

微分学

Н. Н. 魯金 著

高等教育出版社



微 分 学

H. H. 魯 金 著
張理京 譚家岱 譯

高 等 教 育 出 版 社

本書系根据苏联国立“苏维埃科学”出版社（Государственное
издательство “Советская наука”）出版的魯金（Н. Н. Лукин）著
“微分学”（Дифференциальное исчисление）1953年第四版譯出。原
書經苏联高等教育部审定为高等工业学校教科書。

微 分 学

Н. Н. 魯金 著

張理京 譚家倫譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內大街7号
(北京市書刊出版業營業登記證出字第054号)

商务印书馆上海厂印刷 新华书店发行

統一書号 18010·226 开本 850×1168 1/32 印張 15
字數 460,000 印數 98,001—165,000 定價(4) ¥1.70

1951年6月上等初版(共印70,000)

1954年7月下册初版(共印68,000)

1956年11月合訂本第1版 1959年12月上海第11次印刷

原編者的話

“蘇維埃科學”出版社出版的這第四版數學分析教程，給高等工業學校用的兩卷教本“微分學”及“積分學”，跟1952年的第三版比較起來是沒有什麼修改的。其中只不過訂正了一些個別的小錯誤。

這兩卷教本的作者H. H. 魯金院士(1883—1950)是蘇聯大數學家之一，蘇聯有好幾代的工程師和教師都是照着他的書來學習的。

H. H. 魯金在1883年12月10日生於湯姆斯克城的一個公務員家庭中。1901年秋季他在湯姆斯克地方的中學畢業後進入莫斯科大学數理系數學組，到1906年畢業。他在該校跟俄羅斯的名教授H. E. 茹可夫斯基，B. K. 莫羅捷也夫斯基，Л. Ф. 叶戈羅夫學習，他們對魯金後來的科學活動有很大的影響。

大學畢業後，魯金繼續留校，準備從事大學教學生涯。

1909年魯金參加候補碩士考試，獲得“純粹數學”教研組講師的稱號。

1914年魯金開始在莫斯科大学講授基礎課程及專業課程。他那卓越的講課才能跟他那善於誘導青年學生的能力結合在一起，鼓舞了青年人學習科學的熱忱，激發了他們的自信心。在魯金一生的教學生涯中，他始終是新鮮數學思想的不竭源泉，而且他善於用生動的形式來講授這些思想。魯金的講課極為人所歡迎，他的每堂課總吸引很多的聽眾。

1916年魯金提出他的碩士學位論文“積分及三角級數”。這篇論文的研究是這樣的深入和重要，以致使當局違反了一向的傳統，讓這位青年數學家跳過了碩士學位，直接授予他數學博士的學位。魯金的那篇

論文即使到了今日也还没有失却它的意义；1951年該文刊印为單行本的科学專著。

1917年魯金当选为莫斯科大学数学教授。莫斯科大学中研究实变数函数論方面的大批数学小組的产生,就标志了魯金在該校教学工作的成績。

魯金在他的周圍团結了各种不同年齡的科学工作者:其中有跟他同事多年的成熟的学者,也有学生和研究生中剛从事科学工作的青年数学家。魯金教養了整整的一批学者,其中有許多人在过去和今日都在数学發展史上起了很大的作用。

1927年魯金当选为苏联科学院通訊院士,到1929年当选为正式院士。从那时起魯金主要是在科学院的科学研究机关中工作。魯金在他的晚年主持斯捷克洛夫数学研究所实变数函数論組,并参与自动控制与远距离控制研究所的工作。

魯金的主要科学研究工作在实变数函数論方面;在这門學問上,他获得許多結果,以極重要的發現丰富了数学这門科学。魯金在实变数函数論方面的著作現今已成为經典性的文选。在三角級数及解析函数論方面,魯金也有極重要和深入的研究,在解析函数論方面他曾用实变数函数論的方法来研究。

魯金在他的創造性工作中并不只停留在純粹理論研究的範圍內。他在应用数学方面也作了許多研究,这就是在代数和分析上的数值計算法方面,特别是他对于用賈普利金法來近似积微分方程的問題作了重要的研究。

