21 世纪高等院校教材

大学工科·数学教材系列

高等数学

（上 册）

西北工业大学高等数学教材编写组 编

科学出版社
www.sciencep.com

21 世纪高等院校教材

大学工科·数学教材系列

高等数学

（上册）

西北工业大学高等数学教材编写组 编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是在教育大众化的新形势下，根据编者多年的教学实践，并结合“高等数学课程教学基本要求”而编写的.

全书分上、下两册. 上册内容为一元函数的极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、向量代数与空间解析几何等 7 章. 上册书末附有上册部分习题答案与提示、极坐标系简介、二阶和三阶行列式简介、几种常用的曲线、积分简表. 下册内容为多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、微分方程等 5 章. 下册书末附有下册部分习题答案与提示、记号说明.

本书力求结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗易懂. 全书有较多的例题，便于自学，同时注意尽量多给出一些应用实例.

本书可供高等院校工科类各专业的学生使用，也可供广大教师、工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(上、下册)/西北工业大学高等数学教材编写组编. —北京：科学出版社，2005

21 世纪高等院校教材(大学工科·数学教材系列)

ISBN 7-03-016037-1

Ⅰ. 高… Ⅱ. 西… Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 085550 号

责任编辑：李鹏奇/责任校对：张 琪

责任印制：安春生/封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005 年 8 月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2005 年 8 月第一次印刷 印张：26 1/4

印数：1—5 000 字数：503 000

定价：58.00 元(上、下册)

(如有印装质量问题，我社负责调换〈明辉〉)

前　言

本书是按照新形势下教材改革的精神，集编者多年的教学经验编写而成的．本书遵循的编写原则是：在教学内容的深度广度上与现行的高等工科院校“高等数学课程教学基本要求”大体相当，渗透现代数学思想，加强应用能力的培养．

在本书的编写过程中，我们做了以下一些改革的尝试：

1．为更好地与中学数学教学相衔接，上册从一般的集合、映射引入函数概念．

2．为有利于培养学生的能力和数学素养，渗透了一些现代数学的思想、语言和方法，适当引用了一些数学记号和逻辑符号．

3．为培养学生的发散思维能力，本书对重要的概念和定理，尽可能地从几何直观或物理的实际背景提出问题，然后经过分析和论证上升到一般的概念和结论，最后归纳出定义和定理．目的在于培养学生的创新意识和创新能力．

4．注重微积分的应用．本书除了一些经典的几何或物理问题外，还尽可能地举一些来自自然科学、工程技术领域和日常生活的问题作为例题和习题，尤其注意添加了一些经济方面的应用实例，以培养学生用数学方法解决实际问题的意识、兴趣和能力．

5．对微积分的教学内容做了部分调整，使之更符合人的思维习惯，使教学系统性更强，便于学生消化吸收．

6．增添了数学模型教学的内容，强调了微积分本身的数学模型特征，目的在于启发应用意识，提高应用能力，促进学生知识、能力和素质的融合．

7．书中给出了微积分中所涉及的 30 多位数学家的介绍．

8．为了控制课时数，有些内容用楷体字印刷，或在标题上加了“*”号，表示这些内容可供学生阅读自学．

本书分上、下两册，上册主要介绍一元函数微积分和向量代数与空间解析几何，下册主要介绍多元函数微积分、级数和微分方程．

本书是在西北工业大学应用数学系和教务处以及很多教师的支持下编写的．

参加编写的教师分工如下：第一章、第三章由李云珠老师编写，第二章、第七章由郑红婵老师编写，第四章、第五章、第六章由符丽珍老师编写，第八章、第九章、第十章（下册）由肖亚兰老师编写，第十一章、第十二章（下册）由陆全老师编写，最后由肖亚兰、李云珠老师统纂定稿．西北工业大学的叶正麟老师担任了本书的主审，西安交通大学的王绵森老师和西北大学的熊必璠老师审阅了原稿，并提出了不少改进意见，在此一并表示衷心的感谢．

限于作者水平，加之时间仓促，错误疏漏之处在所难免，恳请大家谅解．

编　者

2005 年 5 月

目　录

（上册）

预 备 知 识

一、集合与区间

1. 集合的概念

具有某种特定性质的事物的总体称为一个**集合**(或简称**集**). 集合中的每个事物称为该集合的**元素**. 集合通常用大写的拉丁字母如 A, B, C, … 来表示,元素则用小写的拉丁字母如 a,b,x,y,… 来表示. 如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于 A,记作 $a \in A$;如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于 A,记作 $a \notin A$(或 $a \,\overline{\in}\, A$). 含有限个元素的集合称为有限集,含无限多个元素的集合称为无限集,而不含任何元素的集合称为**空集**,记作 $\varnothing$.

