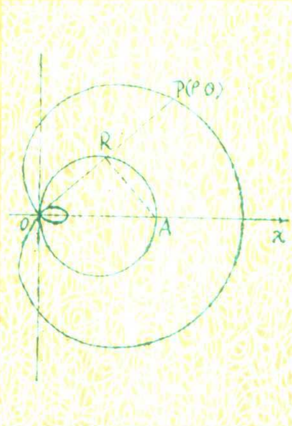

陈希英 编

极坐标与参数方程

极坐标与参数方程

陈希英 编

黑龙江人民出版社

1982年·哈尔滨

责任编辑：田兆民 孙怀川

封面设计：蒋 明

极坐标与参数方程

陈希英 编

黑龙江人民出版社出版

（哈尔滨市道里森林街42号）

黑龙江新华印刷厂印刷 黑龙江省新华书店发行

开本 787×1092 毫米 1/32 · 印张 4 10/16 · 字数 72,000

1982年6月第1版 1982年6月第1次印刷

印数 1—15,200

统一书号：13093 · 53 定价：0.35 元

出版说明

为加速实现四个现代化，迅速培养和造就大批又红又专的建设人才的需要，我们将陆续出版一套《中学生课外读物》。

这套读物包括数学、物理、化学、语文、历史、地理等基础知识和典型题解答几十种。这本《极坐标与参数方程》就是其中的一种。

本书以全国统编中学数学教学大纲为基础，适当地扩大了知识范围，比较全面系统地讲述了极坐标与参数方程的基本知识。书中对什么是极坐标系，极坐标与直角坐标的关系，参数方程与普通方程的互化，曲线的极坐标方程与参数方程的定义及其方程的建立等都做了较为详细的讨论。此外，还介绍了应用曲线的极坐标方程和参数方程的绘图方法。书中配有适量的例题和练习题，并附有练习题答案。

本书可供中学生、知识青年自学之用，也可供中学数学教师参考。

目　录

一　极坐标 ……………………………………………………1
(一) 平面上点的极坐标 ………………………………………3
(二) 极坐标与直角坐标的关系 ………………………………10
(三) 曲线的极坐标方程 ………………………………………17
(四) 直线和圆锥曲线的极坐标方程 …………………………36
(五) 极坐标方程的图形 ………………………………………47
本单元小结 ……………………………………………………67
二　曲线的参数方程 …………………………………………70
(一) 曲线的参数方程 …………………………………………71
(二) 曲线的参数方程和普通方程的互化 ……………………76
(三) 利用参数方程画图 ………………………………………88
(四) 直线和圆锥曲线的参数方程 ……………………………93
(五) 利用参数求轨迹的方程 …………………………………99
本单元小结 ……………………………………………………123
附录　利用参数方程求二曲线的交点 ………………………125
练习题答案 ……………………………………………………127

一 极 坐 标

直角坐标系是研究几何图形性质的一种最常用的坐标系。应用它可以对二次曲线的性质进行系统地讨论和学习。但是，在工农业生产上、军事上和航海中，有时会遇到一些利用直角坐标系难以解决的实际问题，这便要求我们建立一种新的坐标系，以进一步研究这一类问题。

例如，在自动化生产中，常常根据生产上的需要设计出各种形状的凸轮。利用凸轮控制机器，使机器按一定规律运动，完成预定工作。当凸轮按照某种规律转动时，凸轮轮廓线上的点 M 的位置，可用点 M 到凸轮孔心的距离 ρ 与凸轮转过的角度 θ 这两个量完全确定(一个是长度，一个是角度)（图 1·1）。这时，如果采用直角坐标系来确定点 M 的位置