苏联政府对魯金的功績有很高的評價,并在1945年授与他劳动紅旗勳章。

1950年2月28日魯金因心臟病突然去世。

苏联偉大学者、教师、爱国者魯金的名字在苏联科学史上占有光荣的地位。

目 录

原編者的話

第一章 基本公式1

§1. 初等代数及几何的公式 §2. 三角公式 §3. 平面解析几何公式 §4. 立体解析几何公式 §5. 希腊字母

第二章 数7

§6. 有理数 §7. 有理数的实用意义 §8. 有理数跟直线上的点的对比 §9. 不可通约的线段 §10. 无理数 §11. 无理数是非循环的不尽小数 §12. 实数 §13. 绝对值 §14. 不能用零去除别的数

第三章 量17

§15. 谈数量 §16. 变量 §17. 常量 §18. 量的几何表示法 §19. 变量的数值区域 §20. 线段及区间 §21. 变量的分类 §22. 变量的增量 §23. 常量可当作变量

第四章 函数30

§24. 函数 §25. 自变量与因变量 §26. 函数的符号 §27. 函数数值的计算 §28. 自变量变化的区域 §29. 函数的增量 §30. 函数的几何表示法 §31. 函数增量的几何表示法 §32. 函数的各种来源 §33. 函数的分类

第五章 极限64

§34. 变量的极限 §35. 变量趋近其极限的方式 §36. 无穷小 §37. 极限概念与无穷小概念之间的关系 §38. 趋近极限的变量的几个性质 §39. 无穷小的最重要的性质 §40. 有关极限的基本定理 §41. 无穷大概念 §42. 无穷大与无穷小的关系

第六章 連續性73

§43. 函数的連續性概念 §44. 函数在一点連續的定义 §45. 函数在一点的連續性的几何表示法 §46. 在一点的一边及两边的連續性 §47. 在一点連續的函数的最重要性质 §48. 檢驗連續性的法則 §49. 在綫段上連續的函数的性质 §50. 函数的极限及其表示法, 在无穷大处的极限 §51. 函数的間断的类型, 可

移去与不可移去的间断 §52. 表面间断以及所谓函数的“真值”. 不定式的定值法 §53. 自然对数

第七章 微分法116

§54. 引言 §55. 增量 §56. 增量的比较 §57. 單变量函数的导数 §58. 导数的各种记号 §59. 可微分函数 §60. 一般的微分法则 §61. 导数的几何意义

第八章 代数式的微分法则134

§62. 一般法则的重要性 §63. 常量的微分法 §64. 变量对于其自身的微分法 §65. 代数和的微分法 §66. 常数乘函数的乘积的微分法 §67. 两个函数的乘积的微分法 §68. 个数任意给定的有限个函数之乘积的微分法 §69. 具有常指数的函数乘积的微分法. 指数法则 §70. 商的微分法 §71. 函数的函数的微分法 §72. 微分函数的函数时易犯的錯誤 §73. 函数的函数之实际微分法 §74. 反函数的微分法 §75. 隐函数的微分法

第九章 导数的各种应用159

§76. 曲线的方向 §77. 切线及法线方程; 次切距及次法距 §78. 函数的极大值与极小值; 引言 §79. 增函数与减函数; 它们的檢驗法 §80. 函数的极大值与极小值及其邏輯的定义 §81. 研究函数的极大与极小的第一个方法. 檢驗法则 §82. 在某些点没有导数的連續函数的极大值与极小值 §83. 实际求极大及极小值的一般指示 §84. 导数作为变化率 §85. 直綫运动的速度 §86. 相对时变率(速度)

第十章 逐次微分法及其应用189

§87. 各阶导数的定义 §88. n 阶导数 §89. 隐函数的逐次微分法 §90. 曲线的弯曲方向 §91. 檢驗极大值与极小值的第二个方法 §92. 拐点 §93. 曲线的描画法 §94. 直綫运动的加速度