如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素,则称 A 是 B 的**子集**,或者称 A 包含于 B,或 B 包含 A,记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$, $A \subset B$ 则表示 A 是 B 的**真子集**. 规定空集是任何集合的子集.

如果集合 A 与集合 B 互为子集,即 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$,就称 A 与 B 相等,记作 $A = B$ 或 $B = A$.

我们习惯上用记号 $\mathbf{R}$,$\mathbf{N}$,$\mathbf{Z}$,$\mathbf{Q}$ 和 $\mathbf{C}$ 分别表示实数集、非负整数集即自然数集、整数集、有理数集和复数集,即

$\mathbf{R} = \{a \mid a \text{ 为全体实数}\}$;

$\mathbf{N} = \{0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$;

$\mathbf{Z} = \{0,1,-1,2,-2,\cdots,n,-n,\cdots\}$;

$\mathbf{Q} = \left\{\dfrac{p}{q} \middle| p \in \mathbf{N}^*, q \in \mathbf{Z}^* \text{ 且 } p \text{ 与 } q \text{ 互质}\right\}$;

$\mathbf{C} = \{a + b\mathrm{i} \mid a,\, b \in \mathbf{R},\, \mathrm{i}^2 = -1\}$.

在表示数集的字母的右上角添加"$*$"、"$+$"、"$-$"等上标,表示该数集的几个特定子集. 以实数集为例,$\mathbf{R}^*$ 表示排除数 0 的实数集;$\mathbf{R}^+$ 表示正实数集;$\mathbf{R}^-$ 表示负实数集,其他数集情况相似,可以类推.

2. 集合的运算

设 A 和 B 为两个集合,则:

A 与 B 的**并集**,记作 $A \cup B$,表示由属于 A 或者属于 B 的所有元素组成的集合;

A 与 B 的**交集**,记作 $A \cap B$,表示由既属于 A 又属于 B 的所有元素组成的集合;

A 与 B 的**差集**，记作 A/B，表示由属于 A 而不属于 B 的所有元素组成的集合；

A 的**余集**或**补集**，记作 A^C，若把研究某一问题时所考虑的对象的全体称作全集，并用 I 表示，则 A^C 就是差集 $I\backslash A$. 例如，集合 $A=\{x \mid x\in \mathbf{R}, 且\, x>0\}$ 的余集

$$A^C=\{x \mid x\in \mathbf{R}, x\leqslant 0\}.$$

A 与 B 的**直积**，记作 $A\times B$，表示由有序对 (a,b) 组成的集合，即

$$A\times B=\{(a,b) \mid a\in A, b\in B\}.$$

例如，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y) \mid x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$ 表示 xOy 面上全体点的集合，常记作 $\boldsymbol{R}^2$.

集合的并、交、余运算满足以下运算律：

交换律　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

分配律　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

对偶律　$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$，$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

3. 区间和邻域

区间是微积分中最常用的一类实数集. 包括有限区间与无限区间.

设 a,b 为二实数，且 $a<b$，则实数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 称为**开区间**，记作 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}.$$

a 与 b 分别称为区间的左、右**端点**，它们不属于 (a,b). 类似地可定义以 a,b 为端点的**闭区间**和**半开区间**. 其记号与定义如下：

闭区间：$[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$；半开区间：$[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\}$，$(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}$. 以上这些区间均属于**有限区间**. 对于满足不等式 $-\infty<x<+\infty$ 的实数集，则称为**无穷区间**，记作 $(-\infty,+\infty)=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$ 或 $(-\infty,+\infty)=\{x \mid x\in\mathbf{R}\}$.