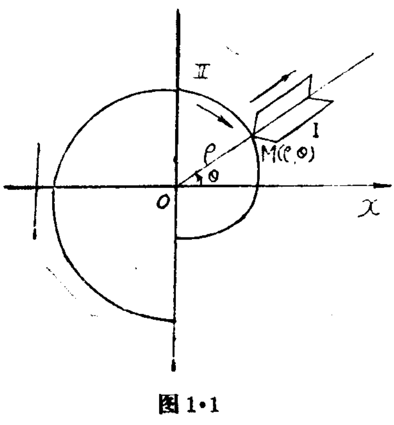

图 1·1

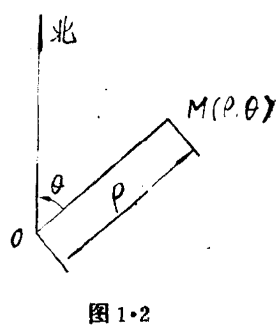

图 1·2

就很不便。又如在制作拖拉机上的内转子时，也是用距离和角度来确定此零件上点的位置的（图 1·2）。在军事上，向炮兵指示射击目标时，用点的直角坐标就很不方便，此时，通常是指示出目标的距离和方位（即方向）（图 1·3）。在日常生活中，也有一些是利用距离和角度来确定平面上任意一点的位置的，例如说“向东北走两里就到胜利大队”等等。

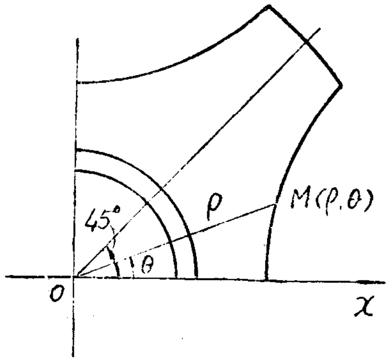

图 1·3

总之，极坐标是另外一种重要的坐标法。对于某些曲线来说，利用极坐标的方法来建立它的方程比用直角坐标的方法来得简单，特别是在一部分曲线中，利用它的极坐标方程讨论曲线的性质更大为简便。这在其他高等数学的学习中，还会经常用到曲线的极坐标方程和它的图形。

在这一单元的学习中，主要内容为：(一)首先建立平面上点的极坐标系；(二)极坐标与直角坐标之间的变换关系；（三）已知曲线，建立它的极坐标方程。对于其中若干重要曲线的极坐标方程的建立要掌握好；(四)直线和圆锥曲线的极坐标方程（它是上一节的特例）；（五）已知极坐标方程画图。主要是研究曲线的性质，这是本单元的重点内容，也是中学课本所没有进一步涉及的问题。本单元的难点也就在曲

线性质的讨论上。据给定的极坐标方程研究曲线的性质，初学者常感到不易全面掌握。为此，我们在这里不仅对曲线的性质做了全面详细的讨论，而且配备了一定数量的例题和习题，目的是想使读者能够顺利地攻克这一关。应注意的是：
1. 在平面直角坐标系与极坐标系下，点与数对对应的异同点；
2. 曲线与普通方程、曲线与极坐标方程对应的异同点。

（一）平面上点的极坐标

在平面上取一定点O，从点O出发引一条射线OX（规定方向自左至右），再确定一个长度单位和计算角度的正方向（通常取逆时针方向为正方向），这样就构成了一个极坐标系（图1·4）。点O称为极点，射线OX称为极轴。

设M为平面上任意一点，连结线段OM，极点O和点M的距离$|OM|$称为M点的极半径（或称为动径），通常用ρ来表示。以极轴OX为始边，射线OM为终边所成的$\angle XOM$，称为M点的极角，通常用θ来表示。一对有序的实数(ρ,θ)称为M点的极坐标，记为$M(\rho,\theta)$。规定ρ写在前面，称为M点的第一坐标；θ写在后面，称为M点的第二坐标。

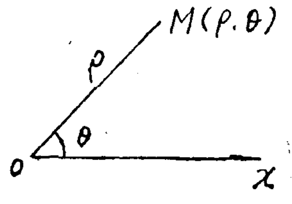

图1·4

显然，极角θ的值可为任意正值或负值（极径以逆时针方向转动所成的角规定为正，顺时针转角为负），由极坐标的定义可知，$\rho\geqslant 0$。但为了研究的方便，我们有时也允许极