第十一章 超越函数的微分法209

§95. 导数公式; 第二个基本公式表 §96. 对数函数的微分法 §97. 指数函数的微分法 §98. 一般指数函数的微分法. 指数法则的証明 §99. 对数表达式的实际微分法 §100. $\sin v$ 的微分法 §101. $\cos v$ 的微分法 §102. $\tan v$ 的微分法 §103. $\cot v$ 的微分法 §104. 一个說明 §105. 反三角函数 §106. $\arcsin v$ 的微分法 §107. $\arccos v$ 的微分法 §108. $\arctan v$ 的微分法 §109. $\operatorname{arccot} v$ 的微分法

第十二章 微分法对于参量方程、極坐标方程及求根的应用239

- §110. 曲线的参数方程, 斜率 §111. 参量方程, 二阶导数 §112. 曲线运动, 速度 §113. 曲线运动, 加速度分量 §114. 极坐标矢径与切线的夹角 §115. 一阶切距及极小法距 §116. 多项式重根的分离法 §117. 方程的实根, 图解法 §118. 分离实根的第二方法 §119. 牛顿法

第十三章 微分271

- §120. 引言 §121. 定义 §122. 微分的几何表示法 §123. 函数的增量与函数的微分 §124. 关于无穷小之间的比较 §125. 利用微分求函数增量的近似值 §126. 微小误差 §127. 求函数的微分的公式 §128. 直角坐标中弧的微分 §129. 极坐标中弧的微分 §130. 速度当作弧的时变率 §131. 函数的微分公式的不变性 §132. 高阶微分

第十四章 曲率、曲率半径及曲率圆296

- §133. 曲率 §134. 圆的曲率 §135. 直角坐标中曲率的公式 §136. 参量形式的曲率 §137. 极坐标中曲率的公式 §138. 曲率半径 §139. 弯道或过渡曲线 §140. 曲率圆 §141. 曲率中心 §142. 渐屈线 §143. 渐屈线的性质 §144. 渐伸线及其机械作图法 §145. 导数的变换

第十五章 中值定理及其应用320

- §146. 洛尔定理 §147. 密切圆 §148. 两条邻近的法线的交点的极限 §149. 中值定理 §150. 台劳中值定理 §151. 用解析法来研究极大值与极小值 §152. 不定形式 §153. 取得不定形式的函数的简易定值法 §154. 不定形式 $\frac{0}{0}$ 的定值法 §155. 不定形式 $\frac{\infty}{\infty}$ 的定值法 §156. 不定形式 $0 \cdot \infty$ 的定值法 §157. 不定形式 $\infty - \infty$ 的定值法 §158. 不定形式 $0^0, 1^0, \infty^0$ 的定值法 §159. 渐近线 §160. 直角坐标中曲线的渐近线的求法 §161. 切线的极限位置 §162. 代数曲线的渐近线的求法 §163. 极坐标中曲线的渐近线

第十六章 偏导数362

- §164. 两个及多个自变量的连续函数 §165. 偏导数 §166. 偏导数的几何意义 §167. 全增量 §168. 全微分 §169. 自变量更换时全微分公式的不变量 §170. 全微分的实际计算法 §171. 偏导数及全导数, 沿链微分法 §172. 隐函数的微分法 §173. 高阶偏导数 §174. 多变量函数的中值定理 §175. 多变量函数的极大值与极小值的必要条件 §176. 两个变量的函数的极大值与极小值的充分条件

第十七章 偏导数的应用398

- §177. 奇异点 §178. 代数曲线在奇异点的切线的确定法 §179. 代数曲线的

各种二重点 § 180. 超越曲线的奇异点 § 181. 曲线族及其包络 § 182. 依赖于一个参量的曲线族的包络的求法 § 183. 曲线的渐近线作为其法线族的包络 § 184. 空间曲线及其方程 § 185. 空间曲线的切线及法平面 § 186. 空间曲线的密切平面 § 187. 曲面的切平面及法线 § 188. 两个变量的函数的全微分的几何意义

第十八章 参考用曲线图437

§ 189. 参考用曲线图

附录 矢量分析基础及其在空间曲线论中的应用446

§ 190. 矢量——作为一个自变标量的函数：连续性及导数 § 191. 矢量的微分法则 § 192. 曲线的矢性参量方程 § 193. 矢径的导数，切线的单位矢量 § 194. 空间曲线的弧的微分 § 195. 空间曲线的曲率 § 196. 曲线的主法线 § 197. 基本三面架 § 198. 空间曲线的挠率