可类似地定义其他无穷区间

$$(a,+\infty)=\{x \mid a<x<+\infty\},$$

$$[a,+\infty)=\{x \mid a\leqslant x+\infty\},$$

$$(-\infty,b)=\{x \mid -\infty<x<b\},$$

$$(-\infty,b]=\{x \mid -\infty<x\leqslant b\}.$$

邻域也是一种常用的实数集. 设 a,δ 是实数且 $\delta>0$，则点 a 的 δ **邻域**，记作 $U(a,\delta)$，定义为下列实数集：

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\},$$

或写作

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

这就是说，邻域是一种对称的开区间 $(a-\delta,a+\delta)$. 称点 a 为**邻域的中心**，δ 为**邻域的半径**(图 1). 邻域的半径 δ 愈小，邻域中的点 x 就与点 a 愈接近. 如果将邻域 $U(a,\delta)$ 中的点 a 去掉，所得到的实数集称为点 a 的**去心 δ 邻域**，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

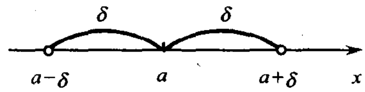

图 1

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

习惯上，也把开区间 $(a-\delta,a)$ 和 $(a,a+\delta)$ 分别称为点 a 的**左 δ 邻域**和点 a 的**右 δ 邻域**.

两个闭区间的直积表示 xOy 平面上的矩形区域，例如

$$[a,b]\times[c,d]=\{(x,y) \mid x\in[a,b],y\in[c,d]\}$$

即表示 xOy 平面上相邻两边各自平行于 x 轴和 y 轴，且在二轴上的投影分别为闭区间 $[a,b]$ 和 $[c,d]$ 的矩形区域.

二、映射

1. 映射的概念

设 X,Y 是两个非空集合，如果按照某种对应法则 f，对集合 X 中每个元素 x，集合 Y 都有唯一的元素 y 和它对应，则这样的对应法则 f 叫做从 X 到 Y 的**映射**，记作

$$f:X\to Y,$$

其中 y 称为元素 x(在映射 f 下) 的**像**，并记作 $f(x)$，即

$$y=f(x),$$

而元素 x 称为元素 y(在映射 f 下) 的一个**原像**；集合 X 称为映射 f 的定义域，记作 D_f，即 $D_f=X$；X 中所有元素的像也组成一个集合，称为集合 X 的像，或映射 f 的值域，记作 R_f，或 $f(X)$，即

$$R_f=f(X)=\{f(x) \mid x\in X\}.$$

这里需要注意，X 中元素 x 的像 y 是唯一的；Y 中元素 y 的原像却不一定是唯一的，而且映射 f 的值域 R_f 是 Y 的一个子集，即 $R_f\subseteq Y$.

例 1 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\in\mathbf{R}$, $f(x)=x^2$. x 的像 x^2 是唯一的，因此，f 是一个映射，且 f 的定义域 $D_f=\mathbf{R}$，值域 $R_f=\{y \mid y\geqslant 0\}$，它是 $\mathbf{R}$ 的一个真子集，即 $R_f\subset\mathbf{R}$. 但是，对于 R_f 中的元素 y，除 $y=0$ 外，如 $y=9$，它的原像却是两个 $x=3$ 和 $x=-3$，并不唯一.

2. 几类常见的映射

假设 f 是从集合 X 到集合 Y 的映射：

$$f: X \to Y.$$

(1) 如果集合 X 的不同元素有不同的像，即若二元素 $x_1 \neq x_2$，它们的像 $f(x_1) \neq f(x_2)$，那么称 f 为**单射**.

(2) 如果集合 Y 的每个元素都是集合 X 的元素的像，也就是说，集合 X 的像 $f(X) = Y$，那么称 f 为**满射**.

(3) 如果 f 既是单射，又是满射，那么称 f 为**一一映射**(或**双射**). 在此映射下，集合 X 的元素与集合 Y 的元素是相互唯一决定的.

例 2 设 $f: X = \{1,3,5\} \to Y = \{3,5,7,9,11\}$，$x \in \{1,3,5\}$，$f(x) = 2x + 1$. f 是一个映射，其定义域 $D_f = \{1,3,5\}$，值域 $R_f = \{3,7,11\} \subset Y$. X 中的不同元素有不同的像，它是一个单射，但 Y 的元素不全是 X 中的元素的像，故不是满射.