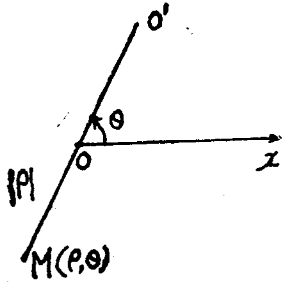

图 1·5

径 ρ 取负值（图 1·5）。当 $\rho<0$ 时，点 $M(\rho,\theta)$ 的位置可以按下列规则来确定：作射线 OO'，使 $\angle XOO'=\theta$，并在 OO' 的反向延长线上取点 M，使 $|OM|=|\rho|$，则 M 点就是极坐标为 (ρ,θ) 所确定的点（$\rho<0$）。例如，A,B,C 与 A',B',C' 各点的极坐标分别为：

$\left(3,\frac{\pi}{4}\right)$，$\left(4,\frac{\pi}{2}\right)$，$\left(3,\frac{3\pi}{4}\right)$；$\left(-3,\frac{\pi}{4}\right)$，$\left(-4,\frac{\pi}{2}\right)$，$\left(-3,\frac{3\pi}{4}\right)$（图 1·6）。

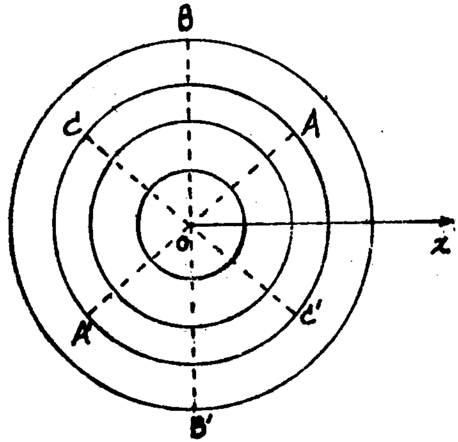

图 1·6

这样所建立的极坐标系，对于每一对给定的极坐标

(ρ,θ)，都可以在平面上找到唯一的一个点与之对应，这是和直角坐标系相同的地方。反之，对于平面上的任意一点，也总可得到与之对应的极坐标(ρ,θ)。但是，必须注意的是，平面上任意一点的极坐标，有无限多种表示法。即平面上的点与它的极坐标之间不是一一对应的，这是和直角坐标系不同的地方。例如，

$$\left(5,\frac{\pi}{4}\right),\ \left(5,\frac{9}{4}\pi\right),\ \left(-5,\frac{5}{4}\pi\right),\ \left(-5,-\frac{3}{4}\pi\right)$$

等等都表示同一个点。一般地说，设(ρ,θ)为平面上任一点M的坐标，则点M都可用下述两种形式坐标$(\rho,\theta+2n\pi)$，$(-\rho,\theta+[2n+1]\pi)$（n为任意整数）表示（多值性）。特别当点M为极点时，$\rho=0$，θ的值为任意值。如果把极点除外，而ρ和θ的值限制在$\rho>0$，$0\leqslant\theta<2\pi$（或$-\pi<\theta\leqslant\pi$），则平面上的点（极点除外）与极坐标之间便构成一一对应关系，即平面上任一点（极点除外）在上述范围内，总可以找到唯一的一对极坐标（ρ，θ）与之对应。反之，对于在上述范围内的任意一对实数(ρ,θ)，都可确定唯一的一个点，而此点的极坐标是(ρ,θ)，这时极角的θ值称为主值。

以下我们在讨论问题时，暂作如下限制：$\rho>0$，$0\leqslant\theta<2\pi$（或$-\pi<\theta\leqslant\pi$）。

例1 在图1·7中，试写出A,B,C,D,E,F,G,H各点的极坐标。

解 从图1·7可知各点的极坐标分别为：

$A\left(8,\frac{\pi}{6}\right)$，$B\left(8,\frac{\pi}{3}\right)$，$C\left(8,\frac{\pi}{2}\right)$，$D(8,\pi)$，

