　热量守恒性质 34
2.15　更一般的线性问题 36
2.16　极坐标 40
2.17　非线性问题 42
文献注记与推荐读物 44
习题 45

第 3 章　二维和三维抛物型方程 **49**

3.1　盒形区域上的显式方法 49
3.2　二维 ADI 方法 (交替方向迭代法) 50
3.3　三维 ADI 和 LOD 方法 55
3.4　曲线边界 56
3.5　应用于一般抛物型问题 61
文献注记与推荐读物 65
习题 65

第 4 章　一维双曲型方程 **69**

4.1 特征线方法 69
4.2 CFL 条件 71
4.3 迎风格式的误差分析 75
4.4 迎风格式的傅里叶分析 77
4.5 Lax-Wendroff 格式 80
4.6 守恒律的 Lax-Wendroff 方法 83
4.7 有限体积格式 89
4.8 盒式格式 93
4.9 蛙跳格式 99
4.10 哈密顿系统与辛积分格式 103
4.11 相误差和振幅误差的比较 109
4.12 边界条件与守恒性质 110
4.13 高维情形 115
文献注记与推荐读物 117
习题 117

第 5 章 相容性、收敛性和稳定性 121

5.1 问题的定义 121
5.2 有限差分的网格与范数 122
5.3 有限差分逼近 124
5.4 相容性、精度的阶和收敛性 125
5.5 稳定性与 Lax 等价定理 126
5.6 稳定性条件的计算 128
5.7 实用的（严厉的或强的）稳定性 133
5.8 修正方程分析 135
5.9 守恒律与能量法分析 141
5.10 理论综述 148
文献注记与推荐读物 151
习题 151

第 6 章 二维线性二阶椭圆型方程 155

6.1 一个模型问题 155
6.2 模型问题的误差分析 155
6.3 一般的扩散问题 157
6.4 曲线边界上的边值条件 159
6.5 利用最大值原理的误差分析 162

6.6 渐近误差分析 170
6.7 变分形式和有限元方法 174
6.8 对流扩散问题 179
6.9 一个例子 182
文献注记与推荐读物 184
习题 185

第 7 章 线性代数方程组的迭代求解 **189**

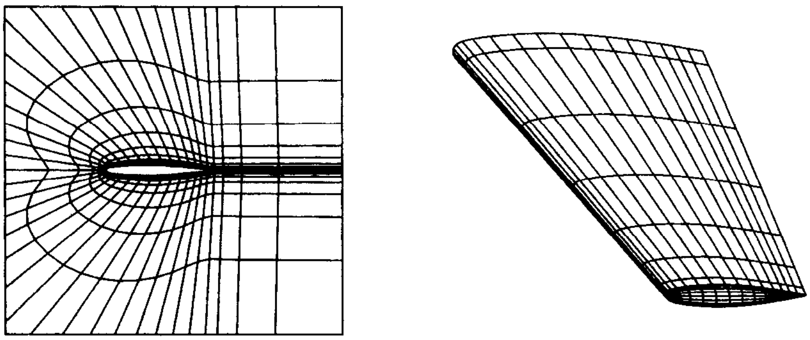
7.1 显式基本迭代格式 190
7.2 迭代法的矩阵形式及其收敛性 192
7.3 收敛性的傅里叶分析 195
7.4 应用于一个例子 199
7.5 推广及相关的迭代法 201
7.6 多重网格法 202
7.7 共轭梯度法 206
7.8 数值例子：几个对比 209
文献注记与推荐读物 210
习题 211

其他参考文献 **213**

第 1 章　引言

偏微分方程（ PDE ）是众多描述物理、化学和生物现象的数学模型的基础，而且其最新的应用已经扩展到经济、金融预测、图像处理及其他领域．要通过相应的PDE模型研究这些现象，我们通常需要结合一些对简单特例的分析，采用数值方法求得这些方程的近似解；而在一些最新的应用中数值模型已经几乎是独当一面了．

我们来考虑如图 1-1 所示的机翼设计问题．当然，还有许多可供我们选择的好例子，例如天气预报、污染物的扩散、喷气发动机或内燃机的设计、核反应堆的安全性、石油的勘探与开采等等．