例 3 设 $f: [0,\pi] \to [-1,1]$，$x \in [0,\pi]$，$f(x) = \cos x$. f 是一个映射，其定义域 $D_f = [0,\pi]$，值域 $R_f = [-1,1]$. 此映射既是单射，又是满射，属于一一映射.

上面例 1 中的映射，既非单射，又非满射.

3. 逆映射与复合映射

(1) 逆映射.

设 $f: X \to Y$ 是一一映射，则由定义，对 Y 中任意一个元素 $y \in Y$，集合 X 都有唯一的元素 $x \in X$ 和它对应，适合 $f(x) = y$. 于是，确定了从集合 Y 到集合 X 的新映射 g，即

$$g: Y \to X.$$

这里规定 $g(y) = x$，x 满足 $f(x) = y$，这个新映射就称为 f 的**逆映射**，记作 f^{-1}，即

$$f^{-1}: Y \to X,$$

其定义域 $D_{f^{-1}} = Y$，值域 $R_{f^{-1}} = X$.

由此可见，只有一一映射才存在逆映射. 以上例 3 中的映射具有逆映射 f^{-1}，它即为大家熟悉的反余弦函数的主值：

$$f^{-1}(x) = \arccos x,$$

其定义域为$[-1,1]$，值域为$[0,\pi]$.

(2) 复合映射.

设有两个映射

$$g: X \to Y_1,\ f: Y_2 \to Y,$$

其中 $Y_1 \subseteq Y_2$. 对集合 X 中的任意一个元素 x，集合 Y_1 都有唯一的元素 $g(x)$ 和它对应，而 $g(x)$ 又是集合 Y_2 的元素，通过映射 f，在集合 Y 中又有唯一的元素 y 与 $g(x)$ 对应，于是元素 y 可表示为

$$y = f[g(x)].$$

显然，这个对应法则确定了一个从 X 到 Y 的映射，此映射称为映射 g 和 f 构成的**复合映射**，记作 $f \circ g$，即

$$f \circ g : X \to Y,$$
$$(f \circ g)(x) = f[g(x)],\ x \in X.$$

由定义可以知道，映射 g 和 f 能构成复合映射的条件是：g 的值域 R_g 必须包含于 f 的定义域 D_f，即 $R_g \subseteq D_f$，否则，不能构成复合映射.

例 4 设有两个映射

$$g : (0, +\infty) \to \mathbf{R},\ x \in (0, +\infty),\ g(x) = \ln x,$$
$$f : \mathbf{R} \to [-1, 1],\ u \in \mathbf{R},\ f(u) = \cos u,$$

它们的复合映射为 $f \circ g$: $(0, +\infty) \to [-1, 1]$，对每个 $x \in (0, +\infty)$，有

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(\ln x) = \cos\ln x.$$

此复合映射的定义域是 $D_{f\circ g} = (0, +\infty)$，值域是 $R_{f\circ g} = [-1, 1]$.

习　题

1. 用区间表示下面的邻域：

(1) $U(0,1)$；　　(2) $U\left(1, \frac{1}{3}\right)$；

(3) $\mathring{U}(0,2)$；　　(4) $\mathring{U}\left(1, \frac{1}{3}\right)$.

2. 设 $A = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$，$B = [-5, 3]$，写出 $A \cup B, B \cap A, A\backslash B, B\backslash A, A^C$ 的表达式.

3. (1) 设映射 $f : X = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbf{R},\ x \in X,\ f(x) = \tan x$，求集合 X 的像 $f(X)$；

(2) 设映射 $f : [1, +\infty) \to \mathbf{R},\ x \in [1, +\infty),\ f(x) = \ln x$，求集合 $[1, +\infty)$ 的像 $f([1, +\infty))$.

4. 讨论下列映射是属于单射，满射，还是一一映射？

(1) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \in \mathbf{R},\ f(x) = \sin x$；

(2) $f : \mathbf{R} \to [-1, 1],\ x \in \mathbf{R},\ f(x) = \sin x$；

(3) $f : X = [0, 1, 2, 3] \to Y = \left[-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right],\ x \in X,\ f(x) = \frac{x-1}{2}$；

(4) $f : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ x \in [-1, 1],\ f(x) = \arcsin x$.