第一章 基本公式

§1. 初等代数及几何的公式 为了读者参考方便起见,我们把一些基本公式开列在下面,先从代数开始。

(1) 二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 。

其解照下面的公式来求: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 。

根的性质只由根号下的表达式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 来决定, Δ 这个式子称为判别式。若 $\Delta > 0$, 两个根是实数且不相等; 若 $\Delta = 0$, 两个根是实数而且相等; 若 $\Delta < 0$, 根是虚的。

(2) 对数

$$\lg ab = \lg a + \lg b; \quad \lg a^n = n \lg a; \quad \lg 1 = 0;$$

$$\lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b; \quad \lg \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \lg a; \quad \lg_a a = 1。$$

(3) 牛顿的二项式定理 (n 是正整数)

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3}b^3 + \dots \\ \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} a^{n-k}b^k + \dots + b^n。$$

(4) 阶乘 $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot n$ 。

在下列初等几何的公式中,字母 r 或 R 表示半径, h 表示高, S 表示底面积, l 表示基线长。

(5) 圆 周长 $= 2\pi r$; 面积 $= \pi r^2$ 。

(6) 圆扇形 面积 $= \frac{1}{2} r^2 \alpha$ 式中 α 为扇形的圆心角,以弧度计。

(7) 圆柱体 体积 $= Sh$ 。

(8) 圆锥体 体积 $= \frac{1}{3} Sh$ 。

(9) 正圆柱体 体积 $= \pi r^2 h$; 侧面积 $= 2\pi r h$; 全面积 $= 2\pi r (r+h)$ 。

(10) 正圆锥 体积 $= \frac{1}{3} \pi r^2 h$; 侧面积 $= \pi r l$; 全面积 $= \pi r (r+l)$ 。

(11) 球 体积 $= \frac{4}{3} \pi r^3$; 面积 $= 4\pi r^2$ 。

(12) 正截錐体 体积 $= \frac{1}{3} \pi h (R^2 + r^2 + Rr)$; 侧面积 $= \pi l (R + r)$ 。

§ 2. 三角公式 下面的公式, 很多是有用处的。

(1) 角的度量 角的大小有两种量法; 根据这两种量法就定出两种不同的单位。

六十分度 单位角是一个周角的 $\frac{1}{360}$, 称为一度。

弧度 单位角是圆周上长度等于半径的弧段所对的圆心角; 这个单位称为一弧度。

这两种度量单位的基本关系用下面的方程表示

$$180 \text{ 度} = \pi \text{ 弧度},$$

其中 $\pi = 3.14159 \dots$ 由此得:

$$1 \text{ 度} = \frac{\pi}{180} \text{ 弧度} = 0.0174 \dots \text{ 弧度}$$

及

$$1 \text{ 弧度} = \frac{180}{\pi} \text{ 度} = 57.29 \dots \text{ 度}。$$

由弧度的定义可得:

$$\text{一个角的弧度数} = \frac{\text{角所截出的弧段}}{\text{半径}}。$$

这方程使我们可以从一种度量法化成另一种。

(2) 三角函数间的关系

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}; \sec x = \frac{1}{\cos x}; \csc x = \frac{1}{\sin x};$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}; \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; 1 + \tan^2 x = \sec^2 x; 1 + \cot^2 x = \csc^2 x。$$

(3) 角的简化公式

角	正 弦	余 弦	正 切	余 切
$-x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$
$90^\circ - x$	$\cos x$	$\sin x$	$\cot x$	$\tan x$
$90^\circ + x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cot x$	$-\tan x$
$180^\circ - x$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$
$180^\circ + x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
$270^\circ - x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\cot x$	$\tan x$
$270^\circ + x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\cot x$	$-\tan x$
$360^\circ - x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$

(4) $x+y$ 及 $x-y$ 的三角函数

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y;$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y;$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y;$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y;$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}; \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}.$$