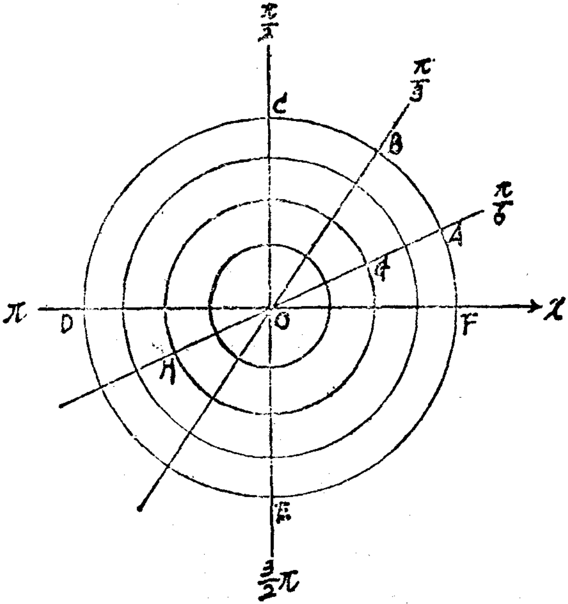

图 1·7

$$E\left(8, \frac{3}{2}\pi\right), F(8, 2\pi), G\left(4, \frac{\pi}{6}\right), H\left(4, \frac{7}{6}\pi\right).$$

读者试写出上述各点的第二对极坐标。

例 2 在图 1·8 中，设有四个点 P_1, P_2, P_3, P_4，根据图所示位置，并依据下列条件，试写出它们各点的极坐标：

(1) 设 $\rho>0$，$-\pi<\theta<\pi$；

(2) 设 $\rho>0$，$0<\theta<2\pi$；

(3) 不限定 ρ 的符号，但必须取 $|\theta|$ 为最小值。

解 从图 1·8 可知，所求各点的极坐标分别为：

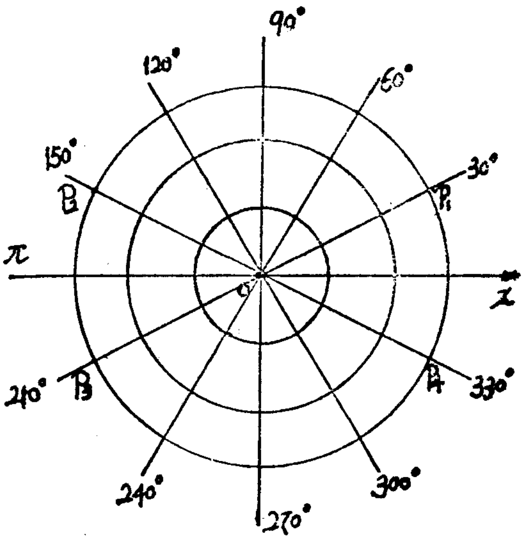

图 1·8

(1) $P_1\left(15,\frac{\pi}{6}\right)$, $P_2\left(15,\frac{5}{6}\pi\right)$,

$P_3\left(15,-\frac{5}{6}\pi\right)$, $P_4\left(15,-\frac{\pi}{6}\right)$;

(2) $P_1\left(15,\frac{\pi}{6}\right)$, $P_2\left(15,\frac{5}{6}\pi\right)$,

$P_3\left(15,\frac{7}{6}\pi\right)$, $P_4\left(15,\frac{11}{6}\pi\right)$;

(3) $P_1\left(15,\frac{\pi}{6}\right)$, $P_2\left(-15,-\frac{\pi}{6}\right)$,

$P_3\left(-15,\frac{\pi}{6}\right)$, $P_4\left(15,-\frac{\pi}{6}\right)$.