（a）一种典型的（无粘）环绕机翼截面的计算网格　　（b）机翼表面的相应网格

图 1-1　计算网格

在*定常* (steady) 飞行状态中，机翼两个重要的设计指标是由空气流过机翼而产生的升力和阻力．我们为一个设计方案计算这些量时，根据*边界层* (boundary layer) 理论，在很好的近似意义下，在靠近机翼表面有一个很薄的边界层，层内粘力起着重要的作用，而在边界层之外，可以假设气流是*无粘的* (inviscid)．因此，假设机翼是局部平坦的，则机翼附近的气体流动可由以下模型方程描述

$$u\frac{\partial u}{\partial x} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (1/\rho)\frac{\partial p}{\partial x}\ , \tag{1.1}$$

其中 u 是切空间坐标 x 方向的流动速度， y 是法向坐标， ν 是粘性， ρ 是密度， p 是压力；我们在该方程中忽略了法向速度．这是一个典型的关于 u 的*抛物型方程* (parabolic equation)，其中 $(1/\rho)\partial p/\partial x$ 作为外力项.

在机翼边界层之外，仅限于二维横截面 (cross section) 上，我们可以假设气流是无粘的且其速度可以表示为 $(u_\infty + u, v)$，其中 u 和 v 与气流在无穷远处沿 x 方向的速度 u_∞ 相比是小量. 我们通常还可以假设气流是无旋的 (irrotational)，因此有

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0\ ; \tag{1.2a}$$

假设气流是等熵的 (homentropic)，则结合质量和 x 方向动量的守恒律 (conservation laws) 且仅保留一阶小量，我们就得到了简化的模型

$$(1 - M_\infty^2)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0\ , \tag{1.2b}$$

其中 M_∞ 是无穷远处的马赫数 (Mach number)， $M_\infty = u_\infty/a_\infty$，$a_\infty$ 是声速.

显然当气流是亚音速 (subsonic) 时，即 $M_\infty < 1$ 时，方程组 (1.2a, b) 与柯西 - 黎曼 (Cauchy-Riemann) 方程等价，是椭圆型方程组 (elliptic equations). 而对于超音速流 $M_\infty > 1$, 该方程组等价于一维波动方程，为双曲型方程组 (hyperbolic equations). 我们也可以在 (1.2b) 上作用 $\partial/\partial x$, 在 (1.2a) 上作用 $\partial/\partial y$ 并消去 v, 从而得到与 Laplace 方程或二阶波动方程 (wave equation) 等价的方程组.

因此，我们仅从这一个问题中就精练出了三种基本类型的偏微分方程，当然，从我们前面提到的其他问题中也同样可以得到这三种基本类型的偏微分方程. 由 PDE 理论，我们知道这三种类型偏微分方程的分析性质、问题适定性 (well-posedness) 的提法、边界条件 (boundary condition) 的提法及其解的性质，所有一切都差别巨大. 对于这三种基本类型的偏微分方程的数值求解及其数值分析来说，情况也是如此.

在本书中，我们将只讨论这三类方程的模型问题，因为理解这些模型问题是研究更复杂的偏微分方程组的重要基础. 我们将讨论算法，主要是有限差分方法 (finite difference method) 及密切相关的有限体积法 (finite volume method)，这些方法可以应用于解决更实际、更复杂的问题，但只有在简单的情况下才能得到深入透彻的分析结果. 对于模型问题，我们将能够建立当有限差分网格加密时算法的稳定性 (stability)、收敛性 (convergence) 等严格的分析理论. 同样，我们能够细致地研究求解由差分方法得到的代数方程组的迭代法 (iterative method) 的收敛速度 (speed of convergence), 所得到的结果可以广泛地应用于无法进行精确分析的实际问题中去.

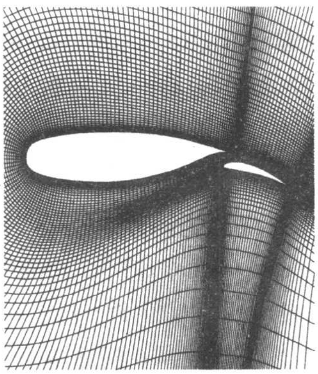
尽管本书的重点放在分别单独讨论某一类型的方程上，我们必须指出的是在许多实际问题中这些类型的方程会同时出现在一个方程组中. 有着广泛应用的欧拉—泊松 (Euler-Poisson) 方程组就是这样一个例子：在空间变量为二维，时间为 t 时，该方程组是关于两个速度分量和前面所提到过的压力这 3 个变量的偏微分方程组；若使用更紧凑的