(5) $2x$ 及 $\frac{x}{2}$ 的三角函数

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x; \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x; \quad \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x};$$

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}; \quad \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}; \quad \tan \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}};$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x; \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x.$$

(6) 加法定理

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}; \quad \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2};$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}; \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

(7) 锐角三角形中角与边的关系

正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$

余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$

面积公式 $S = \frac{1}{2} bc \sin A.$

$$S = \frac{\frac{1}{2} a^2 \sin B \sin C}{\sin(B+C)}.$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad \text{式中 } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

§3. 平面解析几何公式 最重要的公式开列如下:

(1) 两点 $M_1(x_1, y_1)$ 及 $M_2(x_2, y_2)$ 之间的距离

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

线段 M_1M_2 的斜率: $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan \varphi.$

其中点为: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$

(2) 两直线的交角 $\tan \theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$

(两直线平行时: $k_1 = k_2$; 两直线垂直时: $k_1 k_2 = -1$).

(3) 直线方程的各种形式

点斜式: $y - y_1 = k(x - x_1)$ 。

斜截式: $y = kx + b$ 。

两点式: $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ 。

截距式: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 。

(4) 点 $M_1(x_1, y_1)$ 到直线 $Ax + By + C = 0$ 的距离:

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}。$$

(5) 直角坐标与极坐标的关系式:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi; \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x}。$$

(6) 圆方程 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, 圆心 (a, b) 。

(7) 抛物线方程

顶点在原点: $y^2 = 2px$, 焦点 $(\frac{p}{2}, 0)$ 。

$$x^2 = 2py, \text{ 焦点 } (0, \frac{p}{2})。$$

顶点在 (a, b) : $(y - b)^2 = 2p(x - a)$, 轴 $y = b$ 。

$$(x - a)^2 = 2p(y - b), \text{ 轴 } x = a。$$

对称轴为 OY 轴:

$$y = Ax^2 + C。$$

(8) 其他曲线方程

中心在原点, 焦点在 OY 轴上的椭圆:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1。$$

中心在原点, 焦点在 OX 轴上的双曲线:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1。$$

中心在原点, 渐近线为坐标轴的等边双曲线:

$$xy = m。$$

§4. 立体解析几何公式 最重要的几个公式如下:

(1) 两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 及 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 间的距离

$$\bar{d} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}。$$

(2) 直线

方向余弦: $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 。

方向系数: m, n, p 。

它們之間的关系有

$$\frac{\cos \alpha}{m} = \frac{\cos \beta}{n} = \frac{\cos \gamma}{p},$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

$$\cos \alpha = \frac{m}{\pm \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{n}{\pm \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{p}{\pm \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

对于通过两点 (x_1, y_1, z_1) 及 (x_2, y_2, z_2) 的直线来说, 有下面的式子:

$$\frac{\cos \alpha}{x_2 - x_1} = \frac{\cos \beta}{y_2 - y_1} = \frac{\cos \gamma}{z_2 - z_1}.$$

(3) 两直线:

方向余弦: $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma; \cos \alpha', \cos \beta', \cos \gamma'.$

方向系数: $m, n, p; m', n', p'.$

若 θ 为两直线的交角: 则

$$\cos \theta = \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma',$$

$$\cos \theta = \frac{mm' + nn' + pp'}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \sqrt{m'^2 + n'^2 + p'^2}}.$$

平行条件: $\frac{m}{m'} = \frac{n}{n'} = \frac{p}{p'}.$

垂直条件: $mm' + nn' + pp' = 0.$

(4) 若直线过点 (x_1, y_1, z_1) 而方向系数为 m, n, p , 则其方程为

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}.$$

(5) 平面 平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 中, 系数 A, B, C 是垂直于该平面的直线的方向系数。

若平面过点 (x_1, y_1, z_1) 且跟方向系数为 A, B, C 的直线垂直, 则其方程为:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0.$$