练习题一

1. 什么叫做极坐标系？在极坐标系中，平面上任意一点与它的坐标之间有何对应关系？平面上任意一点在直角坐标系与在极坐标系里的坐标，虽然都是一对有序实数，其几何意义是不是相同的？其点与数对的对应关系又有何异同点？具体阐述之。

2. 在图 1·9 中，试写出 A, B, C, D, E, F 各点的极坐标。其中每个圆的半径分别为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 个单位长，

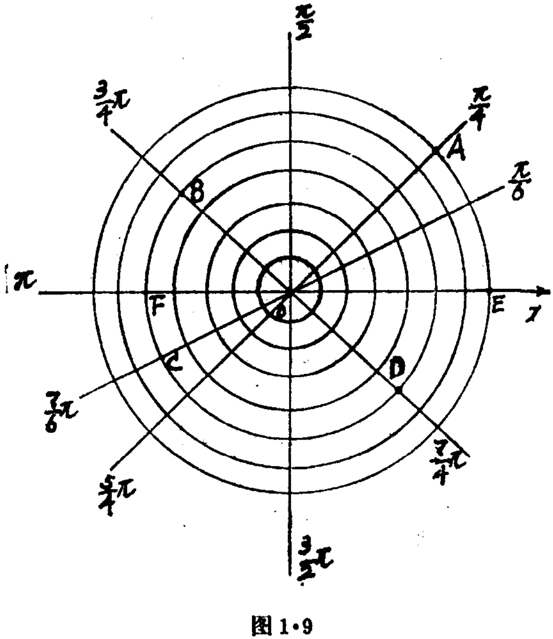

图 1·9

且 $\rho \geqslant 0$，$0 \leqslant \theta < 2\pi$。

3．在图 1·10 中，设有 P, Q, R 三点，根据图上所示位置，且依据下列条件，试写出它们各点的极坐标：

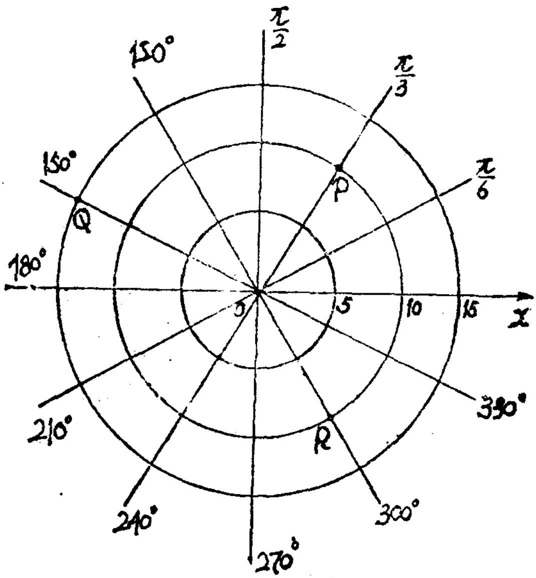

图 1·10

(1) 设 $\rho > 0$，$-\pi < \theta < \pi$；

(2) 设 $\rho > 0$，　$0 < \theta < 2\pi$；

(3) 不限定 ρ 的符号，但必须取 $|\theta|$ 为最小值。

4．试在极坐标系上，画出下列四点：

$$A\left(4, \frac{\pi}{4}\right), B\left(-4, \frac{\pi}{4}\right), C\left(4, -\frac{\pi}{4}\right), D\left(-4, -\frac{\pi}{4}\right),$$

并比较之。

5. 已知各点的极坐标分别为

$$\left(5,\frac{3}{4}\pi\right),\ \left(5,-\frac{5}{4}\pi\right),\ \left(-5,-\frac{\pi}{4}\right),\ \left(-5,\frac{7}{4}\pi\right),$$

试画出上述各点，并分析它们的关系，写出一般式。

6. 试在极坐标系上，画出下列三个点：

$$A\left(2,\frac{\pi}{4}\right),\ B\left(-3,\frac{\pi}{3}\right),\ C\left(-4,\frac{\pi}{6}\right),$$