5. 求下列映射的逆映射：

(1) $f:[0,\pi]\to[-1,1]$, $x\in[0,\pi]$, $f(x)=\cos x$;

(2) $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbf{R}$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $f(x)=\tan x$.

6. 设两个映射

$$g:\mathbf{R}\to(0,+\infty),\ x\in\mathbf{R},\ g(x)=\mathrm{e}^x,$$
$$f:(0,+\infty)\to\mathbf{R},\ u\in(0,+\infty),\ f(u)=\ln u,$$

求这两个映射的复合映射.

7. 证明:若 g 是集合 A 到集合 B 上的可逆映射(可逆映射即一一映射),f 是集合 B 到集合 C 上的可逆映射,则复合映射 $f\circ g$ 是集合 A 到集合 C 上的可逆映射.

第一章　一元函数的极限与连续

高等数学是一门以函数作为主要研究对象，以极限方法为基本研究方法的学科. 极限理论几乎贯穿了高等数学的整个内容，因此，我们首先介绍函数和极限的概念、性质、运算法则以及函数的一个重要性质——连续性.

第一节　一 元 函 数

一、函数的概念及图形

定义 1.1　设数集 $D \subseteq \mathbf{R}$，则从 D 到 $\mathbf{R}$ 的映射 f 称为定义在 D 上的一元函数，简称为函数，通常简化为

$$y = f(x), \quad x \in D.$$

其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，D 称为**定义域**，记作 D_f，即 $D_f = D$. 集合

$$R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x),\ x \in D\}$$

称为函数 f 的**值域**. 平面点集

$$\{P(x,y) \mid y = f(x),\ x \in D\}$$

称为函数 f 的**图形**(**或图像**).

在同一个问题中，若需要讨论几个不同的函数，应该用不同的记号分别表示，如 $y = f(x)$，$y = \varphi(x)$，$y = \psi(x)$，$y = F(x)$ 等，以示区别.

函数的构成有两个要素：定义域 D_f 及对应法则 f. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数是相同的函数，否则为不同的函数. 如函数 $y = f(x)$ 与 $u = f(t)$，当 x,t 的变化范围都是非空集 D 时，它们为同一函数，与自变量和因变量用什么符号表示无关.

关于函数定义，还需要说明以下几点：

(1) 严格说来，记号 f 和 $f(x)$ 的含义是有区别的，f 表示自变量 x 与因变量 y 之间的对应法则，而 $f(x)$ 表示与 x 对应的函数值，但习惯上我们称 $f(x)$ 为函数，即把函数和函数值不加区分地使用.

(2) 在函数的定义中，对每个 $x \in D$，对应的函数值 y 总是唯一的，这样定义的函数称为**单值函数**，如果给定某个对应法则，按这个法则，对每个 $x \in D$，总有确定

的 y 值与之对应,但这个 y 不是唯一的,则称这种法则确定了一个**多值函数**. 在高等数学中,对于多值函数,常常是给它附加一些条件,将其化为单值函数,如此得到的单值函数称为多值函数的**单值分支**.

例 1　圆的方程 $x^2+y^2=a^2$ 确定了变量 x 和 y 之间的对应法则,显然,对每个 $x\in[-a,a]$,只有当 $x=a$ 或 $x=-a$ 时,对应 $y=0$ 一个值,而当 $x\in(-a,a)$ 时,对应的 y 有两个值. 但我们总可以把它分解为两个单值分支:一是上半圆 $x^2+y^2=a^2$, $y\geqslant 0$ 确定了一个单值函数 $y_1=\sqrt{a^2-x^2}$, $x\in[-a,a]$;一是下半圆 $x^2+y^2=a^2$, $y\leqslant 0$ 确定了另一个单值函数 $y_2=-\sqrt{a^2-x^2}$, $x\in[-a,a]$.

(3) 在数学中,通常给定函数的定义域就是使得算式有意义的一切实数组成的集合,称为函数的**自然定义域**. 但对一些有实际背景的函数,需要根据具体含义确定其定义域. 如圆的面积问题,设圆的半径为 r,圆的面积为 A,那么 A 与 r 之间的函数关系是

$$A=A(r)=\pi r^2,\qquad r\in[0,+\infty).$$

这时,函数的定义域是$[0,+\infty)$,而不是自然定义域$(-\infty,+\infty)$.