(6) 两平面

方程为

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0.$$

其交线的方向系数为:

$$BC' - CB', CA' - AC', AB' - BA'.$$

若 θ 为二平面的交角, 则

$$\cos \theta = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}.$$

§ 5. 希腊字母

字母	俄文發音	字母	俄文發音
$\Delta \alpha$	Альфа	$\Nu \nu$	Нυ
$B \beta$	Бета	$\Xi \xi$	Кси
$\Gamma \gamma$	Гамма	$O o$	Омикрон
$\Delta \delta$	Делта	$\Pi \pi$	Пи
$E \epsilon$	Эпсилон	$P \rho$	Ро
$Z \zeta$	Зета	$\Sigma \sigma \varsigma$	Сигма
$H \eta$	Эта	$T \tau$	Тау
$\Theta \theta \phi$	Тета	$\Upsilon \gamma$	Ипсилон
$I \iota$	Иота	$\Phi \phi$	Фи
$K \kappa$	Каппа	$\chi \chi$	Хи
$\Lambda \lambda$	Ламбда	$\Psi \psi$	Пси
$M \mu$	Ми	$\Omega \omega$	Омега

第二章 数

§6 有理数 所有正負整数、分数以及零，統称为有理数。本書中，假定讀者都已熟知这些数的大部份初等性質，以及一般算术教本中所講的关于这些数的用法。

讀者都知道，算术中的四个基本运算：加、减、乘、除，施行在有理数上之后，得出的結果仍是有理数。这就是說，用这样的方法，我們得不到任何別的数。

§7. 有理数的实用意义 从实用观点来看，为了完成度量起見，我們无需再知道有理数以外的別的数。

應該注意到，实际上来度量一个已給量这件事，常常是件不定的事。例如，具体地給了我們一根直綫綫段，要求量它的長度。这种具体綫段的兩端，我們知道总是有些不定的，因為我們總可以用另一根綫段，和所給綫段相差小到无法覺出的（为此，只要使它們的長度的差，在我們所用仪器的灵敏度之外就行了）来代替所給綫段。

像这样，我們就有无穷多彼此極其接近的有理数，其中每一个都完全可以作为上述具体綫段的“真正”長度。像这样自由选择一个近似数作为所需結果的事，在實踐上也是極常用到的。因为在任何算术計算中，如果把其中要施行运算的那些数略微改变，得出來的結果也改变得極小，所以为了計算方便起見，常只取所量那个量的很有限的几位小数。例如，我們常常只取

$$\pi = 3.14$$

而把較准确数值

$$\pi = 3.141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 46\ldots$$

中的其余一切位数都略去。

这样看来,为了应付度量实践上的需要,單單是一些有理数就已經完全够用了,因为用了它們就可以把度量实施到任意的准确程度。但是,当我们来解决几何、力学及理論物理学中的問題,而达到絕對准确的程度时,單靠这些有理数就不够用了,因为那时已必須通曉所謂无理数了。

現在我們来看这些新的数是怎样产生的,以及应当怎样来了解它們。

§8. 有理数跟直綫上的点的对比 有理数列是本身到处稠密的,因为两个有理数之間,無論它們如何靠近,总可以找出随便多少个中間的有理数来。正因为这样,所以乍看起来,好像有理数列之間,完全沒有新数的任何容身之地。

可是,上述那种初步印象是非常錯誤的,因为有理数列間到处都有空隙;我們只要把全部有理数列跟直綫上的点列作一对比,这事就变得很明显了。

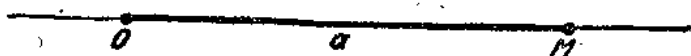


圖 1.

为了要实现这种对比,我們取一直綫,两边无止尽地延長,在直綫上取一原点 O , 并取一定的長度單位,作为度量綫段之用。很明显,对于任何一个預先給好的有理数 a , 总可以作一根以 a 为長度的綫段,并可依照着 a 是正或是負,来把这綫段从 O 起放到它的右边或左边。这样我們就得到一定的端点 M , 拿来作为对应于有理数 a 的点^①。因此我們可以說,对于任何一个有理数,直綫上总有而且也只有有一个点跟它对应(圖 1)。

这样得到的点 M , 我們把它想像是黑色不透明的;正是这个点,我

① 在圖 1 中 a 是取作正的。