并写出它们各种类型的极坐标。

（二）极坐标与直角坐标的关系

极坐标系与直角坐标系是两种完全不同的坐标系。同一条曲线，在不同坐标系中的方程有简有繁，同一形式的方程，在不同的坐标系中，它们所表示的曲线也有很大差异。虽然这两种坐标系的构成有所不同，但却都存在着基本的共同点，即它们都是利用一对有序实数来确定平面上一点的位置的，因此这两种坐标系在用来解决几何轨迹问题时，虽然互为补充，互有长短，但却又是互相联系着的。有时为了研究问题方便起见，需要在它们之间进行相互变换，而在一定条件之下它们之间又是完全可以进行互换的。这个互相转化的一定条件便是：取直角坐标系的坐标原点 O 为极点，X 轴的正向为极轴，取相同的长度单位，并规定逆时针方向为极角的正方向。这样便可以建立它们之间的变换公式。

设 M 为平面上任意一点，它的直角坐标为 (x,y)，它的极坐标为 (ρ,θ)（图 1·11）。

据三角知识它们之间关系式为

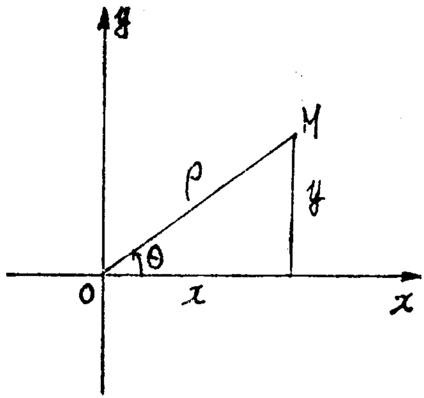

图 1·11

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta. \end{cases} \tag{1}$$

由(1) 式又可推出下面关系式

$$\begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2}, \\ \operatorname{tg}\theta=\dfrac{y}{x}, (x\neq 0)(-\pi<\theta\leqslant\pi). \end{cases} \tag{2}$$

及

$$\begin{cases} \cos\theta=\dfrac{x}{\rho}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \sin\theta=\dfrac{y}{\rho}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases}$$

公式 (1)，(2) 表示了同一点的极坐标与直角坐标间的关系。应注意的是，由公式(2)中的 $\operatorname{tg}\theta$ 决定 θ 时，在 $-\pi<\theta\leqslant\pi$ 的范围内，极角有两个值，还须根据该点所在的象限，才能确定角 θ 的值。

根据上述关系，我们便可以把点的坐标和曲线的方程，

由直角坐标化成极坐标，也可由极坐标化成直角坐标。

例 1　(1) 把 M 点的极坐标$\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$化成直角坐标；

(2) 把 M 点的直角坐标$(1,-1)$化成极坐标。

解　(1) 把 $\rho=2$，$\theta=\frac{\pi}{3}$代入公式(1)，得

$$\begin{cases} x=2\cdot\cos\frac{\pi}{3}=2\cdot\frac{1}{2}=1, \\ y=2\cdot\sin\frac{\pi}{3}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}. \end{cases}$$

所以点 M 的直角坐标为 $(1,\sqrt{3})$。

(2) 把 $x=1$，$y=-1$ 代入公式(2)，得

$$\begin{cases} \rho=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}, \\ \operatorname{tg}\theta=\frac{-1}{1}=-1. \end{cases}$$

θ 的两个值为 $\theta_1=-\frac{\pi}{4}$，$\theta_2=\pi+\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{4}\pi$。因为点 M 在第四象限内，故取 $\theta=-\frac{\pi}{4}$，所以点 M 的极坐标为

$$\left(\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}\right).$$

例 2　求二点 $M_1(\rho_1,\theta_1)$ 和 $M_2(\rho_2,\theta_2)$ 间的距离。

解　设点 M_1 和 M_2 的直角坐标分别为 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2)，则点 M_1 和点 M_2 之间的距离为

$$\begin{aligned} d&=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\ &=\sqrt{(\rho_2\cos\theta_2-\rho_1\cos\theta_1)^2+(\rho_2\sin\theta_2-\rho_1\cos\theta_1)^2} \\ &=\sqrt{\rho_2^2+\rho_1^2-2\rho_1\rho_2(\cos\theta_2\cos\theta_1+\sin\theta_2\sin\theta_1)} \\ &=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\theta_2-\theta_1)}. \end{aligned}$$