(4) 函数对应法则的表达形式是多样的. 可以用表格、图形、解析式(即算式),甚至用语言来表示,而且函数在其定义域的不同部分,对应法则可由不同的解析式给出,这种函数称为**分段函数**.

下面给出几个函数的例子,例中的定义域均指自然定义域.

例 2　设 C 为常数,则 $y=C$ 是**常量函数**,定义域是$(-\infty,+\infty)$,值域是$\{C\}$. 其实,将函数写为 $y=C(\sin^2x+\cos^2x)=C$,就看得更为清楚.

例 3　符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

为分段函数,定义域是$(-\infty,+\infty)$,值域是$\{-1,0,1\}$,它的图形如图 1.1 所示. 对任何 $x\in\mathbf{R}$,有 $x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|$ 或 $|x|=x\operatorname{sgn}x$.

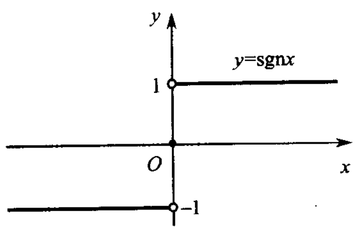

图 1.1

例 4　取整函数.

对任意的 $x\in\mathbf{R}$,用记号$[x]$表示不超过 x 的最大整数,从而得到定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数

$$y=[x],$$

称此函数为**取整函数**,$[x]$称为 x 的整数部分. 如$[0.3]=0$, $[1.52]=1$, $[-1]$

$=-1$，$[-1.52]=-2$. $y=[x]$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，值域是 $\mathbf{Z}$，图形见图 1.2，这是一个**阶梯函数**，也是分段函数.

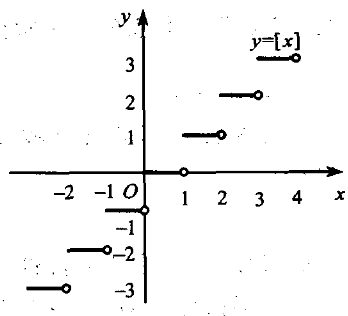

图 1.2

例 5 数列也是一类函数，它的定义域是全体正整数的集合 $\mathbf{N}^*$. 例如数列 $x_n=\dfrac{1}{n}$ 也可写成函数 $f(n)=\dfrac{1}{n}$，$n\in\mathbf{N}^*$，它的图形是平面上的一些弧立点的集合，可称为整标函数.

例 6 狄利克雷(Dirichlet) 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数},\\ 0, & x\text{ 是无理数}.\end{cases}$$

这个函数可以用两句语言来描述，即当 x 为有理数时，$D(x)=1$；当 x 为无理数时，$D(x)=0$. 它的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $\{0,1\}$，但是，由于任意两个有理数之间都有无理数，并且任意两个无理数之间也都有有理数，所以它的图形无法描绘.

例 7 函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

是一个分段函数，定义域是 $(-\infty,2]$，值域是 $[0,+\infty)$，图形见图 1.3.

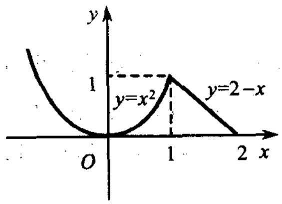

图 1.3

当 $x\in(-\infty,1]$ 时，$f(x)=x^2$.

当 $x\in(1,2]$ 时，$f(x)=2-x$.

例如，$-1\in(-\infty,1]$，所以 $f(-1)=(-1)^2=1$，$\dfrac{3}{2}\in(1,2]$，所以 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=2-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}$. 如果要求 $f(x-1)$，可将 x 以 $x-1$ 替换，得

$$f(x-1)=\begin{cases}(x-1)^2, & x-1\leqslant 1,\\ 2-(x-1), & 1<x-1\leqslant 2.\end{cases}$$

即

$$f(x-1)=\begin{cases}(x-1)^2, & x\leqslant 2,\\ 3-x, & 2<x\leqslant 3.\end{cases}$$