记号 (例如用 ∂_t 代替 ∂/∂_t)，则欧拉—泊松方程组可以表示为以下形式

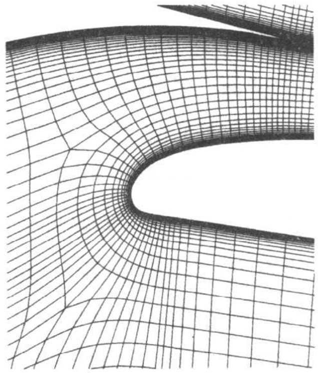
$$
\begin{aligned}
\partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u + \partial_x p = 0 \\
\partial_t v + u\partial_x v + v\partial_y v + \partial_y p = 0 \\
\partial_x^2 p + \partial_y^2 p = 0.
\end{aligned} \tag{1.3}
$$

求解该方程组时需要结合两种非常不同的方法：对于最后一个关于 p 的椭圆型方程，需要采用第 6 、 7 两章讲述求解大型代数方程组的方法，其解又为前两个双曲型方程组提供了外力项；而对于双曲型方程组一般可采用第 $2\sim5$ 章讲述的方法，在时间方向上以逐步推进的方式求解. 这类模型通常源于流速远低于空气动力学中气流速度的问题，例如多孔介质中的流体运动 (如地下水的流动). 这两种类型的方法需要紧密地耦合起来才能有效地发挥作用.

回到前面机翼设计的例子，我们不妨提一下实际当中会出现的一些复杂情况. 对于民用飞机，最主要的是考虑其在设计速度下定常飞行时的性能；然而，对于军用飞机，操控性也是很重要的，也就是说要考虑气流是非定常的，即方程包含时间变量的情况. 这时，即便是亚音速流，相应于 (1.2a, b) 的方程组也是双曲型的 (一个时间变量和两个空间变量)，该方程组与欧拉—泊松方程组 (1.3) 类似但更为复杂. 同时还必须考虑更大的几何复杂度：特别是在计算机翼尖端和机翼与机体的结合部附近的气流时，必须考虑三维的机翼；而在着陆和起飞阶段，为在低速时提供更大的升力，飞机的襟翼会展开，这时机翼的横截面就会如图 1-2 所示.



（a）整体情况



（b）计算Navier-Stokes方程时可能会用到的网格局部细节

图 1-2　一种典型的复合型机翼 (DRA, Farnborough 提供)

另外，我们一直假设流动是光滑的，但在实际中我们需要研究诸如激波、涡片、湍流及其相互间的作用. 我们将要研究建立的方法可以应用于模拟所有这些现象，但其所涉及的内容远远超出了本书的范围. 目前，工业界可以做到的事包括，近似求解绕整架飞机流

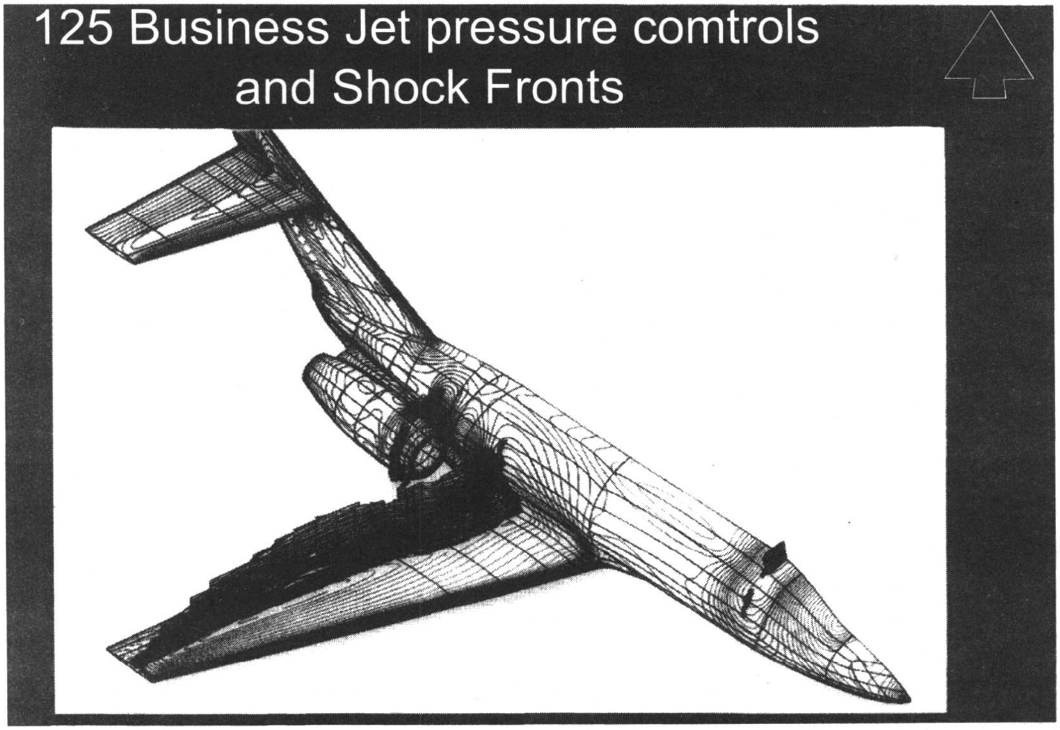


图 1-3　巡航条件下整架飞机的压力等高线和部分网格 (British Aerospace 提供)

动的非定常粘性流 (unsteady viscous flow) 的平均雷诺数 (Reynolds-averaged) Navier-Stokes 方程，如图 1-3 所示，进而，其终极目标是将这些对流体运动的预测能力融合到飞机整体设计的环节中去：我们希望通过设计飞机的形状使气流按给定的方式绕飞机运动，而不是仅仅满足于计算绕给定形状的飞机运动的气流.

最后，在结束引言这章之前，在符号方面有几点说明提请读者注意. 我们通常用符号 $\approx$ 表示在数值计算的意义下“近似等于 (approximately equal to)”，而符号 $\sim$ 则表示“渐近于 (asymptotic to)”，例如当 $t \to 0$ 时 $f(t) \sim t^2$ 表示 $t \to 0$ 时 $t^{-2}[f(t) - t^2] \to 0$，这也可以记为 $f(t) = t^2 + o(t^2)$； $f(t) = O(t^2)$ 则表示 $t^{-2}f(t)$ 当 $t \to 0$ 时是有界的. 我们通常用符号 $:=$ 表示等式左端是由等式右端定义的(defined). 向量一般用粗体字表示.

第 2 章 一维抛物型方程

2.1 引论

本章讨论含有一个空间变量和一个时间变量 t 的抛物型方程 (parabolic equation) 的数值解法. 我们从最简单的均匀介质中的热传导模型出发. 对这一模型问题 (model problem) 可以直接采用显式差分格式, 用最大值原理或者傅里叶分析 (Fourier analysis) 的方法也很容易给出它的误差分析. 然而我们将会看到, 如果不严格限制时间步长的大小, 数值解将是不稳定的. 所以, 我们需要进一步考虑其他更为精确的数值方法来避免这种限制. 时间方向所需离散步数的减少所带来的好处远远超过了由此产生的额外的数值计算复杂性. 然后, 我们把这些方法推广到具有更一般边界条件的问题, 以及更一般的线性 (linear) 抛物型方程. 最后, 讨论更复杂的非线性方程 (nonlinear equation) 的解法.

2.2 模型问题

科学和工程中的许多问题常用关于未知函量 $u(x,t)$ 的某种特殊形式的线性抛物型方程来描述

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+c(x,t)u+d(x,t), \tag{2.1}$$

其中 b 是严格正的. 在 $t=0$ 时, 我们取如下形式的*初始条件* (initial condition)

$$u(x,0)=u^0(x), \tag{2.2}$$

其中 $u^0(x)$ 是给定函数. 问题的解在 $t>0$ 和 x 属于一个开区域 R 时满足 (2.1). R 一般是整个实轴、半实轴 $x>0$ 或者一个如 $(0,1)$ 的开区间. 在后两种情形, 要求解在 R 的闭包上有定义并且满足一定的*边界条件* (boundary condition). 我们将假定边界条件关于 u 或者它的一阶空间导数 $\partial u/\partial x$ 是线性的, 或者二者都是线性的. 如果 $x=0$ 是左边界, 边界条件形式如下

$$\alpha_0(t)u+\alpha_1(t)\frac{\partial u}{\partial x}=\alpha_2(t), \tag{2.3}$$

其中

$$\alpha_0\geqslant 0,\ \alpha_1\leqslant 0 \text{ 且 } \alpha_0-\alpha_1>0. \tag{2.4}$$